Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

7.1 Der Logarithmus

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

7 Logarithmen

7.1 Der Logarithmus

Kann man, wenn in der Gleichung $b^\varrho = a$ zwei der drei Zahlen gegeben sind, die dritte stets berechnen?
Falls b und ϱ gegeben sind, ist a die Lösung der Gleichung $x = b^\varrho$; man findet sie durch Berechnung der Potenz b^ϱ, also durch Potenzieren. Wenn ϱ und a gegeben sind, hat man zur Bestimmung von b die Gleichung $x^\varrho = a$ zu lösen. Auch hier handelt es sich um einen schon bekannten Aufgabentyp (vgl. Kapitel **3**). Falls $\varrho \neq 0$, erhält man $x = a^{\frac{1}{\varrho}}$.

Eine neue Situation ergibt sich aber, wenn die Basis b und der Potenzwert a gegeben sind. Nun ist die Gleichung $b^x = a$ zu lösen. Da hier die Unbekannte im Exponenten auftritt, spricht man von einer **Exponentialgleichung**. Wie steht es um die Lösbarkeit einer solchen Gleichung? Betrachten wir dazu einige

Beispiele:

1) $5^x = 125$	**2)** $(\frac{4}{9})^x = \frac{27}{8}$	**3)** $6^x = 1$
4) $1^x = 6$	**5)** $2^x = 0$	**6)** $1{,}5^x = -2{,}25$

Wie man leicht erkennt, haben die Beispiele **1)** bis **3)** die Lösungen $x = 3$ bzw. $x = -\frac{3}{2}$ bzw. $x = 0$. Die Gleichungen **4)**, **5)** und **6)** sind unlösbar, da für jedes $x \in \mathbb{R}$ $1^x = 1$ bzw. $2^x > 0$ bzw. $1{,}5^x > 0$ gilt.
Die Lösbarkeit der Exponentialgleichung $b^x = a$ steht offensichtlich in enger

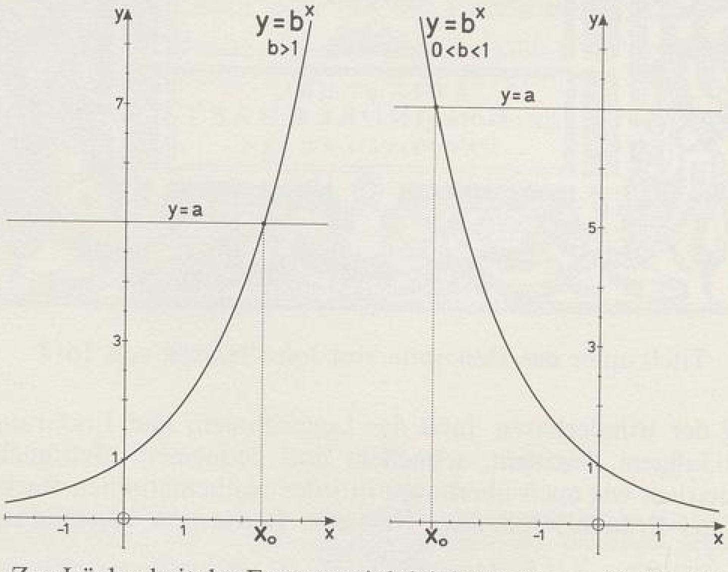


Abb. 154.1 Zur Lösbarkeit der Exponentialgleichung $b^x = a$ für $b > 1$ bzw. $0 < b < 1$

Beziehung zu den Eigenschaften der Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$, die im Fall $b > 0$ bekanntlich in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, nur positive Funktionswerte annimmt und für $b > 1$ echt monoton zunimmt, für $0 < b < 1$ echt monoton abnimmt. Abbildung 154.1 läßt vermuten, daß sowohl für $b > 1$ als auch für $0 < b < 1$ zu jeder positiven Zahl a genau eine Zahl x_0 existiert, für die $b^{x_0} = a$ gilt.
Wegen der Monotonie der Exponentialfunktionen kann es jedenfalls nur höchstens eine solche Zahl geben; denn die Gerade $y = a$ hat mit dem Graphen $y = b^x$ höchstens einen Schnittpunkt $S(x_0|a)$. In den Beispielen **1)** bis **3)** konnten wir x_0 tatsächlich angeben. Ob eine solche Lösung immer existiert, hängt mit der schon früher (Seite 125) erwähnten Frage zusammen, ob im Fall $b > 0$ und $b \neq 1$ die Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$ wirklich jede positive Zahl als Funktionswert annimmt. Wir betrachten dazu das

