Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

5.2 Näherungslösungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

16. Zur sgn-Funktion

a) Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto \operatorname{sgn} x,\ x \in \mathbb{R}$.

b) Beweise durch Fallunterscheidung:

1) $x \operatorname{sgn} x = |x|$ **2)** $|x| \operatorname{sgn} x = x$

3) $\operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn}(x \cdot y)$ **4)** $\dfrac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn} y} = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

5) $\operatorname{sgn}(x^n) = (\operatorname{sgn} x)^n,\ n \in \mathbb{N}$ **6)** $\dfrac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x$ für $x \neq 0$

17. a) Gib mit Hilfe der Betrags- und der Signum-Funktion den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion von $f\colon x \mapsto x^3,\ D_f = \mathbb{R}$ an.

b) Löse **a)** für $f\colon x \mapsto x^{2z+1},\ z \in \mathbb{Z}$ und D_f maximal. Gib $D_{f^{-1}}$ an.

5.2 Näherungslösungen

Gleichungen höheren als zweiten Grades können wir nur in Sonderfällen exakt lösen. In allen anderen Fällen müssen wir uns mit Näherungswerten für die exakten Lösungen begnügen. Dazu fassen wir das Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ als Aufgabe auf, die Nullstellen der Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ zu bestimmen. Mit Hilfe einer Wertetabelle läßt sich der zugehörige Graph $y = f(x)$ zeichnen, aus dem man Näherungslösungen ablesen kann.

Beispiel: $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-19	-3	1	-1	-3	1	17

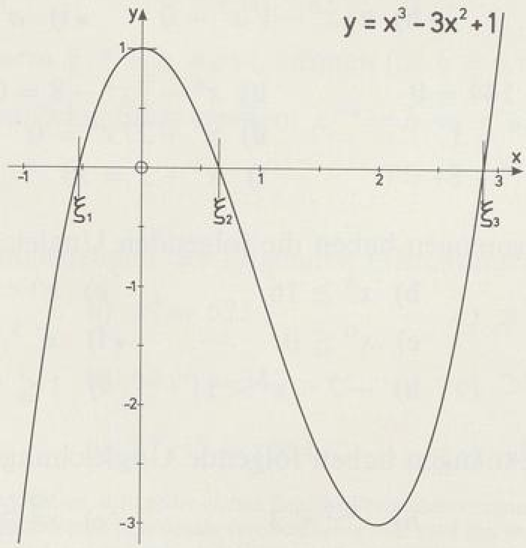

Abb. 100.1 Graph der Funktion $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$

Aus Abbildung 100.1 lesen wir für die Nullstellen ab: $\xi_1 \approx -0{,}5$, $\xi_2 \approx 0{,}6$ und $\xi_3 \approx 2{,}9$.
Zur Verbesserung der Genauigkeit brauchen wir rechnerische Methoden. Eine einfache gebräuchliche Methode ist das **Iterationsverfahren**. Dabei bringt man die zu lösende Gleichung $f(x) = 0$ auf die Form $x = g(x)$, was man auf unterschiedlichste Art und Weise bewerkstelligen kann. Dann beginnt man mit einem Näherungswert x_0 und berechnet der Reihe nach

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) \\ x_2 &= g(x_1) \\ x_3 &= g(x_2) \\ &\dots \\ x_{n+1} &= g(x_n) \end{aligned}$$

usw.

Falls $g(x)$ geeignet gewählt wurde, nähern sich die Werte x_n beliebig genau einer Lösung der Gleichung $x = g(x)$ und damit auch der Gleichung $f(x) = 0$.
Wir lösen jetzt unser Beispiel durch Iteration.

1. Versuch:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \quad \| + x$$

$$x = x^3 - 3x^2 + x + 1 \Rightarrow x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + x_n + 1$$

$x_0 = 0{,}6$	$x_3 = 0{,}8628\dots$	$x_6 = -0{,}1402\dots$
$x_1 = 0{,}736$	$x_4 = 0{,}2716\dots$	
$x_2 = 0{,}5096\dots$	$x_5 = 1{,}0702\dots$	

Da diese Werte sich immer weiter von der vermuteten Nullstelle entfernen, versuchen wir es mit einem anderen Startwert:

$x_0 = 0$	$x_2 = 0$	$x_4 = 0$
$x_1 = 1$	$x_3 = 1$	$x_5 = 1$

Die Werte wiederholen sich unentwegt. Wir sind in eine Schleife geraten; die Nullstelle wird wieder nicht erreicht. Das gewählte $g(x)$ ist offenbar ungeeignet.

2. Versuch:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$3x^2 = x^3 + 1$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{x^3+1}{3}} \Rightarrow (1)\ x_{n+1} = -\sqrt{\frac{x_n^3+1}{3}} \quad \text{und} \quad (2)\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^3+1}{3}}$$

(1) könnte sich zur Berechnung von ξ_1,
(2) zu der von ξ_2 oder ξ_3 eignen:

$x_0 = -0{,}5$	$x_0 = 0{,}6$
$x_1 = -0{,}5400\ldots$	$x_1 = 0{,}6366\ldots$
$x_2 = -0{,}5299\ldots$	$x_2 = 0{,}6475\ldots$
$x_3 = -0{,}5326\ldots$	$x_3 = 0{,}6510\ldots$
$x_4 = -0{,}5319\ldots$	$x_4 = 0{,}6521\ldots$
$x_5 = -0{,}5321\ldots$	$x_5 = 0{,}6525\ldots$
$x_6 = -0{,}53207\ldots$	$x_6 = 0{,}6526\ldots$
$x_7 = -0{,}53209\ldots$	$x_7 = 0{,}65268\ldots$

