UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

7.4 Logarithmusfunktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

Visual Library

7.4 Logarithmusfunktionen

Nach Wahl einer von 1 verschiedenen positiven Zahl b kann man jeder positiven Zahl x eindeutig ihren Logarithmus zur Basis b zuordnen. Man erhält damit eine Funktion.

Definition 171.1: Die Funktion $f\colon x \mapsto \log_b x$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ heißt **Logarithmusfunktion zur Basis b.**

Abbildung 171.1 zeigt die Graphen der Logarithmusfunktionen mit den Basen $b = 2$ und $b = 10$.

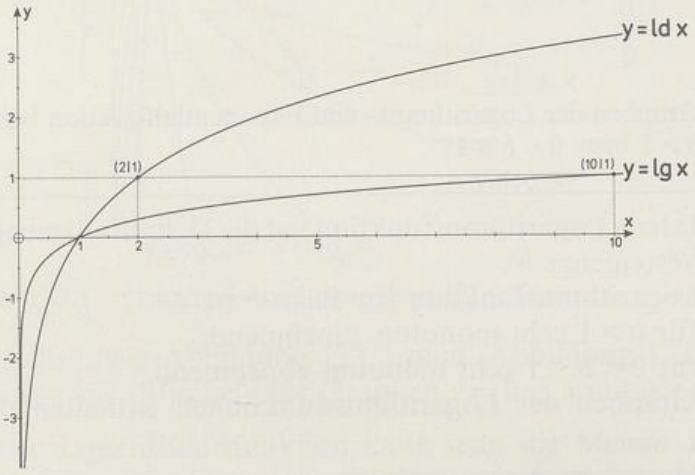

Abb. 171.1 Graphen der Logarithmusfunktionen für $b = 2$ und $b = 10$

Die Funktionsgleichung $y = \log_b x$ ist, wie wir wissen, äquivalent zur Gleichung $x = b^y$ (vgl. **7.1**). Das bedeutet, daß man die Gleichung $y = \log_b x$ eindeutig nach x auflösen kann; jeder Funktionswert y wird an genau einer Stelle $x \in \mathbb{R}^+$ angenommen. Somit besitzt die Logarithmusfunktion eine Umkehrfunktion, und diese hat, mit y als unabhängiger Variabler geschrieben, die Gleichung $x = b^y$. Um ihre Darstellung mit x als unabhängiger Variabler zu erhalten, vertauschen wir x und y. Das ergibt $y = b^x$, also die Gleichung der Exponentialfunktion mit der Basis b. Es gilt also

Satz 171.1: Die Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_b x$, $x \in \mathbb{R}^+$ hat die Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$, $x \in \mathbb{R}$ als Umkehrfunktion und umgekehrt.

Da das Vertauschen der Variablen x und y eine Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden $y = x$ bewirkt, liegen die Graphen $y = \log_b x$ und $y = b^x$ symmetrisch zu dieser Geraden (Abbildung 172.1).
Mit dem in Satz 171.1 beschriebenen Zusammenhang kann man aus den bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktionen die entsprechenden Eigenschaften der Logarithmusfunktionen erschließen. Es gilt

