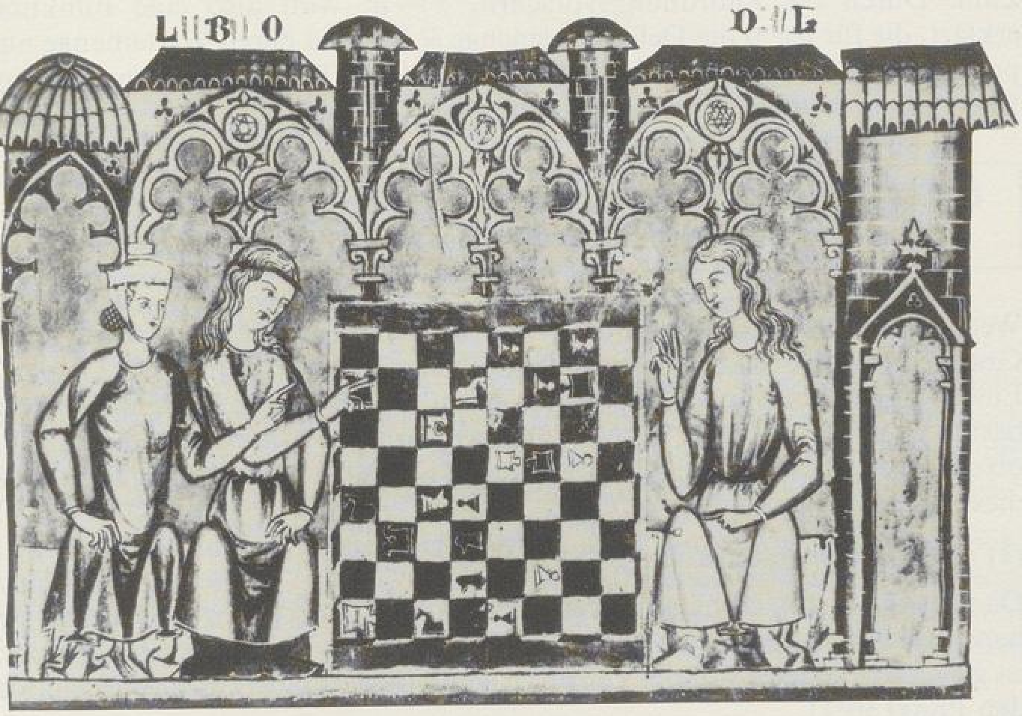
Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

6 Exponentialfunktionen

6 Exponentialfunktionen



Folium 24v aus den *Libros de Acedrex, de los Dados* und *de las Tablas*, dem *Schachzabelbuch*, das ALFONS X. DER WEISE, König von Kastilien und León (*1221, reg. 1252–1284) in Auftrag gab und das 1283/84 vollendet wurde. Dargestellt sind zwei junge Damen mit offenem Haar, die in Hauskleidung Schach spielen. Eine weitere junge Dame, die Zöpfe in einem roten Haarnetz, erteilt einer der Spielerinnen Ratschläge.

»Schachzabel« ist ein altes Wort für Schachbrett. Das *Schachzabelbuch* ist die älteste Sammlung von Schachendspielen; darüber hinaus gibt es Kunde von Würfel- und von weiteren Brettspielen.
ALFONS X. wurde am 1.4.1257 zum römisch-deutschen König gewählt, da seine Mutter BEATRIX die Tochter des Staufers PHILIPP VON SCHWABEN (1177–1208) war. In seinem Auftrag wurden auch die *Alfonsinischen Tafeln* berechnet (abgeschlossen 1272), die zur Ortsbestimmung von Sonne, Mond und den fünf bekannten Planeten dienten. Trotz ihrer Schwächen blieben sie bis zur Aufstellung der *Prutenischen Tafeln* (1551) durch Erasmus REINHOLD (1511–1553) und schließlich der *Rudolphinischen Tafeln* (1627 [siehe Seite 201 ff.]) durch Johannes KEPLER (1571–1630) in Gebrauch. ALFONS X. gründete außerdem in Toledo eine Übersetzerschule, der wir viele Übersetzungen aus dem Arabischen ins Lateinische verdanken.

6 Exponentialfunktionen

6.1 Definition und Eigenschaften

Bei einer Potenz mit positiver Basis a kann bekanntlich als Exponent x jede reelle Zahl gewählt werden; a^x ist dann stets eine eindeutig bestimmte positive Zahl. Durch die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto a^x$ wird also eine Funktion erklärt, die für $a > 0$ die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ hat und deren Wertemenge nur positive Zahlen enthält. Eine solche Funktion, bei der die Variable im Exponenten steht, heißt Exponentialfunktion.

Definition 124.1: Die Funktion f: $x \mapsto a^x$ mit $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt **Exponentialfunktion** mit der Basis a.

Wegen $a^0 = 1$ hat jede Funktion $x \mapsto a^x$ an der Stelle $x = 0$ den Wert 1; die Graphen dieser Funktionen enthalten alle den Punkt $(0|1)$.
Eine Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ ist durch Angabe ihrer Basis vollständig bestimmt. Da es bei einer Potenz einen wesentlichen Unterschied ausmacht, ob die Basis größer, gleich oder kleiner als 1 ist, untersuchen wir im folgenden diese drei Fälle getrennt.

(1) Die Exponentialfunktion $x \mapsto 1^x$, $x \in \mathbb{R}$

Da stets $1^x = 1$ gilt, enthält die Wertemenge dieser Funktion nur die Zahl 1, es handelt sich also um eine konstante Funktion. Die Funktionsgleichung $y = 1^x$ ist gleichwertig mit $y = 1$, der Graph ist somit die Parallele zur x-Achse durch den Punkt $(0|1)$.

(2) Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, mit $a > 1$

Nach dem Monotoniegesetz von Satz 88.1 wächst im Fall $a > 1$ der Potenzwert mit dem Exponenten, d.h., es gilt

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist also für $a > 1$ echt monoton zunehmend. Abbildung 125.1 zeigt den Graphen der Funktion $x \mapsto 2^x$, der sich mit Hilfe einer Wertetabelle leicht zeichnen läßt.* Der Funktionswert verdoppelt sich bei $x \mapsto 2^x$ jeweils, wenn man x um 1 vergrößert. Das bewirkt, daß die Funktionswerte mit wachsendem x beliebig groß werden, also jede noch so große Zahl übertreffen. Man kann sich leicht klarmachen, wie schnell sie wachsen; z.B. gilt wegen $2^{10} = 1024 > 10^3$ auch $2^{20} > 10^6$, $2^{30} > 10^9$, $2^{40} > 10^{12}$ usw. Wegen $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ gilt andererseits $2^{-10} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$,

* Statt »Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$« bzw. »Graph mit der Gleichung $y = f(x)$« verwenden wir im folgenden auch die kürzere Sprechweise »Graph $y = f(x)$«.

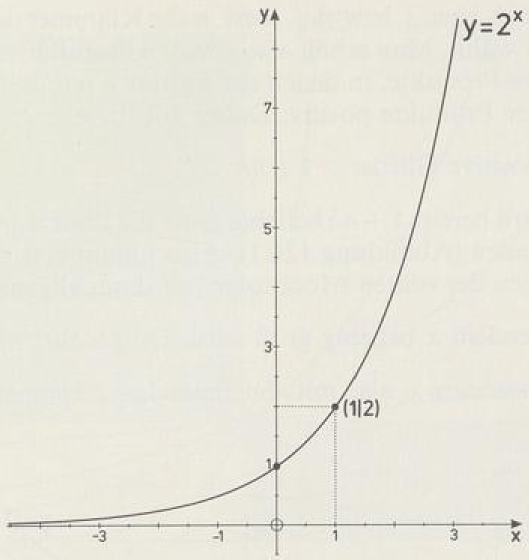


Abb. 125.1 Graph der Funktion $x \mapsto 2^x$

$2^{-20} < 10^{-6}, 2^{-30} < 10^{-9}, 2^{-40} < 10^{-12}$ usw.; es gibt also auch beliebig nahe bei null liegende Funktionswerte. Der Graph der Funktion nähert sich nach links hin beliebig der x-Achse. Man erkennt so, daß die Wertemenge der Funktion $x \mapsto 2^x, x \in \mathbb{R}$, alle positiven Zahlen umfaßt, also die Menge $\mathbb{R}^+$ ist.*

Die vorausgehenden Feststellungen gelten nicht nur für die Basis 2. Es läßt sich vielmehr zeigen, daß jede Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$, deren Basis a größer als 1 ist, die Wertemenge $\mathbb{R}^+$ hat; die Funktionswerte werden mit unbeschränkt wachsendem x beliebig groß, mit unbeschränkt abnehmendem x nähern sie sich beliebig der Zahl 0.

Ein Beweis für diese Behauptung sei im folgenden kurz beschrieben. Wir wählen dazu für die Basis die Darstellung $a = 1 + h$ mit $h > 0$. Die Beispiele

$$a^2 = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$$
$$a^3 = (1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 > 1 + 3h$$
$$a^4 = (1+h)^4 = 1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 > 1 + 4h$$

lassen vermuten, daß für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ die Abschätzung $(1+h)^n > 1 + nh$ gilt. Daß dies zutrifft, erkennt man, indem man sich die Berechnung von $(1+h)^n$ als Ausmultiplizieren von n Klammern vorstellt:

$$(1+h)^n = (1+h)(1+h)(1+h) \dots (1+h)$$

Die Zahl 1 ergibt sich, wenn man in jeder Klammer den ersten Summanden nimmt (schwarze Bögen). Wählt man aus der ersten Klammer den Summanden h und aus allen übrigen die 1, so erhält man $1 \cdot h$ (rote Bögen). Dasselbe Produkt ergibt sich aber

* Daß wirklich alle positiven reellen Zahlen als Funktionswerte auftreten, daß also keine Lücken vorkommen, werden wir uns im Abschnitt **7.1** noch genauer klarmachen.

auch, wenn man in der 2. bzw. 3. bzw. 4. ... bzw. n-ten Klammer den Summanden h und in allen anderen die 1 wählt. Man erhält also genau n Produkte mit dem Wert h. Dazu kommen noch weitere Produkte, in denen der Faktor h mindestens zweimal auftritt; wegen $h > 0$ sind diese Produkte positiv. Daher gilt für $n \geqq 2$:

$$(1+h)^n = 1 + nh + \text{positive Glieder} > 1 + nh.$$

Mit wachsendem n wird bereits $1 + nh$ beliebig groß, die Punkte $(n|1 + nh)$ liegen ja auf einer steigenden Geraden (Abbildung 126.1). Also nimmt erst recht $(1+h)^n$ beliebig große Werte an. Wegen der echten Monotonie gilt dann allgemein, daß $(1+h)^x$ mit unbeschränkt wachsendem x beliebig groß wird. Umgekehrt nähert sich $\frac{1}{(1+h)^x} = (1+h)^{-x}$ mit wachsendem x, also mit abnehmendem Exponenten $-x$, beliebig der Zahl 0.