Beispiel: $3^x = 7$

Für eine eventuelle Lösung x_0 findet man, da $x \mapsto 3^x$ monoton zunimmt, folgende Abschätzungen:

$1 < x_0 < 2$	denn	$3^1 < 7 < 3^2$
$1{,}7 < x_0 < 1{,}8$	denn	$3^{1,7} < 7 < 3^{1,8}$
$1{,}77 < x_0 < 1{,}78$	denn	$3^{1,77} < 7 < 3^{1,78}$
$1{,}771 < x_0 < 1{,}772$	denn	$3^{1,771} < 7 < 3^{1,772}$
$1{,}7712 < x_0 < 1{,}7713$	denn	$3^{1,7712} < 7 < 3^{1,7713}$

Denkt man sich dieses Verfahren fortgesetzt, was prinzipiell möglich ist, so erhält man eine Intervallschachtelung für x_0. Die so dargestellte Zahl x_0 ist der einzige Exponent, für den 3^{x_0} in jedem der Intervalle $[3^1; 3^2]$, $[3^{1,7}; 3^{1,8}]$, $[3^{1,77}; 3^{1,78}]$, ... liegt. Diese Intervalle sind so konstruiert, daß sie stets die Zahl 7 enthalten und, da sie offensichtlich wieder eine Intervallschachtelung bilden, nur die Zahl 7. Daher muß gelten: $3^{x_0} = 7$.

So wie in diesem Beispiel kann man bei jeder Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0, b > 0$ und $b \neq 1$ eine Intervallschachtelung für die Lösung konstruieren (vgl. Aufgabe 158/**3**). Es gilt daher

Satz 155.1: Jede Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ besitzt genau eine Lösung.

Für die Lösung einer solchen Exponentialgleichung hat man eine besondere Schreibweise eingeführt:

Definition 155.1: Die Lösung der Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0, b > 0$ und $b \neq 1$ bezeichnet man mit $\log_b a$, gelesen **Logarithmus von *a* zur Basis *b***.

Eigentlich müßte man $\log_b(a)$ schreiben. Wenn aber kein Mißverständnis zu befürchten ist, kann man die Klammer weglassen.

Beispiele:

$\log_5 125 = 3,$ denn $5^3 = 125$ (vgl. Beispiel **1**))

$\log_{\frac{4}{9}}(\frac{27}{8}) = -\frac{3}{2},$ denn $(\frac{4}{9})^{-\frac{3}{2}} = \frac{27}{8}$ (vgl. Beispiel **2**))

$\log_6 1 = 0,$ denn $6^0 = 1$ (vgl. Beispiel **3**))

Nach Satz 155.1 und Definition 155.1 stellt $x = \log_b a$ die Auflösung der Gleichung $b^x = a$ nach x dar. Also sind beide Gleichungen äquivalent:

$$\boxed{b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a}$$

Die Bedeutung des neuen Terms $\log_b a$ prägt man sich zweckmäßig in folgender Form ein:

$\log_b a$ ist diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muß, um a zu erhalten.
Das heißt: $\quad b^{\log_b a} = a$

Die Bestimmung des Logarithmus einer Zahl bezüglich einer Basis b stellt eine neue Rechenart dar, die man als **Logarithmieren** bezeichnet.

**Zur Geschichte

Das Fachwort **Logarithmus** geht auf John NAPIER* (1550–1617) zurück, der es in seiner 1614 erschienenen *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (siehe Abbildung 153) ohne irgendeine Erklärung prägte. Es ist zusammengesetzt aus λόγος (lógos) = *Verhältnis* und ἀριθμός (arithmós) = *Zahl*; *Anzahl*.** Das Verbum **logarithmieren**

* gesprochen ˈneɪpɪə

** John WALLIS greift 1685 in seinem *A Treatise of Algebra, both Historical and Practical* zur Erklärung des Wortes Logarithmus auf den Begriff des Verhältnisses zurück, wie wir ihn auf Seite 62 bei EUKLID und ARCHIMEDES kennengelernt haben. (In der verbesserten lateinischen Ausgabe von 1693 zitiert WALLIS übrigens explizit EUKLID, und zwar *Elemente*, Buch V, Def. 10 und Buch VI, Def. 5.) Er betrachtet zunächst wie NAPIER arithmetisch-geometrische Doppelfolgen (siehe **7.6**) und geht dann zu der schon von Michael STIFEL her bekannten geometrischen Folge der Potenzen und der arithmetischen Folge ihrer Exponenten über und schreibt:

»then doth this Exponent always give us the Number of Rations […] in the Term to which it belongs.

