



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

5.4 Zur Geschichte der Auflösung von Gleichungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83532](#)

15. Bestimme nach der Vorzeichenregel von DESCARTES die möglichen Anzahlen positiver und negativer Lösungen. Gib die möglichen ganzzahligen Lösungen an. Ermittle die Lösungsmenge.
- a) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$ b) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$
 c) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$ d) $x^3 + 1 = 0$
 e) $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = 0$ f) $x^5 - 5x + 22 = 0$
16. Bestimme nach der Vorzeichenregel von DESCARTES die möglichen Anzahlen positiver und negativer Lösungen und die möglichen rationalen Lösungen. Gib schließlich die Lösungsmenge an.
- a) $3x^3 + 5x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$
 c) $9x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$ d) $64x^4 - 128x^3 + 84x^2 - 20x + 1 = 0$
17. a) Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung $x^5 + x + 1 = 0$ keine positive, aber genau eine negative Lösung hat, und weise nach, daß sie nicht rational ist.
 b) 1) Bestimme eine Näherungslösung von $x^5 + x + 1 = 0$ durch Schneiden der Graphen $y = x^5$ und $y = -x - 1$.
 2) Verbessere die Näherungslösung durch die Iteration

$$x_{n+1} = -\sqrt[5]{x_n + 1}, n \in \mathbb{N}_0$$
 auf 6 geltende Ziffern.
 3) Was ergibt sich bei dem naheliegenden Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = -x_n^5 - 1, n \in \mathbb{N}_0$$
?
 **c) Schreibe $x^5 + x + 1$ als Produkt aus einem Polynom 3. und 2. Grades und bestimme mit der Formel von CARDANO (Seite 116) die Lösung exakt.
18. Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung $2x^6 + 10x^4 + 7x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung hat. Wie kann man das auch einfacher einsehen?
19. Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES: Die Lösungsmenge einer algebraischen Gleichung ungeraden Grades ist nicht leer.

**5.4 Zur Geschichte der Auflösung von Gleichungen

Wie du im letzten Jahr gelernt hast, konnten die Babylonier bereits um 2000 v. Chr. quadratische Gleichungen lösen; aber der Weg zur Lösungsformel war noch lang. Erst Simon STEVIN (1548–1620) schaffte es in seiner 1585 in Leiden erschienenen *L'Arithmétique* dadurch, daß er auch negative Zahlen als Koeffizienten zuließ. Ungleich schwieriger war es, die kubische Gleichung zu lösen. Die Babylonier benützten hierzu eine Tabelle, in der zu jeder natürlichen Zahl n der Wert von $n^3 + n^2$ aufgeführt wurde (siehe Aufgabe 120/1). Bei den Griechen traten kubische Gleichungen bei ganz bestimmten Problemen auf, nämlich dem Delischen Problem der Würfelverdopplung – dem Analogon zur Quadratverdopplung des MENON – (Aufgabe 46/7 und 85/12) oder der Dreiteilung eines Winkels. Gelöst wurden sie geometrisch unter Zuhilfenahme bestimmter Kurven.

Weder die Inder noch die Araber fanden eine algebraische Lösungsmethode für die kubischen Gleichungen. Immerhin gelang es aber dem persischen Dichter, Philosophen, Astronomen und Mathematiker Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) in seiner *Abhandlung über die Beweise und Probleme von Algebra und Muqabala*, alle Typen kubischer Gleichungen graphisch unter Verwendung von Kreisen und Parabeln bzw. Hyperbeln zu lösen (*Algebra* 3, Seite 170). Dabei entgeht ihm aber, daß gewisse Aufgaben drei Lösungen besitzen. Sein Werk wurde dem Abendland leider erst im 19. Jh. bekannt.

Mit der allmählichen Verbreitung algebraischer Kenntnisse versuchte man sich im Italien des 14. Jhs an der allgemeinen Lösung der kubischen Gleichung. 1494 setzte Luca PACIOLI (1445?–1517) in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*, dem damals weitverbreiteten Standardwerk über das mathematische Wissen seiner Zeit, in einer kleinen Liste von Gleichungen höheren Grades – wir benützen unsere Symbole – neben $Ax^4 + Cx^2 = Dx$ und $Ax^4 + Dx = Cx^2$ das Wort *impossibile* (sic!), zu deutsch *unmöglich*. Klammert man Ax aus, so hat man kubische Gleichungen der Form $x^3 + bx = c$ bzw. $x^3 + c = bx$ vor sich. Für die Koeffizienten b und c wurden dabei nur positive Zahlen zugelassen. Meinte nun PACIOLI mit seinem »unmöglich«, daß man grundsätzlich keine kubische Gleichung lösen könne? Nein; denn auf der übernächsten Seite (folium 150r) liest man sein Bedauern, daß »man bis heute noch keine allgemeinen Regeln aufstellen konnte«. 51 Jahre später wurden sie veröffentlicht, unter dramatischen Umständen, die die Zeitgenossen und auch die Nachwelt bewegten.