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

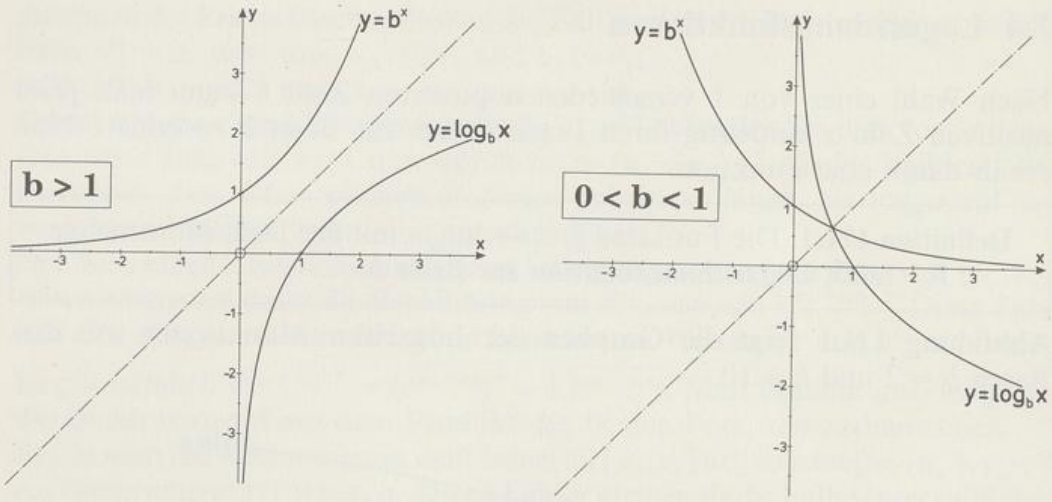

Abb. 172.1 Graphen der Logarithmus- und Exponentialfunktion bei gleicher Basis $b > 1$ bzw. $0 < b < 1$

Satz 172.1: Jede Logarithmusfunktion hat die Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ und die Wertemenge $\mathbb{R}$.
Die Logarithmusfunktion zur Basis b ist
für $b > 1$ echt monoton zunehmend,
für $0 < b < 1$ echt monoton abnehmend.
Die Graphen der Logarithmusfunktionen enthalten den Punkt $(1|0)$.

Da die Graphen $y = b^x$ und $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ bezüglich der y-Achse zueinander symmetrisch verlaufen, liegen die Graphen $y = \log_b x$ und $y = \log_{\frac{1}{b}} x$ symme-

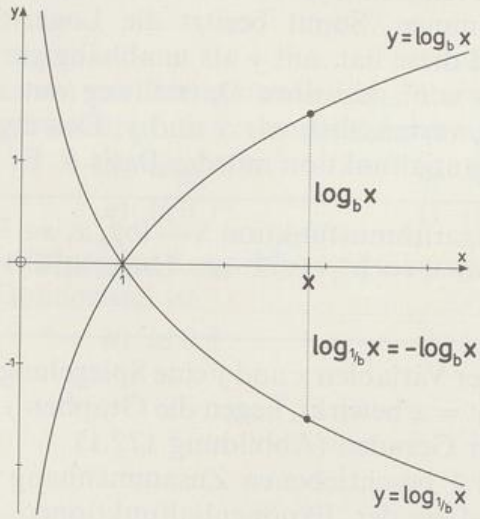

Abb. 172.2 Symmetrie der Graphen $y = \log_b x$ und $y = \log_{\frac{1}{b}} x$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

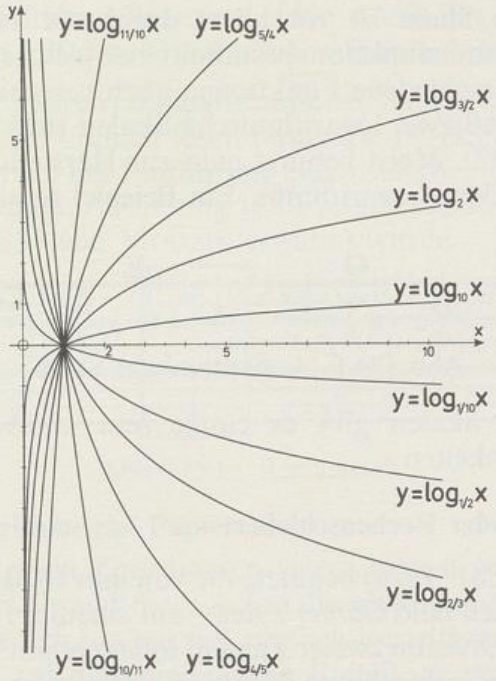

Abb. 173.1 Graphen von Logarithmusfunktionen $x \mapsto \log_b x$

trisch zur x-Achse, wie Abbildung 172.2 zeigt. Abbildung 173.1 vermittelt eine Vorstellung vom »Büschel« der Graphen $y = \log_b x$ mit $b > 0$ und $b \neq 1$.