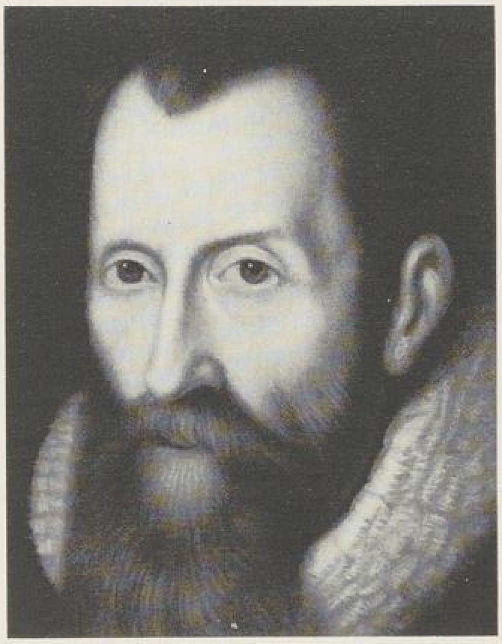
1 *r. rr.* r^3 r^4 r^5 r^6 *etc.*
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. *etc.*

(as 3 in r^3, 6 in r^6, and so every where,) or shews *How many fold (quam multiplicata)* the Proportion (for instance) of r^6 to 1, is of r to 1. That is, how many Rations or Proportions of r to 1, are compounded in r^6 to 1, to wit 6. To which the name *Logarithmus* fitly answers, that is, λόγων ἀριθμὸς, the *Number of Proportions so compounded.*«

»Dann gibt uns dieser Exponent immer die Anzahl der Verhältnisse […] in dem Term an, zu dem er gehört […]. Anders ausgedrückt: Er zeigt an, *wievielfach* (z.B.) das Verhältnis $r^6 : 1$ bezüglich $r : 1$ ist. Das heißt, wie viele Verhältnisse $r : 1$ in $r^6 : 1$ [multiplikativ] zusammengesetzt sind, nämlich 6. Genau dies drückt aber der Name *Logarithmus* aus, d.h. λόγων ἀριθμός oder die *Anzahl der so zusammengesetzten Verhältnisse.*«

Beachte: WALLIS benutzt stillschweigend $r^6 : 1 = (r : 1)^6$. – Weitere Erklärungen des Wortes Logarithmus siehe Seite 202f.

erscheint erst 1836 in Carl KOPPES (1803–1874) *Anfangsgründe der reinen Mathematik für den Schulunterricht* (§ 175). Die Verwendung des Wortes **Basis** stammt von Leonhard EULER (1707 bis 1783), der 1748 in seiner *Introductio in Analysin infinitorum* – »Einleitung in die Analysis des Unendlichen« – die in der Gleichung $b^x = a$ vorkommende konstante Zahl b als »Basis der Logarithmen« bezeichnete. (Siehe auch Seite 205.) NAPIER hat »Logarithmus« noch ausgeschrieben. Aber bereits 1624 verwendet Johannes KEPLER (1571–1630) in seinen *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos* – »Tausend Logarithmen zu ebensoviel runden Zahlen« – die Abkürzung »Log.«, woraus 1632 bei dem Jesuater Fra Bonaventura CAVALIERI (1598?–1647) »log.« wird. August Leopold CRELLE (1780–1855) fordert 1821, dem Logarithmussymbol auch die Basis beizufügen, und schlägt vor, sie darüber zu setzen: $\overset{b}{\log} x$. Bis zur Festsetzung der Schreibweise $\log_b x$ durch den Deutschen Normenausschuß im Februar 1968 gemäß DIN 1302 gab es noch die Schreibweisen ${}^b\log x$, ${}_b\log x$ und $\log^b x$, die du noch in älteren Büchern findest.



1616

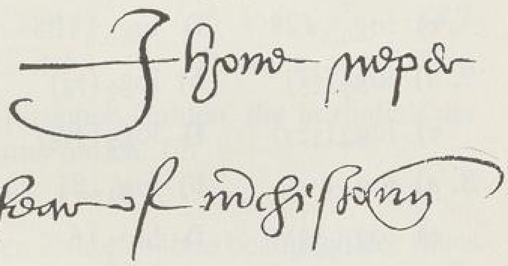


Abb. 157.1. John NAPIER, auch NEPER, Fear* of Merchiston (1550 Merchiston Castle bei Edinburgh bis 4.4.1617 ebd.)

