Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

7.3.1 Die Umrechnungsregel

12. Vereinfache:

a) $\log_4(-2)^6$ **b)** $\log_3(-9)^2$ **c)** $\log_{\frac{1}{7}}(-49)^{-2}$

d) $\log_{0,2}(-5)^{-4}$ **e)** $\log_3 \frac{2-5}{7-9} + \log_3(10-4)$

f) $\log_{0,5}\sqrt{(120-11^2)\cdot(12-3{,}5^2)}$ **g)** $\log_{\sqrt{2}}((12\cdot 13-4\cdot 47):\log_2 0{,}25)$

13.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_a x = \log_a 5 - 2\cdot\log_a 3$ **b)** $\log_a x = 1 + \log_a 5$

c) $\log_b \sqrt{x} + 3\cdot\log_b 2 = 2\cdot\log_b 3$ **d)** $\log_b(-2x) = 4\log_b 2 + \log_b 4 - 2$

e) $\log_c x^2 - \log_c x + 1 = 0$ **f)** $\log_c x^3 + \log_c x^2 - \log_c x = 0$

g) $\log_2\sqrt[3]{x} - 2\cdot\log_2 x = 0{,}5 - 3\cdot\log_2\sqrt{x}$

h) $\log_{10}(0{,}01x) + \log_{10}(100x)^2 = \log_{10} 0{,}0001 - 2\cdot\log_{10}\sqrt{x}$

14.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_{10}\sqrt{x^2} = -4$ **b)** $2\log_{10}\sqrt{x} = -4$ **c)** $2\log_{10}\sqrt{|x|} = -4$

d) $\log_5\left(\frac{1}{|x|}\right) = 2$ **e)** $\frac{1}{3}\log_3\sqrt{|2x-1|} + 0{,}5 = 0$ **f)** $\log_2\sqrt[3]{5x-3} = 3$

7.3 Verschiedene Logarithmenbasen

7.3.1 Die Umrechnungsregel

Bei den in **7.2** behandelten Rechenregeln war wesentlich, daß die darin vorkommenden Logarithmen jeweils dieselbe Basis hatten. Natürlich ändert sich der Logarithmus einer (von 1 verschiedenen) Zahl, wenn man die Basis wechselt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den auf verschiedene Basen bezogenen Logarithmen einer bestimmten Zahl?

Beispiel 1:

Es ist $\log_2 8 = 3$; $\log_4 8 = \frac{3}{2}$; $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$.

Da außerdem $\log_2 4 = 2$ und $\log_2 16 = 4$ gilt, kann man $\log_4 8$ und $\log_{16} 8$ in folgender Form darstellen:

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}; \quad \log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16}.$$

Aus dem Logarithmus der Zahl 8 zur Basis 2 erhält man also ihren Logarithmus bezüglich der neuen Basis 4 bzw. 16, indem man $\log_2 8$ durch $\log_2 4$ bzw. $\log_2 16$ dividiert.

* Die Bearbeitung dieser Aufgabe kann auch erst im Abschnitt **7.5.2** erfolgen.

Allgemein gilt

> **Satz 164.1: Umrechnungsregel**
> Aus den Logarithmen bezüglich einer Basis a erhält man die Logarithmen bezüglich einer neuen Basis b mit Hilfe der Formel:
> $$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$
> Dabei ist $u > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Beweis: Wir setzen $\log_b u =: x$; dann gilt

$$b^x = u$$
$$\log_a b^x = \log_a u$$
$$x \cdot \log_a b = \log_a u$$
$$x = \frac{\log_a u}{\log_a b}, \quad \text{also} \quad \log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}, \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgaben

1. Verwandle in Logarithmen zur Basis 8:

a) $\log_2 2$ **b)** $\log_2 3$ **c)** $\log_4 \sqrt{5}$

d) $\log_4 u$ **e)** $\log_{16} v$ **f)** $\log_{32} w$

2. **a)** Drücke $\log_7 5$ durch Logarithmen zur Basis 2 aus.
b) Drücke $\log_3 1{,}7$ durch Logarithmen zur Basis 5 aus.
c) Drücke $\log_5 64$ durch Logarithmen zur Basis 4 aus.
d) Drücke $\log_{1,1}(\frac{1}{49})$ durch Logarithmen zur Basis 7 aus.
e) Drücke $\log_9 2$ durch Logarithmen zur Basis 3 aus.
f) Drücke $\log_5 1{,}63$ durch Logarithmen zur Basis 25 aus.