1515 oder gar schon 1505 gelingt es Scipione DEL FERRO (1465–1526), seit 1496 Professor für Mathematik an der Universität von Bologna, die Gleichung $x^3 + bx = c$ zu lösen, was er vermutlich nur einigen wenigen seiner Schüler kundtut.* Fachwissen behielt man damals für sich; konnte man doch damit in öffentlichen Wettkämpfen das Publikum in Erstaunen versetzen und erhebliche Geldpreise gewinnen. Und so fordert einer seiner Schüler, nämlich Antonio Maria FIOR, latinisiert zu FLORIDUS, Rechenmeister aus Brescia, den in Venedig wirkenden Rechenmeister Niccolò FONTANA (1499–1557), der sich lateinisch TARTALEA, italienisch TARTAGLIA** nennt, zu einem solchen Wettkampf. Bis zum 22. Februar 1535 sollte jeder 30 Fragen aus verschiedensten Gebieten der Mathematik versiegeln beim Notar ZAMBELLI in Venedig hinterlegen, die dann innerhalb von 50 Tagen zu lösen waren. Um TARTAGLIA einzuschüchtern, brüstet sich FIOR damit, schon vor 30 Jahren von einem großen Mathematiker gelernt zu haben, wie man die Gleichung $x^3 + bx = c$ löst, überzeugt, daß auf Grund von PACIOLIS »unmöglich« es niemand anderer könne. TARTAGLIA weiß also, woher der Wind weht, und so nimmt er seine Studien über kubische Gleichungen wieder auf; denn bereits 1530 hat ihm in Verona ein anderer Rechenmeister aus Brescia, Zuanne de Tonini DA COI, auch Giovanni COLLA genannt, Gleichungen vom Typ $x^3 + mx^2 = n$ bzw. $x^3 + n = mx^2$ mit $m, n > 0$ vorgelegt. TARTAGLIA hat, wie er selbst schreibt, Glück: Am 12. Februar 1535 findet er die Lösung von (1) $x^3 + bx = c$ und anderntags die von (2) $x^3 = bx + c$. Auch seine Vermutung hat ihn nicht getrogen: allen Aufgaben FIORES lag die kubische Gleichung (1) zugrunde. Und so kann TARTAGLIA innerhalb von zwei Stunden alle Aufgaben lösen!***

Irgendwann kommt DA COI nach Mailand und berichtet Geronimo CARDANO

* Wahrscheinlich konnte er auch $x^3 = bx + c$ und $x^3 + c = bx$ lösen.

** Beides bedeutet DER STOTTERER. 1512 wurde Niccolò als Kind bei der Eroberung Brescias durch einen Schwerthieb eines französischen Soldaten so schwer verwundet, daß er nur mehr stottern konnte. Sein voller Bart verdeckte die entstellende Narbe.

*** TARTAGLIA überliefert uns 1546 in den *Quesiti* (siehe Seite 95) alle Aufgaben FIORES, von den seinigen aber nur die neun, die er CARDANO 1539 mitteilte.

(1501–1576) von diesem Wettkampf. Und da dieser gerade seine *Practica Arithmeticae* herausgeben will, bietet er TARTAGLIA am 2. Januar 1539 durch einen Mittelsmann an, die Lösungsformeln unter TARTAGLIAS Namen in seiner *Practica* zu veröffentlichen. TARTAGLIA lehnt ab, da er sich die Veröffentlichung selbst vorbehalten wolle. Am 13. März wiederholt CARDANO sein Angebot, am 19. März hat TARTAGLIA den Brief in Händen. So schnell ging damals die Post! Außerdem lädt er ihn nach Mailand ein, auch im Namen des Marchese Alfonso d'AVALOS*, der sich für TARTAGLIAS neue, 1537 in der *Nova Scientia* veröffentlichte Entdeckungen über die Schießkunst interessiert. Das gibt den Ausschlag, und bereits am 25. März ist TARTAGLIA Gast in CARDANOS Haus, der Marchese aber ist verreist. Nachdem CARDANO auf das heilige Evangelium geschworen hat, niemals TARTAGLIAS Entdeckung zu veröffentlichen und sie außerdem so verschlüsselt aufzuschreiben, daß niemand nach seinem Tode sie verstehen könne, teilt ihm TARTAGLIA seine Formeln für (1), (2) und auch für (3) $x^3 + c = bx$ in Form eines 25zeiligen leicht einprägbaren Gedichts mit, das er selbst immer als Gedächtnisstütze benützte, um die komplizierten Regeln nicht zu vergessen. Einen Beweis gibt er aber nicht preis, und abrupt reist er ab. (Der vierte für uns mögliche Fall, $x^3 + bx + c = 0$, wird überhaupt nicht betrachtet, da er nur durch negative Zahlen gelöst werden könnte, die nach damaliger Auffassung keine Lösungen sind.) CARDANO gesteht am 9. April TARTAGLIA, mit den Versen nicht zu Rande zu kommen; er möge sie ihm doch an Hand der Gleichung $x^3 + 3x = 10$ erklären. TARTAGLIA entspricht der Bitte am 23. April, fügt als weiteres Beispiel die Gleichung $x^3 + x = 11$ an und erinnert CARDANO an sein Versprechen, worauf ihm dieser am 12. Mai ein noch ungebundenes Exemplar seiner *Practica* zusendet als Beweis, daß er sich an den Eid gehalten habe. Aber TARTAGLIAS Mißtrauen wird wieder geweckt, als ihm sein ehemaliger Schüler Meister Maphio POVEIANI aus Bergamo am 10. Juli kundtut, in Mailand werde erzählt, CARDANO schreibe an einem neuen Werk über Algebra mit neuen Entdeckungen. TARTAGLIA bereut, das Geheimnis preisgegeben zu haben**, und beantwortet zwei Briefe CARDANOS nicht. Als er jedoch am 4. August einen Brief CARDANOS erhält, in dem ihm dieser an Hand der Gleichung $x^3 = 9x + 10$ mitteilt, daß die Formeln in gewissen Fällen versagen, obwohl es eine Lösung gibt – es handelt sich

* Der Spanier war der kaiserliche Gouverneur der Lombardei. † 1546.

** Quello che tu non voi che si sappia nol dir ad alcuno – Was du nicht willst, daß man weiß, das sag keinem. Mit diesem Sprichwort fordert TARTAGLIA Meister POVEIANI am 19. Juli auf, ein wachsames Auge auf CARDANO zu haben und ihn auf dem laufenden zu halten.



