Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

7.2 Rechenregeln für Logarithmenbasen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

7.2 Rechenregeln für Logarithmen

Da das Logarithmieren eine Umkehrung des Potenzierens darstellt, ergeben sich aus den bekannten Rechenregeln für Potenzen entsprechende Regeln für das Rechnen mit Logarithmen.

Beispiel 1:

1) $\log_2 4 = \log_2(2^2) = 2;$ **2)** $\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3;$

3) $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(2^2 \cdot 2^3) = \log_2(2^{2+3}) = 2 + 3.$

Aus **1)**, **2)** und **3)** erhält man: $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8.$

Das Ergebnis dieses Beispiels läßt sich verallgemeinern zu

> **Satz 160.1:** Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.
> Für $u > 0$, $v > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt also:
> $$\boldsymbol{\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v}$$

Beweis: Mit $x := \log_b u$ und $y := \log_b v$ gilt $b^x = u$ und $b^y = v$.
Also ist $u \cdot v = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ und damit
$\log_b(u \cdot v) = \log_b(b^{x+y}) = x + y$, d.h. $\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$.

Satz 160.1 gilt natürlich auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren; z.B. ist

$$\begin{aligned}\log_b(u \cdot v \cdot w) &= \log_b(u \cdot (v \cdot w)) = \\ &= \log_b u + \log_b(v \cdot w) = \\ &= \log_b u + \log_b v + \log_b w.\end{aligned}$$

Ganz analog zu Satz 160.1 läßt sich auch eine Rechenregel für den Logarithmus eines Quotienten aufstellen:

> **Satz 160.2:** Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus den Logarithmen von Dividend und Divisor.
> Für $u > 0$, $v > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt also:
> $$\boldsymbol{\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v}$$

Den **Beweis** kannst du leicht selbst durchführen (Aufgabe 161/**1**).

Bemerkung: In den Formeln von Satz 160.1 und 160.2 ist die linke Seite auch noch definiert, wenn u und v beide negativ sind, die rechte dagegen nicht mehr. Die folgende Form dieser Formeln erfaßt jedoch auch diesen Fall:

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b|u| + \log_b|v| \quad \text{bzw.} \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b|u| - \log_b|v|.$$

Zu einem Satz über den Logarithmus einer Potenz führt uns

Beispiel 2:

1) $\log_3 9 = \log_3(3^2) = 2;$

2) $\log_3(9^5) = \log_3[(3^2)^5] = \log_3(3^{2\cdot 5}) = 2\cdot 5 = 5\cdot 2$

Aus **1)** und **2)** erhält man: $\log_3(9^5) = 5\cdot\log_3 9.$

Auch dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern zu

> **Satz 161.1:** Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis.
> Für $u > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ und $\varrho \in \mathbb{R}$ gilt also:
> $$\log_b u^\varrho = \varrho \cdot \log_b u$$

Beweis: Mit $x := \log_b u$ gilt $b^x = u$ und damit $u^\varrho = (b^x)^\varrho = b^{\varrho x}$.
Daher ist $\log_b u^\varrho = \log_b(b^{\varrho x}) = \varrho\cdot x$, also $\log_b u^\varrho = \varrho\cdot\log_b u$.

Die drei in den vorausgehenden Sätzen enthaltenen Rechenregeln besagen, daß das Logarithmieren ein Produkt zu einer Summe, einen Quotienten zu einer Differenz und eine Potenz zu einem Produkt macht. Auf dieser Vereinfachung der Rechenarten beruhte bis in die jüngste Zeit, d.h. bis zur Einführung von elektronischen Rechnern, die große Bedeutung der Logarithmen für das praktische Rechnen. Historisch gesehen führte gerade das Bedürfnis, schwierige numerische Rechnungen zu vereinfachen, zur Entdeckung der Logarithmen (vgl. **7.6**).