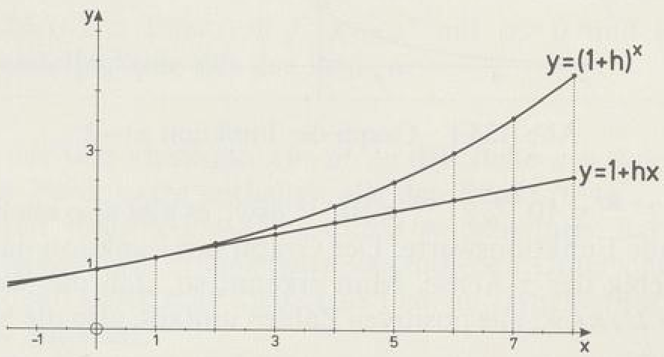


Abb. 126.1 Veranschaulichung von $(1+h)^n > 1 + nh$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $h = 0{,}2$

Wir wollen nun zwei verschiedene Exponentialfunktionen, deren Basen größer als 1 sind, miteinander vergleichen:

$$f_1\colon x \mapsto a_1^x \quad \text{und} \quad f_2\colon x \mapsto a_2^x \quad \text{mit} \quad 1 < a_1 < a_2.$$

Nach dem Monotoniegesetz von Satz 87.1 gilt für $x > 0$ auch $a_1^x < a_2^x$.
Bei positivem Exponenten x gehört zur größeren Basis auch der größere Funktionswert; der Graph $y = a_2^x$ verläuft im 1. Quadranten also über dem Graphen $y = a_1^x$.
Bei $x = 0$ haben die Graphen den Punkt $(0|1)$ gemeinsam.
Was gilt für negative Exponenten x? Aus der für jedes $x \neq 0$ gültigen Beziehung $a_1^{|x|} < a_2^{|x|}$ folgt für $x < 0$:

$$a_1^{-x} < a_2^{-x} \Leftrightarrow \frac{1}{a_1^x} < \frac{1}{a_2^x} \Leftrightarrow a_1^x > a_2^x.$$

Unter der Voraussetzung $1 < a_1 < a_2$ gehört also bei negativem Exponenten x zur kleineren Basis der größere Funktionswert; der Graph $y = a_2^x$ verläuft im 2. Quadranten unter dem Graphen $y = a_1^x$.
In Abbildung 127.1 sind die Zusammenhänge an einigen Beispielen veranschaulicht. Beachte, daß die grau gerasterten Gebiete von den Graphen $y = a^x$ mit $a > 1$ nicht erfaßt werden.

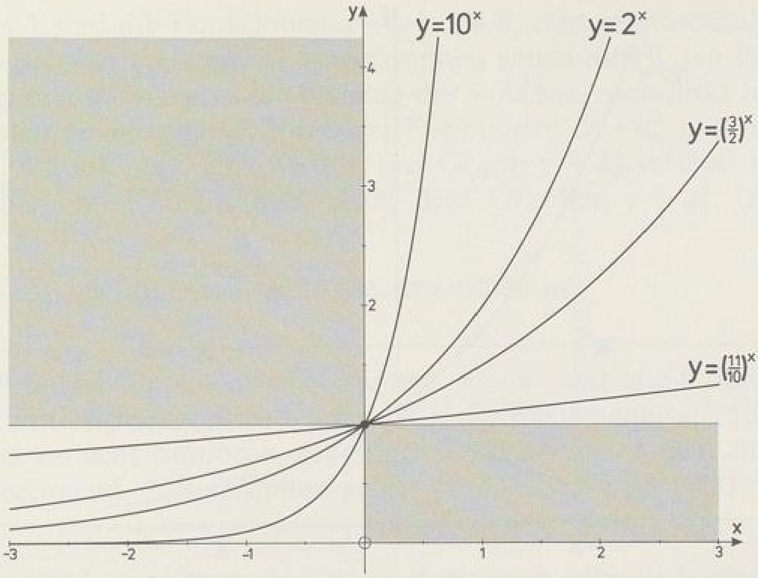


Abb. 127.1 Graphen der Funktion $x \mapsto a^x$ für $a = 1{,}1$; $a = 1{,}5$; $a = 2$; $a = 10$

(3) Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, mit $0 < a < 1$

Nach dem Monotoniegesetz von Satz 88.1 sind diese Funktionen echt monoton abnehmend. Abbildung 127.2 zeigt den Graphen von $x \mapsto (\frac{1}{2})^x$. Ein Vergleich mit Abbildung 125.1 läßt vermuten, daß er durch Spiegelung des Graphen $y = 2^x$ an der y-Achse entsteht. Tatsächlich gilt für zwei entgegengesetzte x-Werte, nennen wir sie t und $-t$, die Gleichung $(\frac{1}{2})^t = 2^{-t}$. Die Punkte $(t|(\frac{1}{2})^t)$ und $(-t|2^{-t})$ liegen also, da sie entgegengesetzte Abszissen und gleiche Ordinaten haben, symmetrisch zur y-Achse.

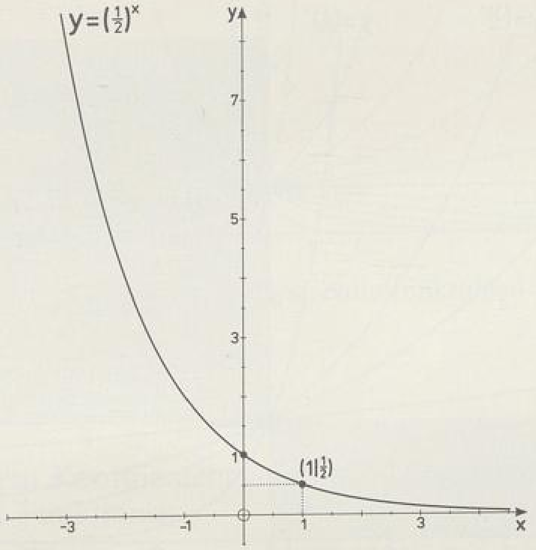


Abb. 127.2 Graph der Funktion $x \mapsto (\frac{1}{2})^x$

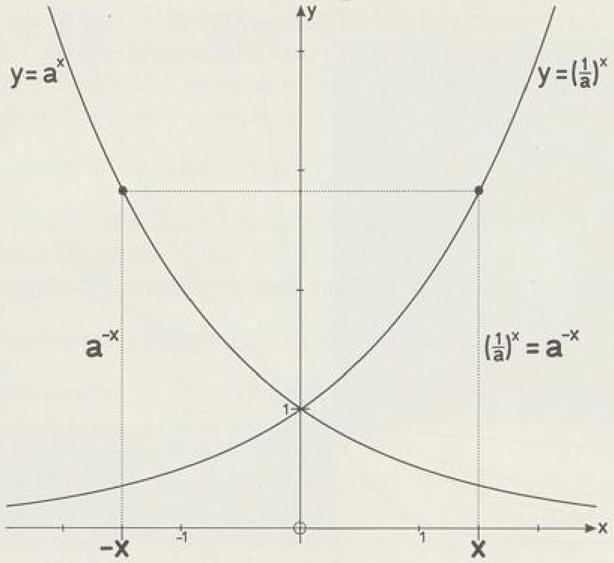


Abb. 128.1 Symmetrie der Graphen $y = a^x$ und $y = (\frac{1}{a})^x$

Ganz allgemein kann man durch die Umformung $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ die Untersuchung der Exponentialfunktionen mit $0 < a < 1$ auf den Fall **(2)** zurückführen, da nun $\frac{1}{a} > 1$ gilt. Der Graph $y = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, d.h. $y = a^x$, geht aus der Kurve $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor. Also liegen die Graphen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ symmetrisch zur y-Achse, wie Abbildung 128.1 zeigt. Aus den Ergebnissen von **(2)** erhält man damit:

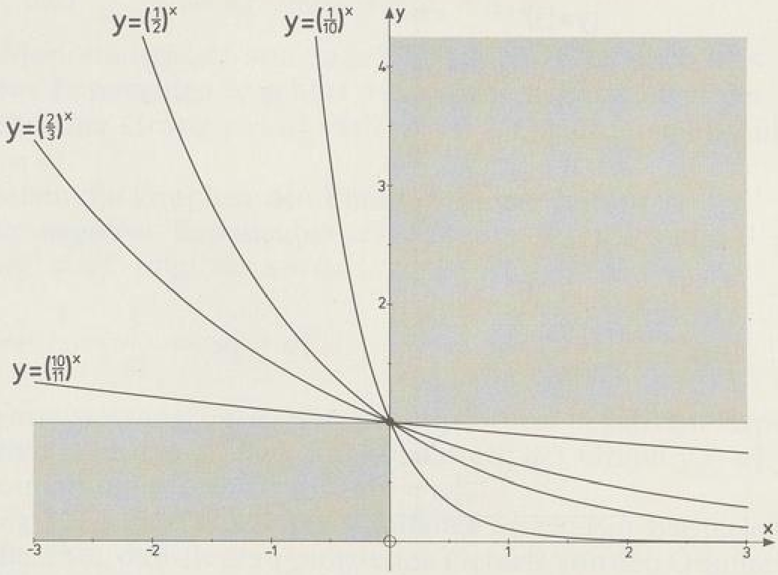


Abb. 128.2 Graphen der Funktion $x \mapsto a^x$ für $a = \frac{10}{11}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$

Für $0 < a < 1$ sind die Funktionen $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, echt monoton abnehmend und haben die Wertemenge $\mathbb{R}^+$. Ihre Graphen gehen durch den Punkt $(0|1)$ und nähern sich nach rechts hin beliebig der x-Achse, nach links hin werden die Ordinaten beliebig groß. Für zwei Funktionen $x \mapsto a_1^x$ und $x \mapsto a_2^x$ mit $0 < a_1 < a_2 < 1$ gilt auch jetzt wieder: Der Graph $y = a_2^x$ verläuft im 1. Quadranten über, im 2. Quadranten unter dem Graphen $y = a_1^x$. (Abbildung 128.2)

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse zusammen in

> **Satz 129.1:** Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ mit $a > 0$ haben die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und, falls $a \neq 1$, die Wertemenge $\mathbb{R}^+$. Für $a > 1$ sind sie echt monoton zunehmend, für $0 < a < 1$ echt monoton abnehmend. Alle Graphen gehen durch den Punkt $(0|1)$.

Abbildung 129.1 vermittelt eine Vorstellung vom »Büschel« der Graphen $y = a^x$ mit beliebigen positiven Basen.

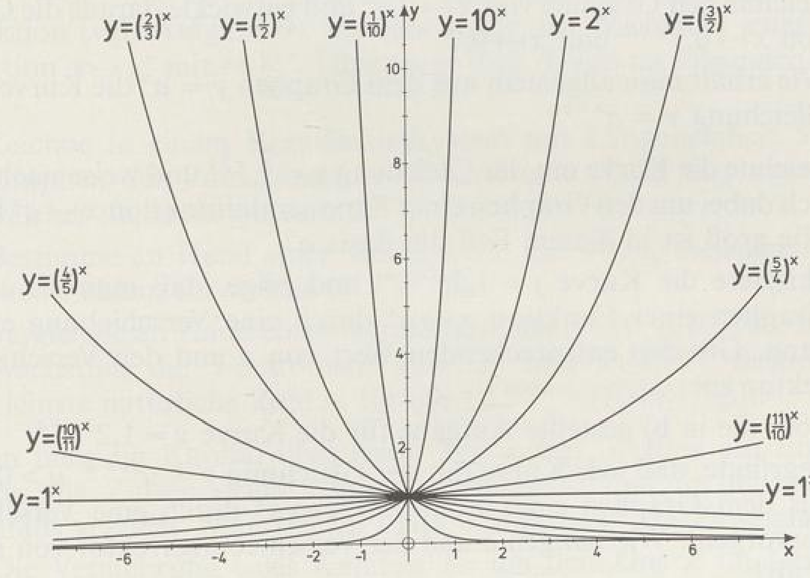


Abb. 129.1 Graphen von Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$

Aufgaben

1. Zeichne in einem Koordinatensystem mit Längeneinheit 1 cm die Graphen folgender Funktionen:
   a) $x \mapsto 3^x$; $-2{,}5 \leqq x \leqq 2{,}5$ **b)** $x \mapsto (\frac{3}{8})^x$; $-2{,}5 \leqq x \leqq 2{,}5$
   c) $x \mapsto 1{,}4^x$; $-8 \leqq x \leqq 8$ **d)** $x \mapsto 0{,}75^x$; $-8 \leqq x \leqq 8$

2. Zeichne die folgenden Graphenpaare:

a) $y = 1{,}2^x$ und $y = (\frac{5}{6})^x$; $-10 \leqq x \leqq 10$

b) $y = (\frac{12}{7})^x$ und $y = (\frac{7}{12})^x$; $-4 \leqq x \leqq 4$

c) $y = 0{,}625^x$ und $y = 1{,}6^x$; $-5 \leqq x \leqq 5$

3. Bestimme diejenige Exponentialfunktion, deren Graph durch den angegebenen Punkt geht.

a) $(2|9)$ **b)** $(2|7)$ **c)** $(3|\frac{1}{27})$ **d)** $(1{,}5|8)$

e) $(-5|32)$ **f)** $(-7|1)$ **g)** $(-\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$ **h)** $(\sqrt{8}|9^{\sqrt{2}})$

4. Gibt es eine Exponentialfunktion, deren Graph den folgenden Punkt enthält?

a) $(1|0)$ **b)** $(0|1)$ **c)** $(0|3)$ **d)** $(-2|5)$ **e)** $(5|-2)$

5. a) Zeichne den Graphen von $x \mapsto 2^x$ und entwickle daraus die Graphen von $x \mapsto 2^x - 3$ und $x \mapsto 2^x + 1{,}5$.

b) Wie erhält man allgemein aus dem Graphen $y = a^x$ die Kurve mit der Gleichung $y = a^x + c$?