Da $f(-0{,}53215) < 0$ und $f(-0{,}53205) > 0$ ist, erhält man für die Nullstelle ξ_1 den Näherungswert $-0{,}5321$, und da $f(0{,}65265) > 0$ und $f(0{,}65275) < 0$ ist, erhält man für die Nullstelle ξ_2 den Näherungswert 0,6527. Die Güte dieser Näherungen erkennt man aus $f(-0{,}5321) \approx -4{,}4 \cdot 10^{-5}$ bzw. $f(0{,}6527) \approx 9{,}6 \cdot 10^{-6}$.
Der Startwert 2,9 führt weder bei (1) noch bei (2) zu einem Ergebnis.

Die noch fehlende Nullstelle ξ_3 liefert aber der

3. Versuch:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$x^2(x-3) = -1$$

$$x - 3 = -\frac{1}{x^2}$$

$$x = 3 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n^2}$$

$x_0 = -0{,}5$	$x_0 = 0{,}6$	$x_0 = 2{,}9$
$x_1 = -1$	$x_1 = 0{,}222\ldots$	$x_1 = 2{,}8810\ldots$
$x_2 = 2$	$x_2 = -17{,}2499\ldots$	$x_2 = 2{,}8795\ldots$
$x_3 = 2{,}75$	$x_3 = 2{,}9986\ldots$	$x_3 = 2{,}8793\ldots$
$x_4 = 2{,}8677\ldots$	$x_4 = 2{,}8886\ldots$	$x_4 = 2{,}87938\ldots$
$x_5 = 2{,}8784\ldots$	$x_5 = 2{,}8801\ldots$	
$x_6 = 2{,}8793\ldots$	$x_6 = 2{,}8794\ldots$	
$x_7 = 2{,}87937\ldots$	$x_7 = 2{,}87939\ldots$	

Dieses Verfahren führt überraschenderweise unabhängig vom Startwert immer zur Nullstelle ξ_3. Da $f(2{,}87935) < 0$ und $f(2{,}87945) > 0$ ist, gilt gerundet $\xi_3 \approx 2{,}8794$, wofür man $f(2{,}8794) \approx 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ erhält.

Aufgaben

1. $x^3 - 9x - 10 = 0$

a) Bestimme die ganzzahlige Lösung dieser Gleichung durch Raten.*

b) Berechne eine »Näherungslösung« auf 0,001 genau für die ganzzahlige Lösung mittels der Iteration $x_{n+1} = -\sqrt{\frac{10}{x_n} + 9}$ und dem Startwert $x_0 = -2{,}5$.

c) Bestimme durch Iteration die beiden nicht ganzzahligen Lösungen näherungsweise auf die dritte Dezimalstelle genau. Suche dazu jeweils ein geeignetes $g(x)$ und einen passenden Startwert x_0.

2. $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$ war die Gleichung 4. Grades, an Hand derer CARDANO 1545 das Lösungsverfahren für Gleichungen 4. Grades demonstrierte (siehe Seite 114). Berechne mit Hilfe der angegebenen Iterationsverfahren Näherungen für die beiden reellen Lösungen auf die vierte Dezimalstelle genau.

a) $x_{n+1} = \dfrac{36}{60 - 6x_n - x_n^3}, \qquad x_0 = 0{,}5$

b) $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{60x_n - 36}{x_n^2 + 6}}, \qquad x_0 = 3$

c) $x_{n+1} = \sqrt[4]{6(10x_n - x_n^2 - 6)}, \qquad x_0 = 3$

3. Wie tief taucht eine schwimmende Kugel mit dem Radius $r = 1\,\text{dm}$ und der Dichte $\varrho = 0{,}75\,\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ in Wasser ein? Stelle eine Gleichung für die Eintauchtiefe $x\,\text{dm}$ auf und löse sie näherungsweise auf 10^{-4} gerundet durch ein geeignetes Iterationsverfahren.**

**5.3 Allgemeine Sätze

Nach der Behandlung des Sonderfalls $x^n + a_0 = 0$ wenden wir uns nun den algebraischen Gleichungen in ihrer allgemeinen Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ zu. Bei den Gleichungen 3. Grades haben wir gelernt, daß man sie auf eine Gleichung 2. Grades zurückführen kann, wenn man eine Lösung kennt. In einem solchen Fall kann man auch eine Gleichung n-ten Grades auf eine vom Grad $n-1$ zurückführen. Zum Beweis dieser Behauptung verallgemeinern wir einen Gedankengang, den Geronimo CARDANO (1501–1576) in Regel 6 von Kapitel XXV seiner *Ars magna* 1545 angesprochen hat und den François VIÈTE (1540–1603) in seinem 1615 postum

* Zur historischen Bedeutung dieser Gleichung siehe Seite 113.

** Auf eine solche Gleichung (mit $\frac{n}{m+n}$ an Stelle von ϱ) stieß AL-MAHANI (um 860), als er das von ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) in *Über Kugel und Zylinder* (II,4) gestellte Problem algebraisch lösen wollte: Eine Kugel durch eine Ebene so zerschneiden, daß die Volumina der entstehenden Segmente das Verhältnis $m : n$ haben.