Hinc nymmr Cardamur

Abb. 113.1 Gerónimo, auch Girolamo CARDANO (24.9.1501 Pavia – 20.9.1576 Rom) Bildnis aus der *Ars magna*, 1545

Die Umschrift lautet:

tὸ μέλλον ὅτι γενήσεται εἰς τὸ φέρτερον
τίθει

Halte das Zukünftige, das sich entwickeln
wird, für das Bessere!

um CARDANOS Entdeckung des *casus irreducibilis* (Aufgabe 121/5 und 6) –, weicht TARTAGLIA in seiner Antwort vom 7. August diesem Problem aus und meint, CARDANO habe eben die Formeln nicht richtig verstanden; darüber hinaus bedauere er, ihn eingeweiht zu haben, da er sich in Mailand brüste, neue Regeln in der Algebra entdeckt zu haben. Am 18. Oktober verteidigt sich CARDANO, indem er durch Lösen der Gleichung $x^3 = 12x + 20$ zeigt, daß er die Terzinen* TARTAGLIAS wohl verstanden hat; TARTAGLIA aber hat keine Lust mehr zu antworten. Da erreicht ihn ein Brandbrief vom 5. Januar 1540, in dem CARDANO voll des Schreckens schreibt, der »Teufel« DA COI sei wieder in Mailand und behaupte, ebenfalls die Regeln für die kubische Gleichung zu kennen, ja noch mehr, auch die Gleichung 4. Grades lösen zu können, was er ihn lehren wolle, falls er ihm freiwillig seine öffentlichen Vorlesungen über Arithmetik überließe. TARTAGLIA zerpfückt diesen Brief in den *Quesiti*, beantwortet ihn aber nicht. Und so endet die Korrespondenz dieser beiden Mathematiker.

In der Folgezeit gelingt es CARDANO, einen Beweis für TARTAGLIAS Regeln zu finden und darüber hinaus die allgemeine kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen – CARDANO muß natürlich wieder viele Fälle unterscheiden –, indem er sie durch die Transformation $x =: y - \frac{a}{3}$ auf eine der Formen (1) bis (3) bringt, die kein quadratisches Glied enthalten (Aufgabe 121/7). Im Jahre 1542 reist er mit seinem überaus begabten Schüler Ludovico FERRARI (1522–1565)** nach Florenz; in Bologna sehen sie dabei den Nachlaß Scipione DEL FERROS bei dessen Nachfolger und Schwiegersohn Annibale DELLA NAVE (um 1500–1558) ein. Sie finden darin gut und elegant erklärt die Lösung, die auch TARTAGLIA angegeben hat. (TARTAGLIA wird später, am 21. April 1547, entgegen, seine Entdeckung könne zu jeder Zeit auch von anderen gemacht werden, er habe alles selbst gefunden.) Schließlich gelingt es Ludovico FERRARI, das von DA COI in einem Wettstreit gestellte Problem einer Gleichung 4. Grades durch Zurückführung auf eine kubische Gleichung zu lösen.*** Durch diese Entdeckungen und vor allem durch den selbständig gefundenen Beweis fühlt sich CARDANO nicht mehr an seinen Eid gebunden, den es laut FERRARI überhaupt nicht gegeben habe, und veröffentlicht 1545 (Widmung vom 9. Januar) in seiner *Ars magna* die Regeln für die Lösung der kubischen Gleichungen – insgesamt sind es 13 Fälle – und, unter voller Anerkennung der Leistung FERRARIS, die für die Gleichung 4. Grades.

Die drei Regeln TARTAGLIAS und CARDANOS für die Gleichungen (1) bis (3) lassen sich zu einer zusammenfassen, die dann auch für den vierten Fall gilt, wenn man grundsätzlich zuläßt, daß die in Gleichungen auftretenden Buchstaben auch negative Zahlen bedeuten können. Wir eilen nun der Zeit voraus; denn erst Jan HUDDE

* Terzine, vom italienischen *terzo* = *dritter*, ist eine Strophenform aus ursprünglich je drei elfsilbigen Versen mit dem Reimschema aba/bcb/cdc/.../z. DANTE (1265–1321) *Divina Commedia* z.B. ist in Terzinen verfaßt.

** Er wurde 1536 als 14jähriger in CARDANOS Haushalt als Hausbursche aufgenommen. Von 1540 bis 1556 lehrte er Mathematik in Mailand und anschließend in Bologna. Vermutlich wurde er von seiner Schwester vergiftet.

*** DA COI hat dieses Problem TARTAGLIA bereits am 12. September 1535 zur Lösung vorgelegt, nur mit etwas anderen Zahlen. Unverständlichweise schickt CARDANO dasselbe Problem als seine eigene Aufgabe am 2. Januar 1539 an TARTAGLIA, der es sofort als das DA COIs erkennt und dies auch CARDANO auf den Kopf zusagt, worüber dieser entrüstet ist. Aber am 5. Januar 1540 ist es in CARDANOS Brief doch wieder das Problem DA COIs, und in Kapitel XXXIX seiner *Ars magna* schreibt CARDANO ehrlich, daß es von DA COI stammt. Es handelt sich in der dortigen Fassung um die Aufgabe, 10 so in drei Summanden zu zerlegen, daß sie in fortlaufender Proportion zueinander stehen und daß das Produkt aus dem ersten und zweiten Summanden 6 ergibt. Für den zweiten Summanden y erhält man die Gleichung $y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$. Die von CARDANO angegebene Lösung ist übrigens falsch. – Im Lösungsheft wird gezeigt, wie FERRARI diese Gleichung gelöst hat.