6. a) Zeichne den Graphen von $x \mapsto 0{,}7^x$ und entwickle daraus die Graphen von $x \mapsto 0{,}7^{x+2}$ und $x \mapsto 0{,}7^{x-1{,}5}$.

b) Wie erhält man allgemein aus dem Graphen $y = a^x$ die Kurve mit der Gleichung $y = a^{x+c}$?

7. a) Zeichne die Kurve mit der Gleichung $y = 1{,}5^{2x}$ und weise nach, daß es sich dabei um den Graphen einer Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ handelt. Wie groß ist in diesem Fall die Basis a?

b) Skizziere die Kurve $y = 1{,}2^{3(x-4)}$ und zeige, daß man sie aus dem Graphen einer Funktion $x \mapsto a^x$ durch eine Verschiebung erzeugen kann. Gib den entsprechenden Wert von a und den Verschiebungsvektor an.

c) Löse die in **b)** gestellte Aufgabe für die Kurve $y = 1{,}2^{3x-4}$.

d) Begründe, daß jede Kurve mit der Gleichung $y = u^{vx+w}$, $u > 0$, $v \neq 0$, aus dem Graphen einer Funktion $x \mapsto a^x$ durch eine Verschiebung hervorgeht. Wie hängen a und der Verschiebungsvektor von u, v und w ab?

8. a) Vergleiche die beiden Funktionen $x \mapsto 0{,}25 \cdot 2^x$ und $x \mapsto 2^{x-2}$ an Hand einer Wertetabelle. Begründe sodann den offenbar zwischen ihnen bestehenden Zusammenhang.

b) Zeige, daß jede Funktion mit der Gleichung $y = u^{vx+w}$, mit $u > 0$ und $v \neq 0$, auch durch eine Gleichung der Form $y = c \cdot a^x$ beschrieben werden kann. Wie hängen dabei a und c von u, v und w ab?

9. a) Zeichne in einem Koordinatensystem die Gerade $y = 3x + 1$ und die Kurve $y = 2^x$. Im Schnittpunkt $(0|1)$ verläuft die Kurve flacher als die

Gerade, sie wird aber mit wachsendem x immer steiler und übersteigt schließlich die Gerade. Bestimme die kleinste natürliche Zahl n, für die $2^n > 3n+1$ gilt.

• **b)** Die Funktion $x \mapsto 2^x$ übertrifft für hinreichend großes x sogar jede lineare Funktion $x \mapsto mx+1$, auch bei noch so großer Steigung m. Gib als Beispiel dafür zu

1) $m = 10$ **2)** $m = 1000$ **3)** $m = 100000$

die kleinste natürliche Zahl an, für die $2^x > mx+1$ gilt. (Taschenrechner verwenden!)

⁝ **c)** Jede Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ mit $a > 1$ wächst schließlich (d.h. bei hinreichend großen x-Werten) schneller als jede lineare Funktion! Bestätige dies bei den folgenden Beispielen durch Angabe der kleinsten natürlichen Zahl, für die $a^x > mx+1$ gilt. (Taschenrechner!)

1) $x \mapsto 1{,}1^x$ und $x \mapsto 100x+1$
2) $x \mapsto 1{,}01^x$ und $x \mapsto 100x+1$
3) $x \mapsto 1{,}01^x$ und $x \mapsto 1000x+1$

10. Das **exponentielle Wachstum**, d.h. das Wachstum einer Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ mit $a > 1$, übertrifft nicht nur dasjenige jeder linearen Funktion (vgl. Aufgabe **9**), sondern sogar das Wachstum jeder Potenzfunktion $x \mapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{R}^+$. Überzeuge dich davon an folgenden Beispielen:

a) Zeichne in einem Koordinatensystem mit Längeneinheit 5 mm die Graphen der Funktionen $x \mapsto 2^x$ und $x \mapsto x^2$ für $0 \leqq x \leqq 4{,}5$. Von welcher Stelle ab gilt stets $2^x \geqq x^2$?

b) Bestimme an Hand einer Wertetabelle mit $x \in \mathbb{N}_0$ diejenigen natürlichen Zahlen, für welche $2^x > x^3$ gilt.

c) Vergleiche an Hand einer Wertetabelle mit $x \in \{0, 1, 10, 100, 1000\}$ das Wachstum der Funktionen $x \mapsto 1{,}1^x$ und $x \mapsto x^{10}$. Bestimme die kleinste natürliche Zahl n, für die $1{,}1^{100n} > (100n)^{10}$ gilt.

11. Wenn man ein Kapital über lange Zeit anlegt, werden am Ende jedes Jahres die Zinsen »zum Kapital geschlagen« und im nächsten Jahr ebenfalls verzinst. Man spricht dann bekanntlich von **Zinseszins**.*

a) Die Vermehrung eines Kapitals K_0 um den Zins Z im Laufe eines Jahres kann man als Multiplikation von K_0 mit einem Faktor $q > 1$ beschreiben. Wie wird dieser Faktor aus dem Zinssatz $p\,\%$ berechnet?

b) Auf welchen Wert K_n wächst K_0 beim Zinssatz $p\,\%$ in n Jahren an? Was ergibt sich speziell für

1) $K_0 = 1000$ DM, $p = 4\,\%$, $n = 5$
2) $K_0 = 1000$ DM, $p = 4\,\%$, $n = 10$
3) $K_0 = 1000$ DM, $p = 8\,\%$, $n = 5$?

* Zu den Wörtern *Kapital*, *Zins* und *Zinseszins* siehe die Fußnote auf Seite 148.

c) Um wieviel Prozent seines Anfangswertes wächst ein Kapital
1) bei 10% in 5 Jahren; **2)** bei 5% in 10 Jahren;
3) bei 10% in 10 Jahren?

d) 2500 DM werden zu 5,5% angelegt. Der Anleger möchte erreichen, daß sein Guthaben auf 10000 DM anwächst! Wieviel Jahre würde das (ungefähr) dauern? Nach welcher Zeit hat sich das Kapital (ungefähr) verdoppelt?

e) Löse Aufgabe **d)** für $p = 8\,\%$.

12. Das Wachstum einer Pilzkultur verläuft unter gleichbleibenden Bedingungen nach einer Exponentialfunktion. In einem bestimmten Fall gelte für die aus 1 g Pilzsubstanz in x Tagen entstandene Masse y g das Wachstumsgesetz $y = 2^{0,25x}$. Nach wieviel Tagen hat sich die Masse verdoppelt bzw. vervierfacht bzw. verachtfacht?

13. Bei der Entladung eines Kondensators über einen Widerstand nimmt die Stromstärke I nach einer Exponentialfunktion ab. In einem speziellen Fall sei $I = 0,38\,\mathrm{A} \cdot 10^{(-162/\mathrm{s})t}$, wobei t die seit Beginn der Entladung verstrichene Zeit bedeutet. Nach welcher Zeit ist die Stromstärke auf 1% bzw. auf 1‰ ihres Anfangswertes gesunken?

14. Das mit der Basis $\frac{1}{2}$ geschriebene Zerfallsgesetz für das radioaktive Element Radium 223 lautet: $N(t) = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^{(0,086/\mathrm{d})t}$. Dabei ist N_0 die Zahl der zur Zeit $t = 0$ und $N(t)$ die Zahl der zur Zeit t vorhandenen Radiumatome.

a) Nach wieviel Tagen ist die Hälfte der anfangs vorhandenen Atome zerfallen (sog. Halbwertszeit)?

b) Wieviel Promille der Radiumatome sind nach 100 Tagen noch vorhanden?

15. Beim Element Radium 226 beträgt die Halbwertszeit 1620 Jahre.

a) Bestimme den Wert von c im Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 2^{ct}$ für Radium 226.

b) Wieviel Prozent einer Menge von Radium 226 sind
1) nach 1000 Jahren **2)** nach 2000 Jahren **3)** nach 10000 Jahren
noch vorhanden?

16. Im Jahre 1825 betrug die durchschnittliche wöchentliche Arbeitszeit der deutschen Arbeiter 82 Stunden! Die seitherige Entwicklung dieser Arbeitszeit wird näherungsweise durch die Funktion $x \mapsto T(x) = 82 \cdot 0,9955^{x-1825}$ beschrieben;* dabei bedeutet x die Jahreszahl und $T(x)$ die Anzahl der wöchentlichen Arbeitsstunden.

a) Welche Arbeitszeit ergibt sich danach für die Jahre 1875, 1960, 1980? (Die erhaltenen Werte stimmen gut mit den statistisch ermittelten überein.)

* W. Schmidt: *Mathematikaufgaben*, Klett-Verlag, 1984

b) Welche Arbeitszeit ergäbe sich daraus für das Jahr 2000? Erscheint sie dir realistisch?

17. In einem Zeitungskommentar zum Weltbevölkerungsbericht 1990 der UNO heißt es: »Heute leben 5,3 Milliarden Menschen auf der Erde, im Jahre 2000 werden es weit über 6 Milliarden sein.«*

a) Bei wieviel Promille jährlicher Zunahme würde die Weltbevölkerung bis zum Jahre 2000 auf 6,0 Milliarden anwachsen?

b) Es gibt Länder mit besonders hoher Wachstumsrate; z.B. betrug sie nach dem UNO-Bericht im Irak 3,4% pro Jahr. Wieviel Menschen würden im Jahre 2000 auf der Erde leben, wenn diese Rate weltweit gültig wäre?