Aufgaben

1. Bestimme die Lösung der Exponentialgleichung.
 a) $2^x = 128$ **b)** $0{,}5^x = 32$ **c)** $(\frac{2}{3})^x = \frac{3}{2}$
 d) $5^x = 0{,}04$ **e)** $0{,}25^x = 512$ **f)** $0{,}125^x = 0{,}5$

2. Die folgenden Gleichungen aus der *Arithmetica integra* (1544) von Michael STIFEL (1487?–1567) haben rationale Lösungen. Schreibe sie als Logarithmen und berechne sie.
 a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{729}{64}$ **b)** $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$

* *Fear*, engl. *fiar*, bezeichnet den Eigentümer eines ihm voll zustehenden Besitzes.

3. a) Bestimme die ersten vier Intervalle einer Intervallschachtelung für die Lösung der Exponentialgleichung. Beginne dabei mit dem aus aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen bestehenden Intervall und verwende die Zehnteilungsmethode.

1) $2^x = 5$ **2)** $10^x = 37$ **3)** $1{,}5^x = 1{,}1$

4) $5^x = 0{,}75$ **5)** $0{,}4^x = 4$ **6)** $\left(\frac{5}{6}\right)^x = 0{,}56$

b) Berechne für den folgenden Logarithmus den auf drei geltende Ziffern gerundeten Näherungswert mit Hilfe einer Intervallschachtelung der in **a)** beschriebenen Art.

1) $\log_3 5$ **2)** $\log_7 0{,}7$ **3)** $\log_{0,5}\left(\frac{5}{3}\right)$ **4)** $\log_{15}\sqrt{2}$

Zu den Aufgaben 4 bis 13: Berechne die Logarithmen.

4. a) $\log_5 25$ **b)** $\log_2 16$ **c)** $\log_{10} 10000$ **d)** $\log_{10} 10^n$

e) $\log_2 1024$ **f)** $\log_7 343$ **g)** $\log_6 216$ **h)** $\log_4 256$

5. a) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$ **b)** $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$ **c)** $\log_{11}\left(\frac{1}{121}\right)$ **d)** $\log_5\left(\frac{1}{625}\right)$

e) $\log_2 0{,}5$ **f)** $\log_2 0{,}125$ **g)** $\log_5 0{,}04$ **h)** $\log_{10} 0{,}01$

6. a) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ **b)** $\log_{\frac{1}{3}} 81$ **c)** $\log_{\frac{1}{11}} 121$ **d)** $\log_{\frac{1}{6}} 1296$

e) $\log_{0,5} 128$ **f)** $\log_{0,2} 125$ **g)** $\log_{0,1} 0{,}001$ **h)** $\log_{0,01} 10^6$

7. a) $\log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{16}{25}\right)$ **b)** $\log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{25}{16}\right)$ **c)** $\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{25}{16}\right)$ **d)** $\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{16}{25}\right)$

e) $\log_{\frac{2}{7}}\left(\frac{8}{343}\right)$ **f)** $\log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{81}{256}\right)$ **g)** $\log_{0,6}\left(\frac{625}{81}\right)$ **h)** $\log_{1,25} 0{,}512$

8. a) $\log_4 8$ **b)** $\log_{27} 81$ **c)** $\log_{25} 125$ **d)** $\log_{125} 25$

e) $\log_{16}\left(\frac{1}{8}\right)$ **f)** $\log_{\frac{1}{8}} 16$ **g)** $\log_{128} 1024$ **h)** $\log_{343} 49$

i) $\log_{100} 1000$ **k)** $\log_{1000} 100$ **l)** $\log_{100} 0{,}1$ **m)** $\log_{0,01} 0{,}00001$

9. a) $\log_{10}\sqrt{10}$ **b)** $\log_2\sqrt[3]{2}$ **c)** $\log_5\sqrt[11]{25}$ **d)** $\log_3\sqrt[9]{81}$

e) $\log_2\sqrt[5]{\frac{1}{8}}$ **f)** $\log_6\sqrt{\frac{1}{216}}$ **g)** $\log_{15}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{225}}\right)$ **h)** $\log_8\left(\frac{1}{\sqrt[5]{512}}\right)$

i) $\log_{\frac{1}{7}}\sqrt{343}$ **k)** $\log_{\frac{1}{18}}\sqrt[7]{\frac{1}{324}}$ **l)** $\log_{0,1}\sqrt[4]{10}$ **m)** $\log_{0,2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3125}}\right)$