(1628–1704) hat diese so fruchtbare Idee in seiner 1654/55 entstandenen und 1659 erschienenen Arbeit *De reductione aequationum* (siehe Seite 105). In ihr leitet er auch die dann auf alle Fälle anwendbare, üblicherweise nach CARDANO benannte Formel zur Lösung der kubischen Gleichung her, wobei er den Weg TARTAGLIAS nur geringfügig modifiziert. Er ersetzt nämlich in der Gleichung*

$$x^3 + px + q = 0$$

die Unbekannte x durch $u + v$ und erhält damit die Gleichung

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Diese ist sicher erfüllt, wenn

$$\text{I} \quad 3uv = -p$$

II $u^3 + v^3 = -q$ ist.

Ohne Schwierigkeit erhält man daraus

$$\text{I}' \quad 3uv = -p$$

$$\text{II}' \quad u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Gleichung II' ist eine quadratische Gleichung für u^3 . Man kann also aus dem Gleichungssystem leicht u und v berechnen (Aufgabe 121/2) und erhält damit für die Unbekannte x die als Formel von CARDANO bezeichnete Darstellung

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

In dieser Darstellung von x wird die Kubikwurzel noch in der in jener Zeit üblichen Art benutzt, bei der der Radikand auch negativ sein durfte; $\sqrt[3]{-8}$ ergab -2 , so, wie es auch manche Taschenrechner heute tun. Bei dieser Deutung der dritten Wurzel dürfen aber die Potenzgesetze nicht auf gebrochene Exponenten übertragen werden, wie du weißt.

Die Taschenrechner zeigen bei $(-8)^{\frac{1}{3}}$ auch ERROR an! Wir lassen zur Vermeidung von Schwierigkeiten aus diesem Grunde nur nichtnegative Radikanden zu und müssen deshalb bei der Auflösung der Gleichung $u^3 = \dots$ usw. nach Satz 98.1 vorgehen. Dann ergibt sich als



1686

A cursive signature of the name "Jan Hudde" in black ink.

Abb. 115.1 Jan HUDDÉ (getauft 23.5. 1628 Amsterdam – 15.4.1704 Amsterdam) – Gemälde von Michiel VAN MUSSCHER (1645–1705)

* HUDDÉ selbst geht vom Ausdruck $x^3 = qx + r$ aus. Wir benutzen die heute übliche Nullform einer Gleichung.

Formel von CARDANO

Die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ hat die Lösung

$$x = \operatorname{sgn} R_1 \sqrt[3]{|R_1|} + \operatorname{sgn} R_2 \sqrt[3]{|R_2|}$$

$$\text{mit } R_1 := -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad R_2 := -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Offensichtlich versagt dieser Lösungsweg, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung für u^3 negativ ist, d.h., wenn $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ ist. Das ist aber genau der von CARDANO entdeckte casus irreducibilis. 1745 zeigte Abraham Gotthelf KÄSTNER (1719–1800), daß in diesem Fall die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ stets drei reelle Lösungen besitzt. 1891 bewies Ludwig Otto HÖLDER (1859–1937), daß diese Bedingung auch notwendig ist und daß sich diese drei Lösungen grundsätzlich nicht durch Wurzeln darstellen lassen.

Kehren wir aber nach diesem Ausflug bis in das 19. Jh. zurück ins Jahr 1545 zu CARDANO und seiner *Ars magna*. Darin berichtet er gleich im 1. Kapitel, daß Scipione DEL FERRO als erster die Lösung der kubischen Gleichung (1) gefunden habe und daß dies später auch TARTAGLIA gelungen sei, der sie ihm auf seine Bitten mitgeteilt habe. Er verschweigt aber, daß TARTAGLIA ihm auch die Formel für Typ (2) und (3) verraten hat! Schließlich kommt er auf Luca PACIOLIS »unmöglich« zu sprechen und wiederholt, was er bereits am 25. März 1539 TARTAGLIA gegenüber geäußert hat:

»Getäuscht wurde ich nämlich durch die Worte Luca PACIOLIS, der behauptet, daß es über seine Regeln hinaus keine andere allgemeingültige geben könne; obwohl diese, da ich vordem schon so vieles gefunden hatte, auf der Hand lag, hatte ich dennoch keine Hoffnung zu finden, was ich nicht zu suchen wagte.«

Aus diesen Worten spricht Überheblichkeit, aber auch Ärger darüber, so schnell aufgegeben zu haben, weil man den Worten eines anderen zu sehr vertraut hatte! TARTAGLIA fühlt sich getäuscht und bringt Juli 1546 seine HEINRICH VIII. von England (reg. 1509–1547) gewidmeten *Quesiti, et inventioni diverse* – »Aufgaben und verschiedene Erfindungen« – auf den Markt. Im 9. Buch erzählt er den von uns wiedergegebenen Ablauf der Ereignisse und bezichtigt CARDANO des Eidbruchs. Aber nur FERRARI reagiert darauf. Am 10. Februar 1547 erklärt er sich in einem Brief, den er in Abschrift an 53 hochgestellte Persönlichkeiten und Mathematiker Italiens verschickt, zu einem Streitgespräch mit TARTAGLIA bereit. Dieser läßt seine Antwort in 1000 Exemplaren drucken, woraus sich ein Briefwechsel entwickelt, die sog. 12 *cartelli di matematica disfida* – »Briefe der mathematischen Herausforderung«. Darin legen sich die Kontrahenten auch jeweils 31 Probleme vor. Um die immer schärfer werdenden gegenseitigen Vorwürfe zu beenden, erklärt sich TARTAGLIA am 16. Juni 1548 bereit, nach Mailand zu kommen, was FERRARI am 14. Juli 1548 akzeptiert. Mit dessen Vorschlag, Ferrante GONZAGA, der Gouverneur von Mailand, solle die Jury bestimmen, ist TARTAGLIA am 24. Juli 1548 einverstanden. CARDANO verläßt die Stadt. Am 10. August 1548 beginnt zur 18. Stunde* in der Kirche der Hl. Maria im Garten der Minoriten der Wettstreit. TARTAGLIA erscheint in Begleitung seines Bruders, FERRARI mit vielen Freunden. Über den genauerer Verlauf wissen wir wenig: Nach dem ersten Auftritt TARTAGLIAS entwickelt sich ein längerer Disput über die Bestellung der Jury, in