6.2 Geometrische Folgen und Reihen

Die berühmte Anekdote von der Erfindung des Schachspiels** findet man zum erstenmal bei dem arabischen Historiker AL-JAQŪBI (um 880 n.Chr.). Er schreibt:

> Gelehrte Indiens behaupten, daß sich ein Rebell gegen Königin HAWSIN, die ein kluges Weib war, erhob. Da sandte sie einen Sohn aus [...], den der Rebell tötete. Das Volk ihres Reichs [...] scheute sich, es ihr zu sagen. Sie versammelten sich bei einem Weisen namens QAFLĀN. [...] Er sagte: »Wartet auf mich drei Tage.«

AL-JAQŪBI berichtet nun, daß und wie QAFLĀN in diesen drei Tagen das Schachspiel erfand und mit einem Schüler durchspielte, dem er dabei erklärte:

> »Das ist ein Krieg, ohne daß die Seelen davongehen.«

Und später heißt es dann bei AL-JAQŪBI:

> Der Königin wurde die Geschichte über QAFLĀN berichtet. Sie ließ ihn kommen und befahl ihm, ihr seine Weisheit zu zeigen. Er ließ seinen Schüler und das Schach kommen. [...] Einer von ihnen überwand seinen Gefährten [und sagte] »Schâh mât«. Die Königin verstand den Wink [...] und sagte zu QAFLĀN: »Mein Sohn ist getötet.« Er antwortete: »So ist es.« Da sagte sie zu ihrem Kämmerer: »Laßt die Leute zum Kondolenzbesuch herein.« Anschließend ließ sie QAFLĀN kommen und sagte ihm: »Verlange, was du wünschst.« Da antwortete QAFLĀN: »Ich bitte mir

* Süddeutsche Zeitung vom 25./26.8.1990

** Das Wort **Schach** ist persisch-arabischen Ursprungs. Es hat sich aus dem Ruf »Schah mat« – »Der König ist tot« – verselbständigt. Der Ursprung des Schachspiels liegt im Dunkeln der Geschichte. Angeblich soll 569 der chinesische Kaiser WU-TI (561–578) eine Art Orakel-Urschach erdacht haben, das von vier Personen zu spielen war. Verwandt damit ist das um 570 belegte indische *Tschatur-anga* – »Das Vierteilige« –, ein Kriegsspiel, bei dem die Figuren die vier Waffengattungen symbolisieren (Infanterie = Bauern, Kavallerie = Springer, Kriegswagen = Läufer, Kriegselefanten = Türme), mit denen bereits König POROS 326 v.Chr. am Fluß Hydaspes (heute Jhelum) ALEXANDER DEM GROSSEN entgegentrat. Ein mittelpersischer Roman aus der Zeit um 600 berichtet von seinem Helden ARDASCHIR, daß er geschickter sei als seine Gefährten im Ballspiel, Reiten und dem Schach – *Tschatrang*. Aus diesem Wort wird um 650 das arabische *Schatrandsch*. Um 850 entstand das erste arabische Schachbuch. Das Interesse für dieses Spiel muß sehr groß gewesen sein; denn verboten wurde es 1011 durch den Fatimidenkalifen AL-HAKIM (996–1021) in Kairo, 1212 auf dem Konzil zu Paris und 1254 von König LUDWIG IX. DEM HEILIGEN (*1214, reg. 1226–1270) von Frankreich.

Getreide zu geben entsprechend der Zahl der Felder des Schachbretts, und zwar so, daß mir auf das erste Feld ein Korn gegeben wird, [dann dieses mir auf dem zweiten Feld verdoppelt wird,] dann daß mir auf dem dritten Feld das Doppelte des zweiten gegeben wird und daß entsprechend dieser Rechnung bis zum letzten Feld fortgefahren wird.«*

Die Fortsetzung dieses Berichts wollen wir noch etwas zurückstellen und uns überlegen, wieviel Körner auf die einzelnen Felder des Schachbretts treffen. Man erhält folgenden Tabellenanfang:

Nummer des Feldes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Zahl der Körner	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...

Die vollständige Tabelle enthält also in der ersten Zeile die natürlichen Zahlen von 1 bis 64; darunter stehen die Zweierpotenzen 2^0, 2^1, 2^2, ... bis 2^{63}. Es handelt sich um die ausführliche Beschreibung einer Funktion mit der Definitionsmenge $D = \{1, 2, 3, \ldots, 64\}$; jeder Zahl $n \in D$ wird der Funktionswert 2^{n-1} zugeordnet. Diese Funktion kann man sich aus der Exponentialfunktion $x \mapsto 2^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$, dadurch entstanden denken, daß man die Definitionsmenge auf $\{1, 2, 3, \ldots, 64\}$ einschränkt. Daß man hier nur die natürlichen Zahlen bis 64 verwendet, hängt mit der Felderzahl des Schachbretts zusammen. Man kann sich aber die Tabelle ohne Ende fortgesetzt denken, so daß die Definitionsmenge der entsprechenden Funktion die ganze Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist. Solche Funktionen treten in der Mathematik häufig auf; man verwendet für sie besondere Bezeichnungen:

Definition 134.1: Eine Funktion mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$ heißt **Zahlenfolge**. Den der Zahl n zugeordneten Funktionswert bezeichnet man mit a_n und nennt ihn das n-te **Glied** der Zahlenfolge.**

In unserem Beispiel gilt also:

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, ..., allgemein $a_n = 2^{n-1}$.

Offensichtlich kann man aus jeder Funktion, deren Definitionsmenge alle natürlichen Zahlen enthält, eine Zahlenfolge gewinnen, indem man die Definitionsmenge auf $\mathbb{N}$ reduziert.

Beispiel 1:

Aus $f\colon x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$, erhält man die Zahlenfolge $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, ..., also die Folge der Quadratzahlen.

Beispiel 2:

Aus $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, erhält man die Zahlenfolge $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, ..., also die Folge der Stammbrüche.

* Noch heute heißen die Schachfelder im Indischen und Persischen Kornkammern.

** Diese Definition stammt von Giuseppe Peano (1858–1932) aus seinem *Formulaire de mathématiques*, II-§1, von 1897.

Die zu unserem Schachproblem gehörende Zahlenfolge entspricht, wie wir schon feststellten, einer Exponentialfunktion. Mit solchen Zahlenfolgen wollen wir uns hier genauer befassen. Weitere Beispiele dazu sind

Beispiel 3:
Aus $f\colon x \mapsto 2 \cdot 3^x$, $x \in \mathbb{R}$, erhält man die Zahlenfolge $a_1 = 6$, $a_2 = 18$, $a_3 = 54$, $a_4 = 162$, …, allgemein $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$.

Beispiel 4:
Aus $f\colon x \mapsto 100 \cdot 0{,}5^x$, $x \in \mathbb{R}$, erhält man die Zahlenfolge $a_1 = 50$; $a_2 = 25$; $a_3 = 12{,}5$; $a_4 = 6{,}25$; …; allgemein $a_n = 50 \cdot 0{,}5^{n-1}$.

Man erkennt, daß die Glieder dieser Zahlenfolgen sich einfach dadurch ergeben, daß man, ausgehend von $a_1 \neq 0$, immer wieder mit einem Faktor q, nämlich der Basis der Exponentialfunktion, multipliziert. Zur Vereinfachung bezeichnen wir im folgenden das 1. Glied mit a. Damit gilt:

$a_1 = a, \quad a_2 = a \cdot q, \quad a_3 = a_2 q = a \cdot q^2, \quad a_4 = a_3 q = a \cdot q^3, \ldots;$
allgemein gilt also $a_n = a \cdot q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Die Zahl q kann auch als Quotient aufeinanderfolgender Glieder gedeutet werden:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots, \text{ also } q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Bei solchen Zahlenfolgen besteht auch eine interessante Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden Gliedern:

$$\text{Aus } \quad q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{folgt} \quad a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}};$$

daher ist $|a_n|$ das geometrische Mittel aus den beiden Nachbargliedern. Diese Eigenschaft erklärt die für solche Zahlenfolgen übliche Bezeichnung:

Definition 135.1: Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit dem Bildungsgesetz $a_n = a \cdot q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $q \neq 0$, $q \neq 1$) heißt **geometrische Folge**. a ist das **Anfangsglied** und q der **Quotient** der geometrischen Folge.

In Beispiel 3 handelt es sich also um die geometrische Folge mit dem Anfangsglied 6 und dem Quotienten 3, in Beispiel 4 um die geometrische Folge mit dem Anfangsglied 50 und dem Quotienten 0,5.

Zurück zur Schachbrettaufgabe! Die Anzahlen der Körner auf den einzelnen Feldern sind die ersten 64 Glieder der geometrischen Folge mit $a = 1$ und $q = 2$. Die Gesamtzahl der Körner, die der Erfinder des Schachspiels als Lohn verlangte, ist die Summe aus diesen 64 Folgegliedern:

$s_{64} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{64} = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{63}.$

So viele Körner sollte also QAFLĀN erhalten! Die Fortsetzung des Berichts von Seite 134 lautet:

> Da sagte sie: »Und wieviel macht das aus?« Hierauf befahl sie, daß der Weizen herbeigebracht werde. Und er reichte nicht aus, selbst als die Getreidevorräte des Landes erschöpft waren; dann wurde das Korn in Geld umgewertet, bis der Schatz erschöpft war. Da dies nun viel war, sagte er: »Ich brauche das nicht, mir genügt eine geringe Menge von irdischem Gut.« Dann fragte sie ihn nach der Zahl der Körner, die er verlangt hatte.

Offenbar muß man sich also beim Versuch, s_{64} zu berechnen, auf Schwierigkeiten gefaßt machen. Es handelt sich hier allgemein um das Problem, die Summe aus den ersten n Gliedern einer geometrischen Zahlenfolge zu bestimmen. Man bezeichnet eine solche Summe als endliche geometrische Reihe.

Definition 136.1: Die Summe $a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^{n-1}$ $(a \neq 0,\ q \neq 0,\ q \neq 1)$ heißt **endliche geometrische Reihe**, der mit s_n bezeichnete Summenwert heißt **Wert der Reihe**.

Da die Bestimmung des Reihenwertes durch gliedweises Addieren im allgemeinen sehr mühsam sein dürfte, empfiehlt es sich, nach einer Formel für die Summe zu suchen. Eine solche läßt sich für endliche geometrische Reihen tatsächlich leicht gewinnen. Man benützt z. B. die Tatsache, daß im Produkt $q \cdot s_n$ viele der in s_n enthaltenen Summanden wieder auftreten:

$$s_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^{n-1} \qquad \text{(I)}$$

$$q \cdot s_n = \phantom{a +{}} a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n \qquad \text{(II)}$$

Bildet man nun die Differenz aus den Gleichungen (I) und (II), so fallen alle untereinanderstehenden Glieder weg, und man erhält

$s_n(1-q) = a \cdot (1-q^n)$. Wegen $q \neq 1$ ergibt sich

$$s_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{oder auch} \quad s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}. \qquad \text{(III)}$$

Ein anderer Weg zur Herleitung dieser Summenformel ergibt sich aus der auf Seite 44 bewiesenen Gleichung (■)

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Setzt man $a = 1$ und $b = q$, so erhält man

$$1 - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}),$$

woraus für $q \neq 1$ die Beziehung

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{folgt.}$$

Da $s_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots + a \cdot q^{n-1} = a \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$ gilt, erhält man wieder das Ergebnis (III), das wir schon bei EUKLID – natürlich anders formuliert – als Satz 35 in Buch IX seiner *Elemente* finden.

Satz 137.1: Die endliche geometrische Reihe

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots + a \cdot q^{n-1} \quad (a \neq 0,\ q \neq 0,\ q \neq 1)$$

hat den Wert $s_n = a \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Damit sind wir nun in der Lage, die von QAFLĀN geforderte Zahl von Weizenkörnern anzugeben. Mit $a = 1$ und $q = 2$ gilt:

$$s_{64} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$$

QAFLĀN hat allerdings seine Antwort etwas umständlicher formuliert. Der Bericht schließt so:

Da sagte er: […]
»Die Gesamtsumme auf dem Schachbrett ist 18 446 744 073 709 551 615.«

Aufgaben

1. Wie heißen die ersten fünf Glieder der geometrischen Folge mit

a) $a = 5;\ q = 2$ **b)** $a = -3;\ q = \frac{1}{2}$ **c)** $a = 1;\ q = -2$
d) $a = 10;\ q = -0{,}2$ **e)** $a = 8;\ q = \sqrt{2}$ **f)** $a = -8;\ q = -\sqrt[3]{3}$.