Mit Hilfe einer Logarithmusfunktion kann man die Menge der positiven Zahlen umkehrbar eindeutig auf die Punkte einer Geraden abbilden. Man wählt dazu auf der Geraden einen Anfangspunkt O und einen Punkt E, der zusammen mit O die Längeneinheit und die Orientierung festlegt. Damit ordnet man nun jeder Zahl $x > 0$ denjenigen Punkt der Geraden zu, der sich ergibt, wenn man von O aus den Pfeil $\log_b x \cdot \overrightarrow{OE}$ abträgt. Mit anderen Worten: man bestimmt auf der Zahlengeraden mit dem Nullpunkt O und dem Einheitspunkt E den zur Zahl $\log_b x$ gehörenden Punkt, bezeichnet ihn aber mit x (Abbildung 173.2). Eine so erzeugte Skala heißt **logarithmische Skala**.*

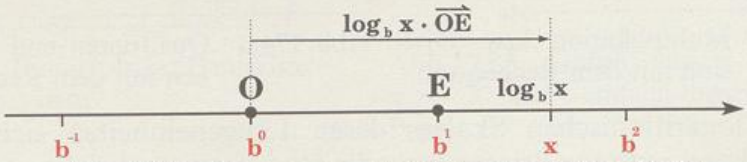

Abb. 173.2 Erzeugung einer logarithmischen Skala

Bei dieser Zuordnung entspricht, wie man leicht erkennt, dem Punkt O die Zahl 1 und dem Punkt E die Zahl b, die Basis der Logarithmusfunktion. Zwei Potenzen von b, deren Exponenten sich um 1 unterscheiden, haben in dieser Skala stets den gleichen Abstand $\overline{OE}$; denn es gilt $\log_b b^{k+1} - \log_b b^k = (k+1) - k = 1$.

* scalae (lat.), scala (ital.) = Treppe, Leiter

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Eine logarithmische Skala ist vor allem durch die zu ihrer Herstellung verwendete Logarithmusfunktion bestimmt; bei gleicher Wahl der Punkte O und E ergeben verschiedene Funktionen auch verschiedene Skalen. Man kann aber zeigen, daß zwei logarithmische Skalen stets zueinander ähnlich sind (Aufgabe 181/**22**). Meist benützt man zur Herstellung logarithmischer Skalen den dekadischen Logarithmus. Ein Beispiel zeigt Abbildung 174.1.

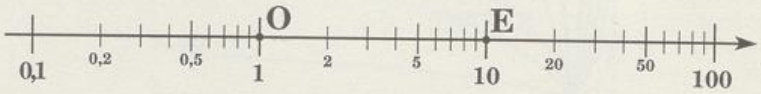

Abb. 174.1 Logarithmische Skala

Für logarithmische Skalen gibt es einige sehr sinnvolle und nützliche Anwendungsmöglichkeiten:

a) Der Rechenstab oder Rechenschieber

Edmund GUNTER (1581–1626) benützte die von ihm 1620 erfundene logarithmische Skala – sie hieß bald *Gunter's line* – auf einem 6 Fuß langen Stab zur Multiplikation und Division zweier Zahlen, indem er auf ihm mit dem Zirkel Strecken addierte bzw. subtrahierte.* William OUGHTRED (1574–1660) vereinfachte 1621 diesen Vorgang erheblich, indem er zwei Exemplare einer logarithmischen Skala gegeneinander legte: Der Rechenstab war erfunden! Das erste Modell mit festem und beweglichem Körper ließ er 1633 konstruieren, das älteste erhaltene fertigte 1654 ein gewisser Robert BISSACKER.
Abbildung 174.2 zeigt die Multiplikation zweier Zahlen als Streckenaddition. Addiert werden die beiden Strecken mit den Längen $\lg a$ und $\lg b$. Wegen $\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$ liest man unter der Marke b der oberen Skala das Produkt $a \cdot b$ auf der unteren Skala ab. Mit derselben Einstellung löst man auch die Divisionsaufgabe $c : b$.