* = 14.30 Uhr. Siehe dazu z. B. GOETHE, *Italienische Reise*, 17.9.1786

dessen Verlauf einer nach dem anderen zum Abendessen geht. TARTAGLIA verläßt, sich angeblich bedroht fühlend, anderntags Mailand auf einem anderen Weg. Eine dunkle und sicher nicht sehr ehrenvolle Geschichte hat ein ruhmloses Ende gefunden. TARTAGLIA kommt 1551 im *Terzo Ragonamento sopra la Travagliata Inventione* – »Dritte Erörterung über die mühevolle Erfindung« –, 1556 und postum 1560 in seinem *General trattato di numeri, et misure* – »Allgemeine Abhandlung über Zahlen und Maße« – mehrmals auf diese Vorgänge zu sprechen. CARDANO wiederholt 1554 in seinem erst 1557 gedruckten *De libris propriis* – »Über die eigenen Bücher« – die bereits in der *Ars magna* gegebene Darstellung, zeiht TARTAGLIA aber wegen dessen »Verleumdungen der Unverschämtheit und Dummheit«; diese Passage fehlt in der erweiterten Fassung von 1562. Immer aber besteht CARDANO darauf, daß »Niccolò Tartaglia, der übel von mir sprach, später in Mailand widerrufen mußte«, wie es in seiner 1575, also ein Jahr vor seinem Tode, zusammengestellten Autobiographie *De vita propria* – »Über das eigene Leben« – heißt. Aber er gesteht dort auch: »In der Mathematik habe ich einiges, jedoch recht wenig, dem Bruder Niccolò zu danken.« Und er bedauert, daß »dieser mich jedoch lieber zum Rivalen wollte, und zwar zum überlegeneren, als zu einem Freund, der ihm ob seiner Tat Dank schuldet.« Mit der *Ars magna* CARDANOS hat die Geheimniskrämerei der Rechenmeister ein Ende gefunden, die Wissenschaft kann sich fortentwickeln.

In den nächsten 250 Jahren machen sich die besten Mathematiker an die Auflösung der Gleichungen 5. und höheren Grades, darunter VIÈTE, DESCARTES, LEIBNIZ und EULER. Zunächst aber stellt 1608 der Nürnberger Rechenmeister Peter ROTH († 1617) in seiner *Arithmetica philosophica* fest, daß eine Gleichung n -ten Grades höchstens n Lösungen haben kann⁺, und 1629 der Flamme Albert GIRARD (1595–1632) in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre*, daß es genau n Lösungen gibt, wenn man Wurzeln aus negativen Zahlen zuläßt. Bewiesen hat dies allerdings erst 1799 Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) als 22jähriger in seiner Doktorarbeit *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integrarum unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. Drei weitere Beweise lieferte er im Laufe seines Lebens für diesen Satz, den er 1849 »Grundlehrsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen« nannte und der heute **Fundamentalsatz der Algebra** heißt. Natürlich hat man mit einem solchen Existenzbeweis noch keine Lösungsformel!

Wenn auch z.B. Abraham DE MOIVRE (1667–1754) die Lösung der reziproken Gleichungen höherer Grade (*Algebra* 9, Seite 129) gelungen war, so waren alle Versuche fehlgeschlagen, eine Formel für die allgemeine Gleichung höheren Grades als 4 zu finden. Was keiner glauben wollte, spricht 1799 GAUSS in seiner Doktorarbeit aus: »Es werde vielleicht nicht so schwer sein, die Unmöglichkeit bereits für den 5. Grad in aller Strenge zu beweisen, worüber ich an anderer Stelle meine Untersuchungen breiter darlegen möchte.«* Im selben Jahr veröffentlicht Paolo RUFFINI (1765–1822) ein umfangreiches 324seitiges Werk**, in dem er mehr nachzuweisen versucht, nämlich die Unmöglichkeit, eine Gleichung von höherem Grad als 4 zu lösen. Aber sein Beweis war nicht zwingend. Auch weitere Arbeiten (1802, 1804 und 1813) konnten die Beweislücken nicht schließen.

Der Ruhm, den ersten vollständigen Beweis geliefert zu haben, gebührt dem Norweger Niels Henrik ABEL (1802–1829). Auf der Domschule zu Oslo erkannte 1817 sein neuer Mathematiklehrer*** Bernt Michael HOLMBOE (1795–1850) die Begabung des Jungen;

⁺ Jost BÜRGI (1552–1632) sprach dies bereits nach 1598 in seiner (erst 1973 gedruckten) *Coss* aus (s. S. 39).

* Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem jam pro quinto gradu omni rigore demonstrare, de qua re alio loco disquisitiones meas fusius proponam.