2. Bestimme a und q für die geometrische Folge mit

a) $a_2 = -4;\ a_3 = 16$ **b)** $a_3 = 4;\ a_4 = 2$
c) $a_2 = 0{,}25;\ a_4 = 2{,}25$ **d)** $a_3 = -3;\ a_6 = 24$.

Ist die Lösung jeweils eindeutig?

3. Zeichne den Graphen der Zahlenfolge für $n \leqq 10$.

a) $a_n = 1{,}2^{n-1}$ **b)** $a_n = 2(-1{,}2)^{n-1}$
c) $a_n = 5 \cdot 0{,}5^{n-1}$ **d)** $a_n = -8(-0{,}8)^{n-1}$

4. Etwas älter als die Textstelle aus dem *Papyrus Rhind*, die wir in Aufgabe 19/**26** behandelt haben, ist das Problem der altbabylonischen Keilschrifttafel SKT 362 (um 1900 v. Chr.):
Eine Strecke, 1 Elle 1 Finger lang, immer um sich selbst verdoppelst du und bildest die volle Summe. […] Bis 1 GAR $3\frac{1}{2}$ Ellen bin ich gegangen.
[6 m = 1 GAR = 12 Ellen; 1 Elle = 30 Finger]
Aus der im Text angegebenen Lösung ergibt sich die Frage: Aus wieviel Stücken ist die Gesamtstrecke zusammengesetzt?

5. Beim DIN-Papierformat sind Länge l und Breite b (mit $l > b$) so aufeinander abgestimmt, daß durch Halbieren der Länge (z. B. durch Falten) ein dem ganzen Blatt ähnliches kleineres Rechteck entsteht.*

a) Zeige, daß bei den durch fortgesetztes Halbieren der jeweiligen Längen entstehenden Rechtecken sowohl die Längen als auch die Breiten eine geometrische Folge bilden. Wie groß sind die Quotienten?

b) Das Format DIN A0 ist ein Rechteck mit $1\,\text{m}^2$ Flächeninhalt. Durch fortgesetztes Halbieren entstehen daraus die Formate A1, A2, A3, ...

1) Bestimme Länge und Breite des Formats A0.

2) Berechne Länge, Breite und Flächeninhalt des Formats DIN A4 (großes Heftformat) und DIN A5 (kleines Heftformat).

6. Ein Blatt Papier, das 0,1 mm dick ist, wird n-mal gefaltet. Wie dick ist der entstehende Stapel für **a)** $n = 5$ **b)** $n = 10$ **c)** $n = 15$?

7. Berechne den Wert s_n der geometrischen Reihe:

a) $a = 1$; $q = 2$; $n = 5$ **b)** $a = 1$; $q = 2$; $n = 10$

c) $a = 10$; $q = 0{,}5$; $n = 5$ **d)** $a = 10$; $q = 0{,}5$; $n = 10$

e) $a = 5$; $q = -1$; $n = 10$ **f)** $a = 5$; $q = -1$; $n = 11$

8. a) Das fünfte Glied einer geometrischen Folge mit $q = 1{,}5$ heißt 20,25. Berechne s_5.

b) Das erste Glied einer geometrischen Folge heißt 100, das vierte Glied $-12{,}5$. Berechne s_{10}.

c) Die Summe aus den ersten fünf Gliedern einer geometrischen Folge mit $q = 0{,}6$ hat den Wert 288,2. Wie heißt der letzte Summand?

• **d)** Die Summe der ersten drei Glieder einer geometrischen Folge ist 7, der letzte Summand heißt 1. Berechne die beiden anderen Summanden.

: 9. Aufgabe 28 aus Kapitel LXVI der *Practica Arithmeticae* (1539) des Geronimo Cardano (1501–1576), die 1544 Michael Stifel (1487?–1567) in seine *Arithmetica integra* (fol. 304r) übernimmt:
Die ersten drei Zahlen einer geometrischen Folge mit positivem Anfangsglied haben folgende Eigenschaft: Dividiert man 25 durch jedes Glied und addiert die drei Quotienten, dann erhält man sowohl die Summe der drei Glieder wie auch ihr Produkt. Wie heißen sie?

⋮ 10. Aus fol. 313r der *Arithmetica integra* (1544) des Michael Stifel:
Die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge mit positivem Quotienten ergeben zusammen 119. Multipliziert man die Summe des ersten und dritten Gliedes mit der Summe aus den Differenzen des dritten und zweiten bzw. des zweiten und ersten Gliedes, so ergibt sich 4335. Wie heißen die Glieder?

* Dieses Papierformat wurde 1922 vom Normenausschuß für die Deutsche Industrie durch das Normenblatt DIN 476 festgelegt. Die Idee dazu hatte 1911 der Chemiker (Nobelpreis 1909) und Philosoph Wilhelm Ostwald (2.9.1853 Riga–4.4.1932 Großbothen bei Leipzig).

11. Aufgabe 83 aus Kapitel LXVI der *Practica Arithmeticae* (1539) des Geronimo Cardano (1501–1576), die 1544 Michael Stifel (1487?–1567) in seine *Arithmetica integra* (fol. 301 v) übernimmt:
Die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge genügen folgender Eigenschaft: Teilt man die Summe aus jeweils zweien von ihnen durch das übrige Glied und addiert die drei entstandenen Quotienten, dann ergibt sich 13. Wie lauten die Glieder?

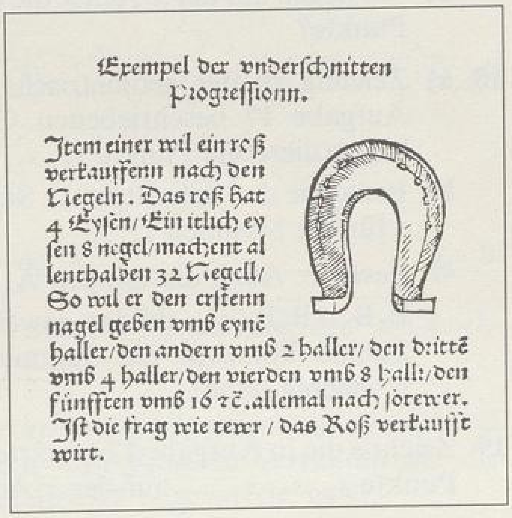
12. Lise und Fritz hat die Geschichte von dem Erfinderlohn für das Schachspiel sehr beeindruckt.

a) Fritz sagt: »Wenn ich der Erfinder gewesen wäre, hätte ich mir für das 1. Feld 1 Million DM, für das 2. die Hälfte davon, usw. auszahlen lassen.« Wie groß wäre dann sein Lohn gewesen?

b) Lise wendet ein: »Das könnte man doch gar nicht richtig auszahlen; da kommen ja Felder vor, denen weniger als 1 Pfennig entspricht.« Zeige, daß sie recht hat. Um welche Felder handelt es sich? (*Hinweis*: Berechne zuerst a_{20} und a_{30}.)

c) Darauf meint Fritz: »Auf Pfennigbeträge würde ich sowieso verzichten und nur das Geld von den Feldern nehmen, auf die ganze DM-Beträge entfallen.« Wie groß wäre dann sein Erfinderlohn? Auf welche Summe würde er verzichten?

13. Das Schema der Schachbrettaufgabe wurde vielfach auf andere Situationen übertragen. Das nebenstehende Beispiel stammt aus der 1527 in Ingolstadt erschienenen Schrift *Eyn Newe Vnnd wolgegründte vnderweysung aller Kauffmannß Rechnung* des Peter Apian (1495–1552), den 1541 Kaiser Karl V. (*1500; 1519 bis 1556; †1558) in den Adelsstand erhob und zu seinem *mathematicus seu astronomus familiaris* machte. Er bekleidete auch das Amt eines Hofpfalzgrafen.


Exempel der vnderschnitten Progressionn.
Item einer wil ein roß verkauffenn nach den Negeln. Das roß hat 4 Eysen/ Ein iglich eysen 8 negel/ machent allenthalben 32 Negell/ So wil er den erstenn nagel geben vmb eynẽ haller/ den andern vmb 2 haller/ den drittẽ vmb 4 haller/ den vierden vmb 8 hall:/ den fünfften vmb 16 rc. allemal nach sorever. Ist die frag wie tewr / das Roß verkaufft wirt.

14. Auch Kinderreime enthalten gelegentlich mathematische Probleme, wie das Beispiel aus England zeigt. Es handelt sich dabei um eine Aufgabe, die in ähnlicher Form schon im altägyptischen *Papyrus Rhind* vorkommt (siehe Aufgabe 19/**26**).

As I was going to Saint Ives,
I met a man with seven wives,
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits;
Kits, cats, sacks and wives,
How many were there going to
Saint Ives?

15. Gegeben ist die geometrische Folge mit $a=1$ und $q=\frac{1}{2}$.

a) Berechne die Summen s_5, s_{10}, s_{15} und s_{20}.

b) Wird s_n mit wachsendem n immer größer? Wird es beliebig groß? Gibt es eine Zahl, der sich s_n beliebig nähert, wenn n immer größer wird?

16. Löse Aufgabe **15** für die geometrische Folge mit

1) $a=1;\ q=1{,}5$ **2)** $a=8;\ q=-0{,}6$ **3)** $a=0{,}2;\ q=1{,}1$.

17. Die geometrische Folge mit Anfangsglied a und Quotient q sowie ihre Summen s_n kann man in einem Koordinatensystem mit Hilfe der Geraden g: $y=qx$ und h: $y=x-a$ veranschaulichen, indem man, wie Abbildung 140.1 zeigt, den zwischen g und h verlaufenden Streckenzug $OA_1B_1A_2B_2A_3\ldots$ zeichnet; die Teilstrecken sind abwechselnd parallel zur x- bzw. y-Achse.

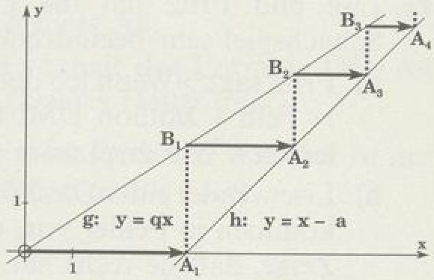


Abb. 140.1 Zu Aufgabe **17**

a) Zeige, daß die zur x-Achse parallelen Pfeile $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{B_1A_2}$, ... die Zahlen a, aq, aq^2, ... darstellen.

b) Wo liegen auf der x-Achse die den Zahlen s_1, s_2, s_3, ... entsprechenden Punkte?

18. a) Zeichne zu der geometrischen Folge mit $a=10$ und $q=\frac{1}{2}$ die in Aufgabe **17** beschriebenen Geraden g und h für $0 \leqq x \leqq 20$ und konstruiere die Punkte s_1, s_2, s_3, ... auf der x-Achse.

b) Berechne den Schnittpunkt $S(s|t)$ von g und h. Welche Bedeutung hat s für die Summen s_n?

c) Beweise: Auch die Längen $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ... und ebenso $\overline{OB_1}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, ... bilden jeweils eine geometrische Folge. Welchen Zahlen kommen die Summen s_n dieser Folgen mit wachsendem n beliebig nahe?

19. Zeichne die in Aufgabe **17** erklärten Geraden g und h und konstruiere die Punkte s_1, s_2, s_3, ... auf der x-Achse für

a) $a=1;\ q=2$ **b)** $a=9;\ q=-\frac{1}{2}$

c) $a=2;\ q=-1{,}5$.

Wie verhalten sich jeweils die Summen s_n mit wachsendem n?

20. In Abbildung 140.2 ist g die Gerade mit der Gleichung $y=\frac{2}{3}x$ und h das Lot zu g durch $A(9|0)$. Die Strecken a_i sind parallel zur x- bzw. y-Achse.