10. a) $\log_{\sqrt{3}} 3$ **b)** $\log_{\sqrt[3]{6}}\left(\frac{1}{36}\right)$ **c)** $\log_{\sqrt[5]{2}} 64$ **d)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 125$

e) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt[7]{64}$ **f)** $\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$ **g)** $\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{0{,}04}$ **h)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt[9]{0{,}125}$

11. a) $\log_6 216 - \log_{\frac{1}{6}} 216 + 2 \cdot \log_5 0{,}2 + \log_{0,2}\left(\frac{1}{25}\right) - \log_{0,1} 1$

b) $\log_8 0{,}125 + \log_5 0{,}008 + \log_{0,4} 2{,}5 + \log_{0,01} 1000 + \log_{100} 0{,}001$

c) $\log_2\sqrt[3]{4} - \log_3\sqrt[5]{27} - \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{8}{27}\right) + \log_{0,6}\sqrt{\frac{125}{27}} + \log_{1,5} 5\frac{1}{16}$

12. a) $\log_a 1$ b) $\log_a a$ c) $\log_a a^2$ d) $\log_a a^n$

e) $\log_a\left(\frac{1}{a}\right)$ f) $\log_a\left(\frac{1}{a^2}\right)$ g) $\log_a\left(\frac{1}{a^n}\right)$ h) $\log_a\sqrt{a}$

i) $\log_a\sqrt[3]{a}$ k) $\log_a\sqrt[5]{a^2}$ l) $\log_a\sqrt[7]{\frac{1}{a^3}}$ m) $\log_a(\sqrt[4]{a^3})^5$

13. a) $\log_{\frac{1}{a}} a^2$ b) $\log_{a^2}\left(\frac{1}{a^3}\right)$ c) $\log_{a^3}\sqrt[3]{a}$ d) $\log_{\frac{1}{a^2}}\sqrt[3]{a^4}$

e) $\log_{\sqrt{a}} a^n$ f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{a}}}\sqrt[3]{a}$ g) $\log_{|a|} a^6$ h) $\log_{\sqrt{|a|}}\left(\frac{1}{a^4}\right)$

14. Löse folgende Gleichungen:

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log_5 x = -2$ c) $\log_9 x = 0{,}5$ d) $\log_{0,5} x = -\frac{1}{3}$

e) $\log_x 121 = 2$ f) $\log_x(\frac{81}{169}) = -2$ g) $\log_x(\frac{1}{8}) = -6$ h) $\log_x\sqrt[3]{0{,}5} = \frac{2}{3}$

i) $\log_{\sqrt{x}} 16 = 2$ k) $\log_{x^2} 49 = \frac{1}{2}$ l) $\log_{x+4} 64 = 2$ m) $\log_{2x+5} 1 = 0$

15. Bestimme den auf vier geltende Ziffern gerundeten Wert von x aus

a) $\log_2 x = 1{,}25$ b) $\log_7 x = 2{,}8118$ c) $\log_{0,8} x = -14{,}2$

d) $\log_{10} x = -0{,}35223$ e) $\log_{100} x = 1{,}5$ f) $\log_{0,5} x = 3{,}023$.

16. Nenne alle höchstens dreistelligen natürlichen Zahlen, die bezüglich der Basis a einen ganzzahligen Logarithmus haben, für

a) $a = 10$ b) $a = 2$ c) $a = \frac{1}{3}$ d) $a = 0{,}1$.

• **17.** Welche Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen haben bezüglich der Basis 10 einen rationalen Logarithmus, der nicht größer als 3 ist?

: **18.** Beweise, daß die folgenden Logarithmen irrationale Zahlen sind.

a) $\log_{10} 2$ b) $\log_{10} 5$ c) $\log_{10} 6$ d) $\log_2 3$ e) $\log_5 9$

f) $\log_q p$, falls p und q verschiedene Primzahlen sind.

(*Anleitung*: Gehe von der gegenteiligen Annahme aus und leite daraus einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung natürlicher Zahlen ab.)

19. Gib zur Gleichung $\log_x y = x$ alle ganzzahligen Lösungspaare $(x|y)$ an, für welche y kleiner als 10^6 ist.

20. Warum kann man die Zahl 1 nicht als Basis von Logarithmen verwenden?

21. Weshalb haben sowohl die Addition als auch die Multiplikation nur eine Umkehrung, während das Potenzieren zwei verschiedene Umkehrungen besitzt?