** *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*

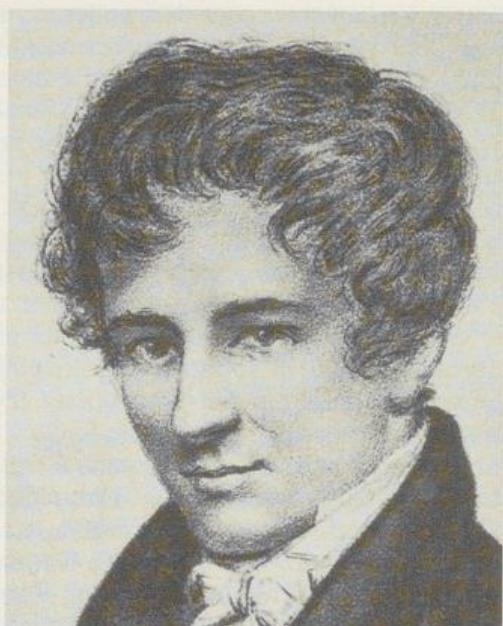
*** Der Vorgänger mußte die Schule verlassen, weil ein Schüler, den er über die Maßen gezüchtigt hatte, starb.



spätestens 1828

C. F. Gauss

Abb. 118.1 Carl Friedrich GAUSS
[Gauß] (30.4.1777 Braunschweig bis
23.2.1855 Göttingen) – Lithographie von
Siegfried BENDIXEN (1786 – nach 1864)



1826

N. H. Abel

Abb. 118.2 Niels Henrik ABEL
(5.8.1802 Findø bei Stavanger – 6.4.1829
Froland bei Arendal) – Gemälde von
Johan Görbitz (1782–1853)

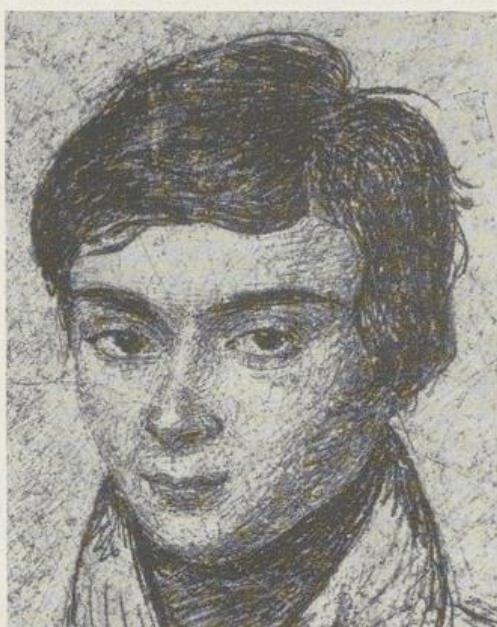
er förderte ihn, indem er ihm die Originalarbeiten der mathematischen Koryphäen seiner Zeit zu lesen gab. Von RUFFINIS Arbeiten jedoch erfuhr ABEL nichts, und so glaubte er 1821, trotz der Bemerkung GAUSSENS, eine Lösungsformel für die Gleichung 5. Grades gefunden zu haben, und sandte sie an Professor DEGEN nach Kopenhagen, der ihn bat, ein Beispiel durchzurechnen. Da erst ging ihm die Fehlerhaftigkeit seiner Schlußweise auf! 1824 veröffentlichte er auf eigene Kosten eine nur einen halben Druckbogen umfassende Schrift*, in der er die Unmöglichkeit, die Gleichung 5. Grades algebraisch zu lösen, bewies. Er sandte sie GAUSS zu, der sie unaufgeschritten beiseite legte. 1825 bis 1827 reiste ABEL mit einem kleinen Stipendium der norwegischen Regierung nach Berlin und Paris. August Leopold CRELLE (1780–1855) erkannte die Bedeutung des jungen Mathematikers und veröffentlichte 1826 ABELS abschließende Arbeit als Übersetzung, nämlich den *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten algebraisch aufzulösen* zusammen mit fünf weiteren Arbeiten ABELS in der ersten Nummer seiner neugegründeten Fachzeitschrift *Journal für reine und angewandte Mathematik*, die heute noch existiert.

Nun wußte man es, auf rund 20 Seiten klar bewiesen! Aber ABEL stellt sich sofort die neue spannende Aufgabe, »alle Gleichungen zu finden, die algebraisch lösbar sind«, wie er am 16.1.1826 an HOLMBOE schreibt. Seine Arbeiten gedeihen, kommen aber zu

* *Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*

keinem Abschluß; denn 1829 stirbt er an Schwindsucht. Gelöst hat das Problem Évariste GALOIS (1811–1832) im Januar 1831 durch sein *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* – »Abhandlung über die Bedingungen der Lösbarkeit von Gleichungen durch Radikale« –, aufbauend auf Arbeiten von Joseph-Louis LAGRANGE (1736–1813), GAUSS und Augustin Louis CAUCHY (1789–1857).