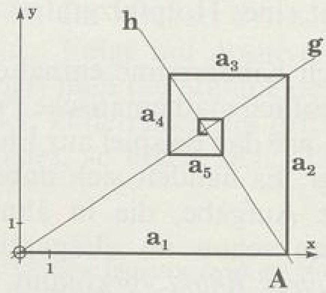


Abb. 140.2 Zu Aufgabe **20**

a) Beweise, daß die Längen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine geometrische Folge bilden.

b) Wie groß ist die Gesamtlänge der ersten n Abschnitte der »eckigen Spirale«? Welchem Wert kommt diese Länge mit wachsendem n beliebig nahe?

c) Jede Strecke a_i schließt mit g und h ein rechtwinkliges Dreieck ein. Bilden die Flächeninhalte A_i dieser Dreiecke ebenfalls eine geometrische Folge?

21. Ausgehend von einer Strecke [AB] der Länge l_1 erzeugt man neue Streckenzüge, indem man über dem mittleren Drittel der Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichtet und dann dieses Drittel wegnimmt. Beim nächsten Schritt wird dieses Verfahren auf jede der vier Teilstrecken angewandt, usw. (vgl. Abbildung 141.1).

a) Zeige, daß die Längen l_i der so entstehenden Streckenzüge eine geometrische Folge bilden.

b) Berechne l_{10}, l_{50}, l_{100} in Abhängigkeit von l_1. Wie verhält sich l_n mit wachsendem n?

c) Wenn man sich dieses Konstruktionsverfahren ohne Ende fortgesetzt denkt, nähern sich die Streckenzüge einer bestimmten, von A nach B verlaufenden Kurve, die man als **Von-Koch-Kurve** bezeichnet.* Was ist über die »Länge« dieser Kurve zu sagen?

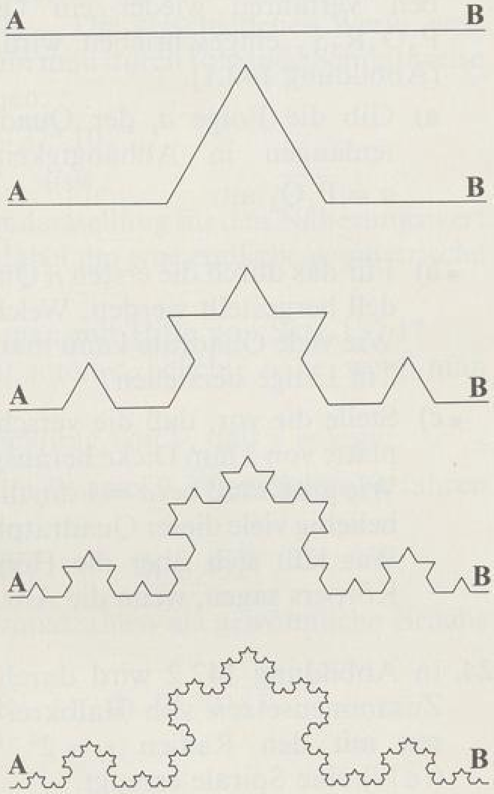


Abb. 141.1 Erzeugung der Von-Koch-Kurve

22. Über dem mittleren Drittel einer Strecke wird ein Quadrat konstruiert und dann dieses Drittel entfernt. Danach wird dasselbe Verfahren auf die Teilstrecken des entstandenen Streckenzuges angewandt, usw.

a) Zeichne, beginnend mit einer Strecke [AB] der Länge $l_1 = 9\,\text{cm}$ die nächsten drei daraus entstehenden Streckenzüge; laß dabei die »quadratischen Höcker« abwechselnd nach links und rechts aus dem (von A nach B durchlaufenen) Streckenzug herauswachsen.

* Nils Fabian Helge von Koch (25.1.1870 Stockholm – 11.3.1924 Danderyd bei Stockholm) zeigte mit dieser Kurve, daß es stetige Kurven gibt, die an keiner Stelle eine Tangente besitzen. Sein Artikel *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire* erschien 1904 im Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, **1**, Stockholm, und wurde 1906 in einer erweiterten Fassung unter dem Titel *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes* in den Acta mathematica, **30**, Stockholm, veröffentlicht.

b) Berechne die Längen l_2, l_3 und l_4 der gezeichneten Streckenzüge und begründe, daß die Funktion $n \mapsto l_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine geometrische Folge ist, deren Glieder beliebig groß werden.

23. Die Seitenmitten eines Quadrats $P_1Q_1R_1S_1$ sind die Ecken eines Quadrats $P_2Q_2R_2S_2$, dem nach demselben Verfahren wieder ein Quadrat $P_3Q_3R_3S_3$ eingeschrieben wird, usw. (Abbildung 142.1).

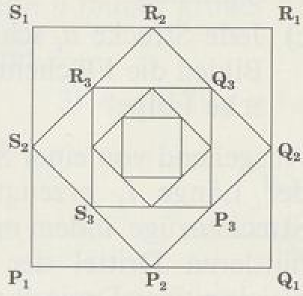


Abb. 142.1 Zu Aufgabe **23**

a) Gib die Folge a_i der Quadratseitenlängen in Abhängigkeit von $a = \overline{P_1Q_1}$ an.

• **b)** Für das durch die ersten n Quadrate gebildete Netz soll ein Fadenmodell hergestellt werden. Welche Fadenlänge l_n ist dazu notwendig? Wie viele Quadrate kann man im Fall $a = 1$ dm mit einem Faden von 2 m Länge herstellen?

• **c)** Stelle dir vor, daß die verschiedenen Quadrate aus einer Sperrholzplatte von 5 mm Dicke herausgesägt und aufeinandergestapelt werden. Wie groß muß bei $a = 1$ dm die Sperrholzplatte mindestens sein, damit beliebig viele dieser Quadratplatten aus ihr hergestellt werden können? Was läßt sich über die Höhe und das Volumen des entstehenden Körpers sagen, wenn die Anzahl n der Schichten immer größer wird?

24. In Abbildung 142.2 wird durch Zusammensetzen von Halbkreisen mit den Radien $r_i = 2^{1-i}$ $(i \in \mathbb{N})$ eine Spirale erzeugt.

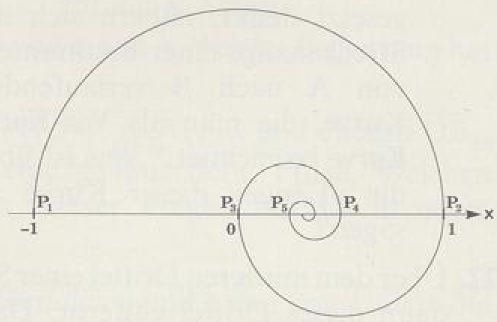


Abb. 142.2 Zu Aufgabe **24**

a) Wie groß sind die Längen l_i der Halbkreisbögen? Welche Länge L_n hat der aus den ersten n Halbkreisen bestehende Teil der Spirale? Wird mit unbeschränkt wachsendem n die Spiralenlänge beliebig groß, oder gibt es einen »Grenzwert« für L_n? Wenn ja, wie heißt er?

• **b)** Bestimme die den Punkten P_n entsprechenden Zahlen x_n. Zeige, daß diese Punkte mit wachsendem n gegen einen »Grenzpunkt« streben. Welche Zahl entspricht ihm? (*Hinweis*: Betrachte getrennt die Folgen der Punkte mit geradem und mit ungeradem Index.)

• **c)** Je zwei Halbkreise mit den Radien r_i und r_{i+2} begrenzen zusammen mit der x-Achse ein sichelförmiges Flächenstück. Wie groß ist dessen

Inhalt A_i? Welchen Wert hat die Summe $S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$? Welcher Zahl kommt S_n mit wachsendem n beliebig nahe? Wie kann man dieses Ergebnis einfacher gewinnen?

d) Löse die Teilaufgaben **a)**, **b)** und **c)** für folgende Halbkreisradien:
1) $r_i = (\frac{3}{4})^{i-1}$ **2)** $r_i = 0{,}9^{i-1}$ **3)** $r_i = 0{,}99^{i-1}$

• 25. Zu der reinperiodischen Dezimalzahl $z = 0{,}\overline{37}$ erhält man eine Folge von Näherungsbrüchen, wenn man nach der 1., 2., 3., ... Periode abbricht: $z_1 = 0{,}37$; $z_2 = 0{,}3737$; $z_3 = 0{,}373737$; ... Die verschiedenen Werte, welche die Periode 37 jeweils darstellt, kann man durch folgende Schreibweise für die Näherungsbrüche verdeutlichen:
$z_1 = 37 \cdot 10^{-2}$, $\quad z_2 = 37 \cdot 10^{-2} + 37 \cdot 10^{-4}$,
$z_3 = 37 \cdot 10^{-2} + 37 \cdot 10^{-4} + 37 \cdot 10^{-6}$, usw.

a) Wie lautet allgemein diese Summendarstellung für den Näherungswert z_n $(n \geqq 2)$? Begründe, daß es sich dabei um eine endliche geometrische Reihe handelt.

b) Welche Darstellung für z_n erhält man mit Hilfe von Satz 137.1? Welcher rationalen Zahl y kommt somit z_n beliebig nahe, wenn man n unbeschränkt wachsen läßt?
Zeige an Hand der Dezimalentwicklung von y, daß $y = z$ gilt.

c) Bestimme nach dem in **a)** und **b)** am Beispiel $0{,}\overline{37}$ gezeigten Verfahren die Bruchschreibweise für
1) $0{,}\overline{7}$ **2)** $0{,}\overline{06}$ **3)** $0{,}\overline{481}$ **4)** $0{,}\overline{4321}$.

26. Stelle die folgenden unendlichen Dezimalzahlen als gewöhnliche Brüche dar (vgl. Aufgabe **25**):
a) $3{,}\overline{15}$ **b)** $0{,}0\overline{6}$ **c)** $0{,}5\overline{18}$ **d)** $10{,}70\overline{185}$

**6.3 Arithmetische Folgen und Reihen

Einen besonders einfachen Typ einer Zahlenfolge erhält man, wenn man bei einer linearen Funktion die Definitionsmenge auf $\mathbb{N}$ einschränkt.

Beispiele:

1) $f\colon x \mapsto 3x - 1$ ergibt die Zahlenfolge
$a_1 = 2$; $a_2 = 5$; $a_3 = 8$; $a_4 = 11$; ...; also $a_n = 3n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $f\colon x \mapsto -1{,}5x + 3$ ergibt die Zahlenfolge
$a_1 = 1{,}5$; $a_2 = 0$; $a_3 = -1{,}5$; $a_4 = -3$; ...; also $a_n = -1{,}5n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Als typisches Merkmal dieser Folgen erkennt man die Eigenschaft, daß die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist; es handelt sich bei ihr jeweils um den Koeffizienten von x in der entsprechenden linearen Funktion.

Bezeichnen wir wie üblich das Anfangsglied der Folge mit a und die Differenz mit d, so gilt
$a_1 = a,\quad a_2 = a + d,\quad a_3 = a_2 + d = a + 2d,\quad a_4 = a_3 + d = a + 3d, \ldots,$
allgemein also $a_n = a + (n-1)d,\ n \in \mathbb{N}$.
Für drei aufeinanderfolgende Glieder einer solchen Folge ergibt sich (vgl. Aufgabe 145/**2**):

$$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} \quad \text{und damit} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Das mittlere von drei aufeinanderfolgenden Gliedern ist damit das arithmetische Mittel der Nachbarglieder. Das erklärt den für solche Zahlenfolgen verwendeten Namen:

> **Definition 144.1:** Eine Zahlenfolge mit dem Bildungsgesetz $a_n = a + (n-1)d,\ n \in \mathbb{N}$, heißt **arithmetische Folge** mit dem **Anfangsglied** a und der **Differenz** d.

