Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

7.3.3 Berechnung von Logarithmen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

11. a) Bestimme **1)** $\mathrm{ld}\,2$ **2)** $\mathrm{ld}\,128$ **3)** $\mathrm{ld}\,1024$.

b) Bestimme **1)** $\mathrm{ld}\,0{,}5$ **2)** $\mathrm{ld}\,\frac{1}{64}$ **3)** $\mathrm{ld}\sqrt{2}$.

c) Berechne die auf vier Stellen gerundeten Werte von

1) $\mathrm{ld}\,10$ **2)** $\mathrm{ld}\,20$ **3)** $\mathrm{ld}\,0{,}8$ **4)** $\mathrm{ld}\sqrt{5}$.

:12. Wenn man eine natürliche Zahl n im Zweiersystem darstellt, erhält man eine Dualzahl mit $[\mathrm{ld}\,n]+1$ Stellen.

a) Prüfe diese Behauptung für

1) $n=1$ **2)** $n=5$ **3)** $n=32$ **4)** $n=100$

b) Beweise die Gültigkeit des Satzes.

:13. a) Otto erkundigt sich bei seiner Schwester Ute, einer Schülerin der Kollegstufe, welche Punktezahl sie bei ihrer letzten Mathematikarbeit erreicht habe. »Viermal darfst du fragen«, sagt Ute. Otto weiß, daß in der Kollegstufe die Punktezahlen 0, 1, 2, …, 15 vergeben werden. Er meint, es sei doch ziemlich aussichtslos, mit nur vier Fragen unter 16 Zahlen die richtige zu finden. »Doch«, sagt Ute, »das ist möglich.« Wie geht das?

b) Aus einer Menge von n Gegenständen soll ein bestimmter herausgefunden werden. Zeige, daß dies mit höchstens $[\mathrm{ld}\,n]+1$ Fragen möglich ist, wenn diese jeweils nur mit »ja« oder »nein« wahrheitsgemäß beantwortet werden. In welchen Fällen genügen sogar $[\mathrm{ld}\,n]$ Fragen?

**7.3.3 Berechnung von Logarithmen

Die Logarithmen zur Basis 10 liefert uns der Taschenrechner. Nach Eingabe des Numerus wird durch Drücken der lg-Taste ein Rechenprogramm gestartet, das in kürzester Zeit den gesuchten Logarithmus mit hoher Genauigkeit ermittelt. Die hierzu benützten Programme beruhen auf Methoden der höheren Mathematik, so daß wir hier nicht näher darauf eingehen können. Grundsätzlich geht es darum, die Berechnung der Logarithmen mit Hilfe von schon bekannten Rechenverfahren durchzuführen. Eine einfache Methode, die wir schon in Aufgabe 158/**3** angewandt haben, ist die Berechnung einer Intervallschachtelung für den gesuchten Logarithmus. Ihre Beschreibung und die Durchführung mit dem Taschenrechner oder einem Computer vereinfacht sich, wenn man statt des Zehnteilungsverfahrens die Halbierungsmethode benützt und die Rechenregeln für Logarithmen geschickt anwendet:
Zu berechnen sei $\log_b a$, wobei wir $b>1$ voraussetzen.
Man bestimmt zunächst ein Intervall $[u_1; v_1]$ so, daß $b^{u_1} < a < b^{v_1}$ und damit $u_1 < \log_b a < v_1$ gilt. Mit der Intervallmitte $m_1 := (u_1+v_1):2$ berechnet man sodann b^{m_1}. Wäre $b^{m_1}=a$, so hätte man bereits $\log_b a = m_1$ gefunden. Von

diesem in der Praxis kaum auftretenden Fall wollen wir im folgenden absehen.
Falls $b^{m_1} < a$, setzt man $u_2 := m_1$ und $v_2 := v_1$;
falls $b^{m_1} > a$, setzt man $u_2 := u_1$ und $v_2 := m_1$.
Damit hat man ein kleineres Intervall $[u_2; v_2]$ gefunden, in dem $\log_b a$ liegt. Das neue Intervall wird nun durch $m_2 := (u_2 + v_2):2$ wieder halbiert, b^{m_2} berechnet, usw. Man wiederholt diesen Schritt so lange, bis $\log_b a$ auf ein hinreichend kleines Intervall eingeschränkt ist.
Der wesentliche Rechenschritt beim Übergang von einem Intervall $[u_n; v_n]$ zum nächsten ist dabei die Berechnung von b^{m_n}, also von $b^{(u_n+v_n):2}$. Diese Zahl läßt sich aber aus den zuvor schon berechneten Werten b^{u_n} und b^{v_n} ermitteln. Es gilt nämlich $b^{(u_n+v_n):2} = (b^{u_n+v_n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b^{u_n} \cdot b^{v_n}}$. Man braucht also lediglich die Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden Potenzen zu berechnen. Bricht man die Rechnung mit dem Intervall $[u_n; v_n]$ ab, so ist $m_n = (u_n + v_n):2$ ein Näherungswert für $\log_b a$, dessen Fehler kleiner als die halbe Intervallänge, also kleiner als $\frac{1}{2}(v_n - u_n)$ ist.

Beispiel: Zu berechnen sei $\log_4 7$.

Man wählt etwa, da $4^1 < 7 < 4^2$ gilt, $u_1 = 1$ und $v_1 = 2$.
Wegen $\sqrt{4^1 \cdot 4^2} = 8 > 7$ wird $u_2 = 1$ und $v_2 = 1{,}5$.
Wegen $\sqrt{4^1 \cdot 4^{1,5}} = 2{,}82\ldots < 7$ wird $u_3 = 1{,}25$ und $v_3 = 1{,}5$.
Wegen $\sqrt{4^{1,25} \cdot 4^{1,5}} = 4{,}75\ldots < 7$ wird $u_4 = 1{,}375$ und $v_4 = 1{,}5$.
Wegen $\sqrt{4^{1,375} \cdot 4^{1,5}} = 6{,}16\ldots < 7$ wird $u_5 = 1{,}4375$ und $v_5 = 1{,}5$.
Wegen $\sqrt{4^{1,4375} \cdot 4^{1,5}} = 7{,}02\ldots > 7$ wird $u_6 = 1{,}4375$ und $v_6 = 1{,}46875$.
Wir brechen hier ab. Mit $m_6 = (u_6 + v_6):2 = 1{,}453125$ und $\frac{1}{2}(v_6 - u_6) = 0{,}015625$ gilt also:
$\log_4 7 = 1{,}453125 \pm 0{,}015625$.

Aufgaben

1. Berechne, beginnend mit dem ganzzahligen Intervall der Länge 1, nach dem Halbierungsverfahren die ersten fünf Intervalle für

a) $\log_5 3$ **b)** $\log_3 0{,}5$ **c)** ld 10
d) ld 4,7 **e)** lg 0,75 **f)** lg 83,5

2. Berechne für die folgenden Logarithmen Näherungswerte, deren Fehler kleiner als ein Hundertstel ist.

a) $\log_6 9$ **b)** ld 0,8 **c)** lg 123