Als GALOIS am Collège Louis-le-Grand in Paris als 15jähriger wegen Schulunlust – in den beiden Jahren davor gehörte er zu den Besten in Latein und Griechisch – die vorletzte Klasse wiederholen muß, besucht er zusätzlich zum ersten Mal einen Mathematikkurs. Bald studiert er die Werke der großen Mathematiker seiner Tage, die *Géométrie* LEGENDRES (1752–1833) und LAGRANGES algebraische Abhandlungen. Im darauffolgenden Jahr vernachlässigt er alle anderen Kurse außer dem der Mathematik und stört, wo er kann. Der Studieneintrag des 2. Trimesters 1827/28 lautet: »Sehr schlechtes Benehmen. [...] Er ist darauf aus, sonderbar zu sein. [...] Er macht überhaupt nichts für den Unterricht. Die Raserei der Mathematik hat von ihm Besitz ergriffen; deshalb glaube ich, es wäre besser für ihn, wenn seine Eltern zustimmen, daß er sich nur diesem Studium widme; hier verliert er seine Zeit und quält nur seine Lehrer und wird mit Strafen eingedeckt.«* Entgegen allen Ratsschlägen lernt er nicht systematisch genug und besteht deswegen zweimal nicht die Aufnahmeprüfung in die berühmte École Polytechnique. Am 25. Mai und am 1. Juni 1829 reicht er zwei Aufsätze über die Auflösung algebraischer Gleichungen bei der Pariser Akademie der Wissenschaften ein, die CAUCHY beurteilen soll. Sie sind nie mehr aufgetaucht.** Im Februar 1830 liefert GALOIS dort eine Arbeit für den Großen Preis der Akademie in Mathematik ein, der Ständige Sekretär Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768–1830) stirbt im Mai. Und auch diese Arbeit wurde nie mehr aufgefunden. Inzwischen war am 20. Februar der republikanisch gesonnene GALOIS in die École préparatoire, die Lehrerbildungsanstalt, aufgenommen worden, in der er, eingeschlossen mit seinen Mitschülern, die drei Glorreichen Tage der Julirevolution untätig verbringen muß. Er greift deswegen den Direktor in einem Brief an, der am



1816/17

E Galois

Abb. 119.1 Évariste GALOIS
(25.10.1811 Bourg-la-Reine bei Paris bis
31.5.1832 Paris)

* Conduite fort mauvaise [...] Il vise à l'originalité. [...] Il ne fait absolument rien pour la classe. C'est la fureur des mathématiques qui le domine; aussi je pense, qu'il vaudrait mieux pour lui que ses parents consentent à ce qu'il ne s'occupe que de cette étude; il perd son temps ici et n'y fait que tourmenter ses maîtres et se faire accabler de punitions.

** ABEL war Ähnliches widerfahren. Ein am 30. Oktober 1826 eingereichtes Manuskript sollte CAUCHY durchsehen; es wurde verschlampt, kam aber 1830 zum Vorschein, als CAUCHY nach der Julirevolution ins Exil ging, und wurde erst 1841 zur Veröffentlichung herausgegeben, nachdem sich die norwegische Regierung eingeschaltet hatte.

5. Dezember 1830 in der *Gazette des Écoles* veröffentlicht wird. Auf Beschuß des Königlichen Rates wird er am 3. Januar 1831 aus der Anstalt ausgestoßen. Am 17. Januar 1831 reicht GALOIS auf Anregung von Siméon-Denis POISSON (1781–1840) sein oben angeführtes *Mémoire* bei der Akademie ein. POISSON und auch Sylvestre-François LACROIX (1765–1843) bemühen sich erheblich, die äußerst knapp gehaltene und auch nicht fehlerfreie Arbeit zu verstehen; schließlich lehnen sie am 4. Juli 1831 ihre Veröffentlichung ab. Am 14. Juli bringt GALOIS sein politisches Engagement zum zweiten Mal ins Gefängnis. Am 29. Mai 1832 wird er zu einem Duell gefordert, dessen Hintergründe von Legenden umrankt sind, die aber letztlich ungeklärt bleiben werden. GALOIS ist sich sicher, daß er sterben wird. In der Nacht vom 29. auf den 30. Mai redigiert er seine früheren Manuskripte und schreibt mehrere Briefe, darunter einen sehr langen an seinen Freund Auguste CHEVALIER, in dem er nochmals seine mathematischen Entdeckungen zusammenfassend darlegt, die in drei *Mémoires* enthalten sind. Eins hatte er schon früher veröffentlicht, das zweite ist das abgelehnte, vom dritten fand sich keine Spur.* Er bittet CHEVALIER, diesen Brief nach seinem Tode zu veröffentlichen, denn er hoffe, daß »es Leute geben wird, die aus der Entzifferung dieses Durcheinanders ihren Nutzen ziehen werden.«** Am Morgen des 30. Mai wird er beim Duell in den Bauch geschossen und angeblich liegen gelassen. Vermutlich suchte man nach einem Arzt. Währenddessen findet ihn zufällig ein Bauer und bringt ihn ins Hospital; am 31. Mai 1832 stirbt GALOIS. Im September 1832 veröffentlicht CHEVALIER in einem Nachruf den mathematischen Abschiedsbrief und erst 1846 Joseph LIOUVILLE (1809–1882) das entscheidende *Mémoire* von 1831, zusammen mit anderen Arbeiten GALOIS'. Eine neue Generation von Mathematikern versteht die grundlegenden Ideen GALOIS', liefert die vollständigen Beweise und erkennt, daß GALOIS aus der einst so wichtigen Frage, welche Gleichungen auflösbar sind, einen völlig neuen Zweig der Mathematik, nämlich eine Mathematik der Strukturen oder die »moderne Algebra« geschaffen hat.

Aufgaben

1. Auf einer Keilschrifttafel aus der späten 1. babylonischen Dynastie (2057–1758)***, deren einer Teil in London (BM 85200) und deren anderer in Berlin (VAT 6599) liegt, sind uns sieben kubische Gleichungen überliefert (siehe auch Aufgabe 46/7). Davon wurden die folgenden mit einer $(n^3 + n^2)$ -Tabelle, wie sie uns auf Tafel VAT 8492 überliefert ist,**** gelöst. Es handelt sich jeweils um einen quaderförmigen Erdaushub. Dabei beziehen sich die Maßzahlen x und y von Länge und Breite auf die Einheit GAR (= 6 m), die Maßzahl z der Tiefe aber auf die Einheit Elle; es gilt 1 GAR = 12 Ellen.
 - a) Stelle eine $n \mapsto (n^3 + n^2)$ -Tabelle für die einziffrigen natürlichen Zahlen auf.
 - b) Aufgabe 5: Länge, Breite. Was die Länge ist, ist auch die Tiefe. Querschnitt und Volumen sollst du addieren; es ergibt sich $1\frac{1}{6}$. Die Breite ist $\frac{2}{3}$ der Länge.
 - 1) Stelle eine Gleichung für die Maßzahl z der Tiefe auf und löse sie mit Hilfe der Tabelle.
 - 2) Gibt es weitere reelle Lösungen?
 - 3) Gib Länge und Breite an.