Bei vielen Anwendungen benötigt man die Summe aus den ersten n Gliedern einer arithmetischen Folge. Dazu gilt

> **Definition 144.2:**
> Die Summe $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + (n-1)d)$ heißt **arithmetische Reihe**, der mit s_n bezeichnete Summenwert heißt **Wert der arithmetischen Reihe**.

Für die Berechnung von s_n läßt sich leicht eine Summenformel herleiten:

Aus $s_n = a + (a+d) + \ldots + (a + (n-2)d) + (a + (n-1)d)$
und $s_n = (a + (n-1)d) + (a + (n-2)d) + \ldots + (a+d) + a$

folgt durch Addition dieser Gleichungen, bei der wir jeweils die beiden untereinanderstehenden Summanden zusammenfassen, die Beziehung

$$2s_n = (2a + (n-1)d) + (2a + (n-1)d) + \ldots + (2a + (n-1)d),$$

also $2s_n = (2a + (n-1)d) \cdot n$,

d.h., $s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$.

Da der zweite Faktor als die Summe $a_1 + a_n$ gedeutet werden kann, gilt auch
$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

> **Satz 144.1:** Die arithmetische Reihe $a + (a+d) + \ldots + (a + (n-1)d)$ hat den Wert $s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Beispiele:

3) Bei der arithmetischen Folge mit $a = 2$ und $d = 3$ (Beispiel **1)**) gilt

$a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 29$, $a_{500} = 2 + 499 \cdot 3 = 1499$,

$s_{10} = \frac{10}{2}(2 + 29) = 155$, $s_{500} = \frac{500}{2}(2 + 1499) = 375250$.

4) Bei der arithmetischen Folge mit $a = 1{,}5$ und $d = -1{,}5$ (Beispiel **2)**) gilt

$a_{20} = 1{,}5 + 19 \cdot (-1{,}5) = -27$, $s_3 = \frac{3}{2}(2 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot (-1{,}5)) = 0$,

$s_{30} = \frac{30}{2}(2 \cdot 1{,}5 + 29 \cdot (-1{,}5)) = -607{,}5$.

Aufgaben

1. Gib für die arithmetische Folge mit Anfangsglied a und Differenz d die ersten vier Glieder an und berechne a_{20}:

a) $a = 0$; $d = 2$ **b)** $a = 10$; $d = -1$ **c)** $a = -16$; $d = 2{,}5$

2. Beweise, daß bei einer arithmetischen Folge für je drei aufeinanderfolgende Glieder die Beziehung $a_{n+1} = (a_n + a_{n+2}) : 2$ gilt.

3. Berechne für die Zahlenfolgen von Aufgabe **1** die Summen s_{20} und s_{100}.

4. Bestimme Anfangsglied und Differenz der arithmetischen Folge aus

a) $a_2 = 5$; $a_3 = -1$ **b)** $a_4 = 1{,}6$; $a_7 = 4$ **c)** $a_5 = -\frac{5}{12}$; $a_{20} = 3\frac{1}{3}$.

5. Zwischen 25 und 64 sollen

a) zwei Zahlen **b)** vier Zahlen **c)** zwölf Zahlen

so eingefügt werden, daß eine arithmetische Folge entsteht.

6. Berechne Anfangsglied a und Differenz d der arithmetischen Folge mit

a) $a_2 = 5{,}5$; $s_4 = 25$ **b)** $a_3 = 4$; $s_5 = 20$ (!)

c) $a_5 = 5$; $s_5 = 0$ **d)** $s_3 = 13{,}5$; $s_{15} = -67{,}5$.

7. Aufgabe 64 aus dem *Papyrus Rhind* (um 1800 v. Chr. entstanden): 100 Scheffel Gerste werden so an 10 Leute verteilt, daß der jeweils nächste $\frac{1}{8}$ Scheffel mehr erhält als sein Vorgänger. Wieviel erhält jeder?

• **8.** Eine der frühesten Aufgaben über arithmetische Folgen findet man auf der altbabylonischen Keilschrifttafel SKT 362 (um 1900 v. Chr.):
10 Brüder; $1\frac{2}{3}$ Minen Silber. Bruder über Bruder hat sich erhoben. Um was er sich erhoben hat, weiß ich nicht. Der Anteil des achten Bruders ist 6 Schekel. Bruder über Bruder, um wieviel hat er sich erhoben?
Berechne den Anteil des ersten Bruders und den konstanten Unterschied zum jeweils nächsten. [60 Schekel = 1 Mine = 0,505 kg]

9. Aufgabe 40 aus dem *Papyrus Rhind* (um 1800 v. Chr. entstanden) läßt zwei Deutungen zu:
100 Brote werden in arithmetischer Folge so an 5 Leute verteilt, daß

a) die beiden ersten zusammen $\frac{1}{7}$ dessen erhalten, was die drei letzten zusammen erhalten.

b) die beiden letzten zusammen $\frac{1}{7}$ dessen erhalten, was die drei ersten zusammen erhalten.

Wie groß ist der Unterschied vom einen zum anderen, und wie wurden die Brote verteilt?

10. Sind folgende Merkregeln für die Berechnung des Wertes s_n einer arithmetischen Reihe richtig?

a) »halbe Anzahl der Glieder mal (erstes Glied plus letztes Glied)«

b) »n-mal erstes Glied plus $n(n-1)$-mal halbe Differenz«

11. Achte bei den folgenden Aufgaben darauf, ob die Lösung eindeutig ist.

a) Eine arithmetische Reihe mit Anfangsglied -3 und Differenz 2 hat den Wert 60. Wie groß ist die Anzahl n ihrer Summanden?

b) Bestimme $n \in \mathbb{N}$ so, daß bei einer arithmetischen Folge mit $a = -6$ und $d = 1{,}5$ die Summe s_n den Wert $-10{,}5$ erhält.

c) Bei einer arithmetischen Reihe mit dem Wert 28,8 heißt der erste Summand 9 und der sechste 3. Wieviel Summanden hat die Reihe?

12. a) Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) bestimmte schon als Neunjähriger zur Überraschung seines Lehrers J. G. BÜTTNER in kürzester Zeit den Summenwert einer arithmetischen Reihe.* Es soll sich um $s_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$ gehandelt haben, was GAUSS als das Produkt $50 \cdot 101$ berechnet habe. Begründe sein Vorgehen.

b) Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 10^4.

c) Wie groß ist die Summe aller höchstens dreistelligen Vielfachen von 7?

13. a) Berechne die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$.

b) Bestimme den Wert der Summe $S_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n}{n}$; $n \in \mathbb{N}$.

c) Berechne $T_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$. Wie verhält sich T_n mit wachsendem n?

d) Berechne $U_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2}$; $n \in \mathbb{N}$.

* Wolfgang SARTORIUS FREIHERR VON WALTERSHAUSEN (1809–1876) zeichnete viele Gespräche mit GAUSS, zum Teil wörtlich, auf und gab sie 1856 unter dem Titel *Gauß zum Gedächtnis* heraus. Darin berichtet er, daß GAUSS dieses Ereignis »uns in seinem hohen Alter mit großer Freude und Lebhaftigkeit öfter erzählt hat.« Und daß, als BÜTTNER schließlich die Ergebnisse prüfte, »das seinige zum Staunen aller Anwesenden als richtig befunden, während viele der übrigen falsch waren«. – Getauft wurde GAUSS übrigens auf *Johann Friderich Carl*; so trug er sich auch noch, nur mit anderer Schreibweise des mittleren Namens, am 18. 2. 1792 in die Matrikel des Collegium Carolinum zu Braunschweig ein.

14. In einem Stapel von Rohren liegen in der untersten Schicht 12 Rohre, in der obersten 5 Rohre. Aus wieviel Rohren besteht der ganze Stapel, wenn die Rohre wie üblich »auf Lücke« übereinandergeschichtet sind? Wieviel Rohre könnte man noch auf den Stapel legen, ohne die Basis zu verbreitern?

15. Eine trapezförmige Dachfläche soll mit Ziegeln gedeckt werden. Für die erste Reihe benötigt man 64, für die letzte 30 Dachziegel. Es sind 18 Reihen. Wieviel Paletten zu je 100 Ziegeln wird man bestellen, wenn man 5% Verlust durch Bruch einkalkuliert?

16. Aus der *Stereometrica* des Heron von Alexandria (um 62 n.Chr.):

a) Aufgabe 43: In einem Theater mit 250 Sitzreihen enthält die unterste 40 Sitze, jede höhere jeweils 5 Sitze mehr. Wieviel Sitze enthält die oberste Reihe?

b) Die Aufgabe 42 »In einem Theater mit 280 Sitzreihen hat die unterste 120, die oberste 480 Sitze. Wieviel Sitze hat das Theater insgesamt?« löst Heron durch folgende Rechnung:
$\frac{480+120}{2} \cdot 280 = 8400$. Nimm dazu kritisch Stellung.

17. Wenn ein dünnes Maßband auf einen Zylinder aufgerollt ist, kann man die einzelnen Windungen mit guter Näherung als Kreise betrachten.

a) Wieviel mm beträgt der Durchmesser einer Trommel, auf die ein Maßband von $\frac{1}{4}$ mm Dicke und 2 m Länge aufgerollt wird, wenn sich dabei 16 Windungen ergeben?

b) Ein 20 m langes Maßband, das 0,5 mm dick ist, wird auf eine Achse von 20 mm Durchmesser aufgewickelt. Wie viele Windungen ergibt das?

6.4 Aus der Finanzmathematik

Wichtige Anwendungen von geometrischen Folgen und Reihen ergeben sich in der Finanzmathematik:

a) Zinseszinsrechnung

Ein Kapital K_0, das zu einem Zinssatz von p % angelegt wird, bringt im ersten Jahr den Zins $Z_1 = \frac{K_0}{100} \cdot p$. Am Ende des ersten Jahres ist somit das Kapital $K_1 = K_0 + Z_1 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ vorhanden. Die Verzinsung mit p % bewirkt also, daß das anfangs vorhandene Kapital sich im Laufe eines Jahres mit dem Faktor $1 + \frac{p}{100}$ multipliziert; man nennt ihn **Zinsfaktor**.

Wird der Zins nicht abgehoben, so verzinst sich im zweiten Jahr neben dem Anfangskapital K_0 auch der hinzugekommene Zins Z_1; man spricht daher von **Zinseszins***. Als Kontostand am Ende der folgenden Jahre erhält man so

$$K_2 = K_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

$$K_3 = K_2\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$$

allgemein also am Ende des n-ten Jahres

$$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Kontostände am jeweiligen Jahresende bilden somit eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied K_0 (= Anfangskapital) und dem Quotienten

$$q = 1+\frac{p}{100} \text{ (= Zinsfaktor).}$$

Beispiel:

1000 DM, die zu 6 % angelegt werden, erreichen nach 10 Jahren den Wert $K_{10} = 1000\,\text{DM} \cdot 1{,}06^{10} = 1790{,}85\,\text{DM}$ und nach 20 Jahren den Wert $K_{20} = 1000\,\text{DM} \cdot 1{,}06^{20} = 3207{,}14\,\text{DM}$.

b) Ratensparen

Angenommen, jemand zahlt zu Beginn eines jeden Jahres einen festen Geldbetrag R (= Rate**) auf ein Sparkonto ein. Welchen Wert S_n hat sein Guthaben am Ende des n-ten Jahres, wenn die Einlagen mit p% verzinst werden?