Aufgaben

1. Beweise die Rechenregel: $\log_a\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

2. Zerlege in ein Aggregat von einfacheren Logarithmen unter der Voraussetzung, daß alle Variablen positive Zahlen vertreten:

a) $\log_a(3uv)$ **b)** $\log_a(2mnv)$ **c)** $\log_a\left(\dfrac{1}{5uv}\right)$ **d)** $\log_a\left(\dfrac{uw}{3v}\right)$

e) $\log_a\left(\dfrac{4xy}{27z}\right)$ **f)** $\log_a[(15cd)\cdot(3ce)]$ **g)** $\log_a[(16pq):(12qr)]$

3. Drücke die folgenden Logarithmen durch Logarithmen von Primzahlen aus.

a) $\log_a 6$ **b)** $\log_a 24$ **c)** $\log_a 75$ **d)** $\log_a 81$

e) $\log_a 1000$ **f)** $\log_a(\frac{4}{7})$ **g)** $\log_a(\frac{1}{11})$ **h)** $\log_a(\frac{12}{25})$

i) $\log_a 0{,}04$ **k)** $\log_a 8{,}45$ **l)** $\log_a\sqrt{3}$ **m)** $\log_a\sqrt[5]{24}$

4. Fasse zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

a) $\log_a 2 + \log_a 3$ **b)** $\log_a 5 - \log_a 7$ **c)** $\log_a 1 - \log_a 11 + \log_a 2$

d) $2\log_a 16 - \log_a 8$ **e)** $3\log_a 2 + \log_a 4$ **f)** $\log_a \sqrt[5]{243} - \log_a 6 + \log_a 2$

5. Alle Variablen vertreten positive Zahlen. Vereinfache:

a) $\log_a u^3$ **b)** $\log_a 2c^4$ **c)** $\log_a \left(\frac{3}{vw}\right)^3$ **d)** $\log_a \left(\frac{u^2 v}{(2w)^3}\right)$

e) $\log_a \sqrt[4]{u}$ **f)** $\log_a \sqrt[6]{\frac{u^5}{v}}$ **g)** $\log_a \left(\frac{1}{\sqrt[3]{r^2 st}}\right)$ **h)** $\log_a \left(\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[4]{2q}\right)^2$

6. Sind die folgenden Terme äquivalent?

a) $\log_b x + 2$ und $\log_b (x+2)$ **b)** $\log_b a^2$ und $(\log_b a)^2$

c) $\log_b (a^2)^3$, $(\log_b a^2)^3$ und $[(\log_b a)^2]^3$

7. Fasse zusammen:

a) $2\log_a m + 3\log_a n$ **b)** $0{,}5\log_a p^3 - \log_a \left(\frac{p^2}{\sqrt{q}}\right)$

c) $2\log_a \left(c^2 \sqrt{cd}\right) - 4\log_a \left(\frac{c}{d^2}\right)$ **d)** $\log_a c + 1$

e) $2 - \log_a (u^2 v)$ **f)** $\frac{1}{2}(\log_a m^2 n - 3) - \left(0{,}5 - \log_a \frac{\sqrt{n}}{m}\right)$

8. Berechne:

a) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$ **b)** $\log_6 4 + \log_6 9$ **c)** $\log_{15} 5 - \log_{15} 75$

d) $3\log_{10} 5 + \log_{10} 8$ **e)** $2\log_6 12 + \log_6 1{,}5$ **f)** $2\log_{16} 3 - \log_{16} 72$

9. Vereinfache:

a) $\log_3 (5+4) + \log_3 (5-4)$ **b)** $\log_2 (6+2) - \log_2 (6-2)$

c) $\log_5 (25-5) - \log_5 (125-25)$ **d)** $\log_7 (48 - 17 \cdot 2) + \log_7 (3 + 5^2)$

e) $\log_4 (2+4+8) - \log_4 (30-2)$ **f)** $\log_9 (9^2 + 9 \cdot 2) + \log_9 (27 + 270)$