* Die oft gehörte Behauptung, GALOIS habe erst in dieser Nacht seine mathematischen Theorien in fiebiger Eile niedergeschrieben, ist ein romantisches Schauermärchen.

** [...] il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer ce gâchis.

*** Nach anderer Chronologie: 1894–1554 v. Chr.

**** Diese stammt aus neubabylonischer Zeit, d.h. 625–539 v. Chr.

- c) *Aufgabe 23:* Länge, Breite. Der Querschnitt ist ein Quadrat. Die Länge und 1 Elle dazu ist die Tiefe. $1\frac{3}{4}$ als Volumen ist ausgegraben.
Stelle eine Gleichung für die Maßzahl x der Länge auf und löse sie mit Hilfe der Tabelle. Gib auch die Tiefe an.
2. Leite die Formel von CARDANO von Seite 116 auf dem HUDDESCHEN Weg her.
3. Die Formel von CARDANO liefert die Lösungen der kubischen Gleichung oft in sehr unzweckmäßiger Darstellung.
- Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung $x^3 + 6x = 20$ genau eine positive Lösung hat. Ermittle sie durch Probieren.
 - Löse die Gleichung mit der Formel von CARDANO und bestimme mit Hilfe des Taschenrechners einen Näherungswert für den erhaltenen Ausdruck.*
4. a) Zeige, daß die Gleichungen
 1) $x^3 + 3x = 10$ 2) $x^3 + x = 11$ 3) $x^3 = 12x + 20$
 keine ganzzahligen Lösungen haben.
- Gib eine Lösung mit Hilfe der Formel von CARDANO an.
 - Bestimme mit dem Taschenrechner einen Näherungswert bis auf die 5. Dezimalstelle genau für den in b) gewonnenen Ausdruck. Wie gut erfüllt dieser Näherungswert die gegebene Gleichung?
5. Zeige, daß bei $x^3 = 9x + 10$ die Formel von CARDANO nicht angewendet werden kann. Bestimme die drei reellen Lösungen.
6. Im Falle des casus irreducibilis konnte CARDANO Gleichungen nur in besonderen Fällen lösen. Aus Kapitel XXV seiner *Ars magna*, das er daher mit *De Capitulis imperfectis et specialibus – »Über die unvollkommenen und nur in Sonderfällen brauchbaren Regeln«* überschreibt, stammen die folgenden Gleichungen.
- $x^3 = 32x + 24$
 - $x^3 = 16x + 21$
 - $x^3 + 12 = 34x$
 - $x^3 + 18 = 19x$
 - $x^3 + 8 = 18x$
7. a) Zeige, daß durch die Transformation $x =: y - \frac{a}{3}$ aus $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ eine kubische Gleichung entsteht, die kein quadratisches Glied mehr enthält.
- b) Löse nach diesem Verfahren und der Formel von CARDANO die Gleichung $x^3 + 6x^2 + 20x = 100$ aus Kapitel XVII der *Ars magna* CARDANOS von 1545.
8. Löse die Gleichungen von Aufgabe 1 mit Hilfe der Formel von CARDANO.
9. Magister JOHANNES legte am Hofe Kaiser FRIEDRICHs II. (*1194, reg. 1215–1250) dem FIBONACCI genannten LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240) die Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ vor, die auf Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) zurückgeht.
- LEONARDO zeigte 1225 in seiner *Flos* – »Die Blume« – mach es ihm nach! – :
 - Die Gleichung hat keine natürliche Zahl als Lösung.
 - Die Gleichung hat keine positive rationale Zahl $\frac{m}{n}$ als Lösung ($m, n \in \mathbb{N}$ und teilerfremd).

* CARDANO berichtet am 5. Januar 1540 ganz verzweifelt TARTAGLIA, daß der Teufel da sei angeblich ein allgemeines Verfahren kenne, mit dem man $\sqrt[3]{108 \pm 10} \text{ in } \sqrt{3} \pm 1$ umwandeln könne, was ihm nicht gelinge. TARTAGLIA gibt in den *Quesiti* das Verfahren an.

- 3) Die Gleichung hat keine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl als Lösung. Forme sie zum Nachweis um in $x = \frac{20 - 2x^2}{10 + x^2}$.
- b) Zeige, daß im Intervall $]1; 2[$ eine Lösung dieser Gleichung liegt. Bestimme für sie einen Näherungswert x_0 durch lineare Interpolation* und starte damit das Iterationsverfahren $x_{n+1} = \frac{20 - 2x_n^2}{10 + x_n^2}$, $n \in \mathbb{N}_0$ zur Ermittlung einer Näherungslösung auf die 3. Dezimale genau.
- c) LEONARDO gab ohne jede Herleitung als Lösung der Gleichung in sexagesimaler Form die Zahl $\xi = 1;22,7,42,33,4,40$ an. Schreibe ξ dezimal.
- d) Zeige mit der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung genau eine positive Lösung hat.
- e) Zeige, daß es keine weitere reelle Lösung gibt, d.h., daß die Formel von CARDANO anwendbar ist. Bestimme die Lösung exakt.

* Man ersetzt das über $[1; 2]$ gelegene Stück des Graphen $y = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ durch eine Gerade, die die x -Achse in $(x_0 | 0)$ schneidet.