Offenbar gilt, wenn wieder $q = 1+\frac{p}{100}$ gesetzt wird,

$$S_1 = Rq$$
$$S_2 = (S_1 + R)q = Rq^2 + Rq$$
$$S_3 = (S_2 + r)q = Rq^3 + Rq^2 + Rq$$

allgemein

$$S_n = (S_{n-1} + R)q = Rq^n + Rq^{n-1} + \ldots + Rq^2 + Rq, \quad n \in \mathbb{N}.$$

* **Kapital** stammt aus dem Italienischen und bedeutet in etwa *Hauptfeld*; zugrunde liegt ihm das lateinische *capitalis* in seiner Bedeutung *vorzüglich, hauptsächlich*. **Zins** entstand aus dem lateinischen *census = Schätzung, Abgabe, Vermögen, Zins* und ist bereits im Althochdeutschen nachweisbar. Obgleich es im 16. Jh. auch schon in Rechenbüchern auftaucht, verdrängt es erst im 19. Jh. das bis dahin übliche Fachwort *Interesse* (lat. *interesse = dazwischen sein, dazwischen liegen*). Das Wort **Zinseszins** taucht erstmals wohl 1616 auf.

** **Rate**, italienisch *rata*, aus lateinisch *pro rata (parte) = in bestimmtem Verhältnis*. Zugrunde liegt *ratus = berechnet*.

Man erkennt, daß es sich bei S_n um eine geometrische Reihe handelt. Mit der Summenformel von Satz 137.1 erhält man

$$S_n = Rq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit } q = 1 + \frac{p}{100}.$$

Beispiel:

Bei einer jährlichen Rate von 1000 DM und einem Zinssatz von 6% beträgt das Guthaben

am Ende des 10. Jahres $S_{10} = 1060\,\text{DM} \cdot \dfrac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} = 13\,971{,}64\,\text{DM}$

am Ende des 20. Jahres $S_{20} = 1060\,\text{DM} \cdot \dfrac{1{,}06^{20} - 1}{0{,}06} = 38\,992{,}73\,\text{DM}$.

c) Tilgung eines Darlehens

Ein Darlehen D, für das die Bank $p\%$ Schuldzinsen fordert, soll durch gleichbleibende Raten R, die jeweils zum Jahresende fällig sind, getilgt werden. D_n sei der Darlehensrest am Ende des n-ten Jahres. Dann gilt, wieder mit

$q = 1 + \dfrac{p}{100}$,

$D_1 = Dq - R$

$D_2 = D_1 q - R = Dq^2 - Rq - R$

$D_3 = D_2 q - R = Dq^3 - Rq^2 - Rq - R$

allgemein $D_n = Dq^n - R(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)$.

In der Klammer steht eine geometrische Reihe. Mit Satz 137.1 erhält man schließlich

$$D_n = Dq^n - R\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit } q = 1 + \frac{p}{100}.$$

Demnach kann der Darlehensrest D_n als Differenz zweier Kontostände gedeutet werden: Dq^n ist der Wert, auf den das Darlehen mit Zinseszinsen anwächst, falls keine Tilgung erfolgt; $R\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ ist das Guthaben, das sich beim Einzahlen der Raten R auf ein Sparkonto ergibt.

Beispiel 1:

Ein Darlehen von 50000 DM zu einem Zinssatz von 10% wird mit Jahresraten von 10000 DM getilgt. Dann beträgt der Darlehensrest nach 6 Jahren noch

$$D_6 = 50\,000\,\text{DM} \cdot 1{,}1^6 - 10\,000\,\text{DM} \cdot \frac{1{,}1^6 - 1}{0{,}1} = 11\,421{,}95\,\text{DM}.$$

Beispiel 2:

Das Darlehen von Beispiel 1 wird durch vierteljährlich gezahlte Raten von 2500 DM getilgt. Dann gilt, da in einem Vierteljahr jeweils 2,5 % des Darlehensrestes als Zinsen anfallen, nach 6 Jahren:

$$D_6 = 50000\,\text{DM} \cdot 1{,}025^{24} - 2500\,\text{DM} \cdot \frac{1{,}025^{24} - 1}{0{,}025} = 9563{,}71\,\text{DM}.$$

Aufgaben

1. Auf welchen Wert wachsen 25000 DM, auf Zinseszinsen angelegt,
a) bei 4 % in 5 Jahren **b)** bei 6 % in 10 Jahren?

2. Welchen Geldbetrag muß man heute auf ein Konto einzahlen, um
a) bei 6 % nach 5 Jahren **b)** bei 7,5 % nach 8 Jahren
den Endbetrag 10000 DM zu erreichen?

3. Bei welchem Zinssatz wachsen
a) 34000 DM in 7 Jahren auf 46265,30 DM an
b) 7339 DM in 12 Jahren auf 19000 DM an?

4. Bei welchem (auf Zehntel gerundeten) Prozentsatz verdoppelt sich ein Kapital
a) in 11 Jahren **b)** in 18 Jahren **c)** in 9 Jahren **d)** in 3 Jahren?

5. Welche Endwerte ergeben sich in Aufgabe **1**, wenn die Kapitalisierung des Zinses **1)** vierteljährlich **2)** monatlich erfolgt?

6. Jemand zahlt jeweils am Jahresanfang 5000 DM auf ein Konto ein. Die Bank zahlt 7,5 % Zinsen. Wie hoch ist der Kontostand
a) im 2. Jahr **b)** im 5. Jahr **c)** im 10. Jahr ?

7. a) Welche jährliche Sparrate muß man aufbringen, wenn man nach Ablauf von 10 Jahren, gerechnet vom Einzahlen der ersten Rate an, einen Betrag von 100000 DM zur Verfügung haben will und wenn die Einlagen mit **1)** 6,25 % **2)** 10 % verzinst werden?
b) Welcher Endwert ergibt sich, wenn man die errechnete Rate jeweils auf ganze Hunderter rundet?

8. Herr Kluge hat mit seiner Bank einen Sparvertrag abgeschlossen. An jedem Monatsende, erstmals im Januar, zahlt er 500 DM ein. Der Zins von 8 % wird am Jahresende berechnet und zum Kapital geschlagen.
a) Zeige, daß der Kontostand am Ende des 1. Jahres $12{,}44 \cdot 500$ DM beträgt.
b) Welchen Wert weist das Sparkonto am Ende des 2. Jahres auf ?
c) Über welches Kapital kann Herr Kluge am Ende der fünfjährigen Laufzeit des Sparvertrages verfügen?

d) Welcher Endwert hätte sich ergeben, wenn schon an jedem Monatsende die Zinsen dem Kapital hinzugefügt worden wären?

9. a) Eine Bank bietet einen Progressiv-Sparvertrag mit fünfjähriger Laufzeit an, bei dem der Zinssatz im 1. Jahr 4% beträgt und sich in jedem weiteren Jahr jeweils um 1% erhöht. Welchen Endwert erreicht bei dieser Sparform ein Kapital von 20000 DM?

b) Ein anderes Geldinstitut bietet für Einlagen mit fünfjähriger Laufzeit einen Zinssatz von 6% an. Führt dies zu demselben Endwert?

10. Die Bundesrepublik Deutschland verkaufte im Frühjahr 1990 Bundesschatzbriefe vom Typ A mit sechsjähriger und vom Typ B mit siebenjähriger Laufzeit zu folgenden Bedingungen: Variabler Zinssatz, und zwar im 1. Jahr 7,50%, im 2. und 3. Jahr 8,00%, im 4. und 5. Jahr 8,25%, im 6. und (bei Typ B) 7. Jahr 8,50%. Beim Typ A werden die Zinsen jeweils nach einem Jahr ausbezahlt, beim Typ B aber zum Kapital geschlagen.

a) Angenommen, jemand hat am 1.3.1990 für 1000 DM Bundesschatzbriefe vom Typ B gekauft. Welchen Wert stellen diese
1) am 1.3.1993 **2)** am 1.3.1995 **3)** am 1.3.1997 dar?

b) Als Rendite* der Schatzbriefe vom Typ B werden in der Ausschreibung 8,14% angegeben. Zeige, daß bei diesem festbleibenden Zinssatz die Wertpapiere in sieben Jahren (ziemlich genau) denselben Wert erreichen würden.

11. Schuldverschreibungen werden oft zu einem unter ihrem Nennwert liegenden Betrag verkauft (Ausgabekurs < 100%) und am Ende ihrer Laufzeit zum Nennwert eingelöst.

a) »Finanzierungs-Schätze des Bundes« mit Nennwert 10000 DM und 2 Jahren Laufzeit wurden im März 1990 für 8521,70 DM angeboten. Welche Verzinsung ergibt sich daraus?

b) Welche Schuldverschreibung bringt eine höhere Rendite?
1) Ausgabekurs 79,38% und 3 Jahre Laufzeit
2) Ausgabekurs 68,85% und 5 Jahre Laufzeit

12. Ein Darlehen von 40000 DM wird mit Raten von 10000 DM getilgt, die jeweils am Jahresende fällig sind. Die Bank berechnet 7,5% Schuldzinsen. Vervollständige den folgenden Tilgungsplan. Wie groß ist die Restzahlung im letzten Jahr?

Jahr	Schuld am Jahresanfang	Schuldzinsen	Jahresrate	Tilgung
1	40000,–	3000,–	10000,–	7000,–
2	33000,–	2475,–	10000,–	7525,–
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

* **Rendite**: Aus dem lateinischen *rẹddere* in der Bedeutung von *einem etwas anderes als Entgelt zurückgeben* wurde das italienische *rẹndere = einbringen*; dazu gehört das Substantiv *rẹndita*.

13. Erstelle für das Darlehen von Aufgabe **12** den Tilgungsplan für den Fall, daß man am Ende jedes Jahres die Zinsen und ein Fünftel der Darlehenssumme, also 8000 DM, zurückzahlt.

14. Ein Kleinkredit von 2000 DM wird durch monatliche Raten von 200 DM, zahlbar jeweils am Monatsende, getilgt. Der Zinssatz beträgt 12%.

a) Wie groß ist die Restschuld nach

1) 5 Monaten **2)** 8 Monaten?

b) Die Tilgung wird mit einer Restzahlung am Ende des 11. Monats abgeschlossen. Wie groß ist diese letzte Rate?

15. Eine Hypothek* von 100000 DM soll durch jeweils am Jahresende fällige Raten getilgt werden. Wie groß muß die auf Vielfache von 100 DM gerundete Jahresrate gewählt werden und wie groß ist der am Ende des letzten Jahres zu zahlende Betrag, wenn

a) 8% Zinsen zu zahlen sind und die Tilgung in 12 Jahren erfolgen soll

b) 6,5% Zinsen zu zahlen sind und die Tilgung in 20 Jahren erfolgen soll?

16. Eine Hypothek* von 150000 DM wird durch vierteljährlich zu zahlende gleichbleibende Raten von 3375 DM getilgt. Es werden 8% Zinsen berechnet. Mit jeder Rate werden die im vorausgehenden Vierteljahr angefallenen Zinsen beglichen; der Rest wird als Tilgung verrechnet.

a) Wie groß ist die Restschuld nach 15 Jahren?

b) Welche Restschuld verbleibt nach 27 Jahren? Welche Zahlungen müssen im 28. Jahr noch geleistet werden, bis die Hypothek vollständig getilgt ist?

17. a) Wie groß muß ein Kapital sein, damit man bei einem Zinssatz von 8% jährlich gleichbleibend 12000 DM Zinsen erhält (sog. ewige Rente)?

b) Welches Kapital muß man auf ein Konto einzahlen, damit man bei einer Verzinsung mit 8% 20 Jahre lang jeweils zum Jahresende 12000 DM entnehmen kann? (Nach 20 Jahren soll das Kapital aufgezehrt sein.)

* ὑποθήκη (hypothéke) = Unterlage, Pfand. Heute versteht man darunter ein im Grundbuch eingetragenes Pfandrecht an einem Grundstück zur Sicherung einer Geldforderung. Umgangssprachlich – wie in dieser Aufgabe – verwendet man »Hypothek« für »Hypothekarkredit«, d.h. für einen durch Eintragung einer Hypothek gesicherten Kredit.