10. Berechne:

a) $\log_{a^3} a + \log_{a^3} a^2$ **b)** $\log_{a^2} a^3 + \log_{a^2} a$ **c)** $\log_a \sqrt[3]{a^5} - \log_a \sqrt[3]{a^2}$

d) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a} + \log_{\sqrt{a}} \sqrt[6]{a}$ **e)** $\log_a \sqrt{a} - 2\log_a \sqrt[3]{a} + \log_a \sqrt[6]{a}$

11.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_2 (2x+6) - \log_2 (x-2) = 2$

b) $\log_7 (x+4) + \log_7 (x-2) = 1$

c) $\log_3 (x+8) + \log_3 (x+9) = \log_3 (13x + 93)$

d) $\log_2 (x-1) - \log_2 (3x-5) = 1 - \log_2 x$

e) $\log_3 (x-1) + \log_3 (5x-2) = 2 + \log_3 (-2x)$

f) $\log_a (x^2 - 2x) - \log_a (x-2) = \log_a (2x-3)$

* Die Bearbeitung dieser Aufgabe kann auch erst im Abschnitt **7.5.2** erfolgen.

12. Vereinfache:

a) $\log_4(-2)^6$ **b)** $\log_3(-9)^2$ **c)** $\log_{\frac{1}{7}}(-49)^{-2}$

d) $\log_{0,2}(-5)^{-4}$ **e)** $\log_3 \frac{2-5}{7-9} + \log_3(10-4)$

f) $\log_{0,5}\sqrt{(120-11^2)\cdot(12-3{,}5^2)}$ **g)** $\log_{\sqrt{2}}((12\cdot 13-4\cdot 47):\log_2 0{,}25)$

13.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_a x = \log_a 5 - 2\cdot\log_a 3$ **b)** $\log_a x = 1 + \log_a 5$

c) $\log_b \sqrt{x} + 3\cdot\log_b 2 = 2\cdot\log_b 3$ **d)** $\log_b(-2x) = 4\log_b 2 + \log_b 4 - 2$

e) $\log_c x^2 - \log_c x + 1 = 0$ **f)** $\log_c x^3 + \log_c x^2 - \log_c x = 0$

g) $\log_2 \sqrt[3]{x} - 2\cdot\log_2 x = 0{,}5 - 3\cdot\log_2\sqrt{x}$

h) $\log_{10}(0{,}01x) + \log_{10}(100x)^2 = \log_{10}0{,}0001 - 2\cdot\log_{10}\sqrt{x}$

14.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_{10}\sqrt{x^2} = -4$ **b)** $2\log_{10}\sqrt{x} = -4$ **c)** $2\log_{10}\sqrt{|x|} = -4$

d) $\log_5\left(\frac{1}{|x|}\right) = 2$ **e)** $\frac{1}{3}\log_3\sqrt{|2x-1|} + 0{,}5 = 0$ **f)** $\log_2\sqrt[3]{5x-3} = 3$

7.3 Verschiedene Logarithmenbasen

7.3.1 Die Umrechnungsregel

Bei den in **7.2** behandelten Rechenregeln war wesentlich, daß die darin vorkommenden Logarithmen jeweils dieselbe Basis hatten. Natürlich ändert sich der Logarithmus einer (von 1 verschiedenen) Zahl, wenn man die Basis wechselt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den auf verschiedene Basen bezogenen Logarithmen einer bestimmten Zahl?

Beispiel 1:

Es ist $\log_2 8 = 3$; $\log_4 8 = \frac{3}{2}$; $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$.

Da außerdem $\log_2 4 = 2$ und $\log_2 16 = 4$ gilt, kann man $\log_4 8$ und $\log_{16} 8$ in folgender Form darstellen:

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4};\quad \log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16}.$$

Aus dem Logarithmus der Zahl 8 zur Basis 2 erhält man also ihren Logarithmus bezüglich der neuen Basis 4 bzw. 16, indem man $\log_2 8$ durch $\log_2 4$ bzw. $\log_2 16$ dividiert.

* Die Bearbeitung dieser Aufgabe kann auch erst im Abschnitt **7.5.2** erfolgen.