3. Drücke durch Logarithmen zur Basis 10 aus:

a) $\log_2 10$ **b)** $\log_5 100$ **c)** $\log_{100} 5$ **d)** $\log_{1000} 2$ **e)** $\log_2 1000$

f) $\log_{20} 1000$ **g)** $\log_{0,1} 7$ **h)** $\log_3 \sqrt{0{,}1}$ **i)** $\log_{\sqrt{10}} 6$ **k)** $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{0{,}001}$

l) $\log_3 2$ **m)** $\log_5 0{,}5$ **n)** $\log_{\frac{1}{9}}(\frac{3}{7})$ **o)** $\log_{11} 523$ **p)** $\log_{0,16} 49$

4. Beweise: Für $a > 0$, $a \neq 1$ und $b > 0$, $b \neq 1$ gilt $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.

5. **a)** Beweise: $\log_a x = \log_{a^n} x^n$ (falls $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$).
• **b)** Kann man stets $\log_{a^n} x^n$ durch $\log_a x$ ersetzen?

•**6.** Löse folgende Gleichungen:

a) $\log_2 x = \log_4 9$ **b)** $\log_2 x = \log_{\frac{1}{4}} 5$ **c)** $\log_{0,2} x - \log_{25} 3 = 0$

d) $\log_5 \sqrt{x} = \log_{\sqrt{5}} 7$ **e)** $\log_a x^2 = 2 + \log_{\frac{1}{a}} 2$

f) $\log_{\sqrt{a}}(x-3) = \log_a(x+3)$ **g)** $\log_9(1 + \log_2 x) = \log_3 2$

h) $\log_3(1 + \log_2 x) = \log_{\frac{1}{3}} 2$

7.3.2 Zehner- und Zweierlogarithmen

Die große Bedeutung der Umrechnungsregel liegt offensichtlich darin, daß es genügt, die Logarithmen bezüglich einer einzigen Basis a zur Verfügung zu haben, um daraus dann die Logarithmen für jede andere Basis recht einfach berechnen zu können. Welche Zahl man als Basis a wählt, ist grundsätzlich gleichgültig. In der Praxis hat man sich vor allem für die Basis 10, die Grundzahl unseres Zahlensystems, entschieden.

Definition 165.1: Die Logarithmen zur Basis 10 nennt man **Zehnerlogarithmen** oder **dekadische Logarithmen**.
Für $\log_{10} x$ ist die kürzere Bezeichnung $\mathbf{lg}\,x$ üblich.*

Jahrhundertelang benützte man zum praktischen Rechnen sogenannte Logarithmentafeln, in denen für sehr viele Zahlen die Zehnerlogarithmen aufgelistet waren. Solche Tafeln mußten ursprünglich in sehr mühsamer und langwieriger Arbeit berechnet werden; mehr darüber erfährst du im Abschnitt **7.6**. Heute verwenden wir elektronische Rechner, die den dekadischen Logarithmus einer Zahl an Hand eines einprogrammierten Rechenverfahrens in kürzester Zeit mit hoher Genauigkeit berechnen. Überprüfe mit einem Taschenrechner die folgenden

Beispiele**:

1) $\lg 2 = 0{,}30103$ **2)** $\lg 876 = 2{,}94250$

3) $\lg 0{,}2 = -0{,}69897$ **4)** $\lg 0{,}01 = -2$

Mit Hilfe der uns somit zur Verfügung stehenden Zehnerlogarithmen lassen sich nun die Logarithmen bezüglich einer beliebigen Basis b nach Satz 164.1 mit der Formel $\log_b u = \frac{\lg u}{\lg b}$ berechnen.

* δεκαδεύς (dekadeus) = zu zehn gehörend. Das Symbol »lg« wurde 1968 durch den Deutschen Normenausschuß gemäß DIN 1302 festgelegt.

** Die angegebenen Dezimalbrüche sind jeweils auf 5 Stellen nach dem Komma gerundet.