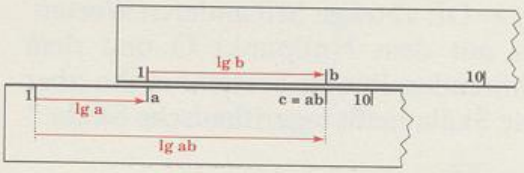

Abb. 174.2 Multiplikation bzw. Division mit dem Rechenstab

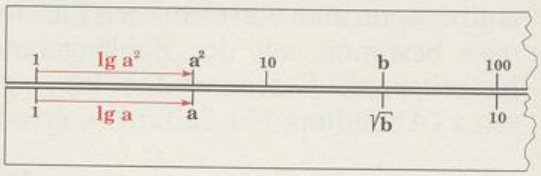

Abb. 174.3 Quadrieren und Wurzelziehen mit dem Rechenstab

Mit zwei logarithmischen Skalen, deren Längeneinheiten sich wie 2 : 1 verhalten, kann man quadrieren bzw. die Quadratwurzel ziehen (Abbildung 174.3). Wenn die Marken 1 der beiden Skalen übereinandergestellt sind, liest man über der Zahl a der unteren Skala ihr Quadrat a^2 auf der oberen Skala ab. Umgekehrt steht unter einer Zahl b der oberen Skala ihre Quadratwurzel auf

* gesprochen 'gantə. Bei den englischen Seeleuten war lange Zeit ein zwei Fuß langer flacher Stab in Gebrauch, der neben der logarithmischen Skala auch logarithmische Skalen trigonometrischer Funktionen enthielt. Er hieß *The Gunter*. *According to Gunter* sagen übrigens die Amerikaner für unser »nach Adam Riese«. (Bei den Engländern heißt es dagegen *according to Cocker* nach dem englischen Mathematiker Edward COCKER [1631–1675], dessen *Arithmetick* von 1678 insgesamt 112 Auflagen erfuhr.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

der unteren Skala. Edmund WINGATE (1596–1656) hat 1645 die »Quadratskala« erfunden und auf dem GUNTERschen Stab anbringen lassen.

Mit Hilfe geeigneter Paare von logarithmischen Skalen lassen sich noch viele weitere Aufgaben recht einfach lösen (Aufgabe 181/**23** und 182/**24**). Rechenstäbe wurden vor der Einführung elektronischer Taschenrechner auch im Unterricht verwendet. Abbildung 175.1 zeigt einen Rechenstab mit »Läufer«, der erstmals 1837 von MOUZIN erwähnt wurde.

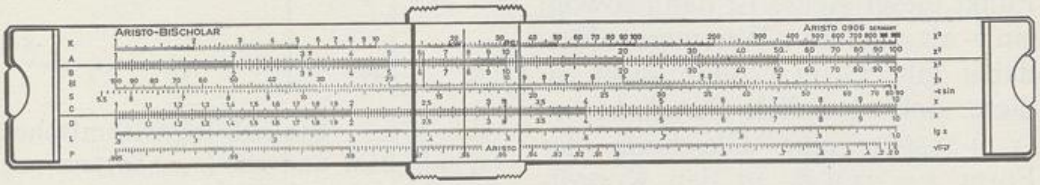

Abb. 175.1 Rechenstab

b) Das einfach-logarithmische Papier

Abbildung 175.2 zeigt ein Koordinatensystem, dessen y-Achse eine logarithmische Skala trägt, während die x-Achse die gewohnte äquidistante Teilung aufweist. Es handelt sich um ein sog. einfach-logarithmisches Koordinatensystem; ein Papier, auf dem eine solche Einteilung vorgedruckt ist, heißt einfach-logarithmisches Papier.

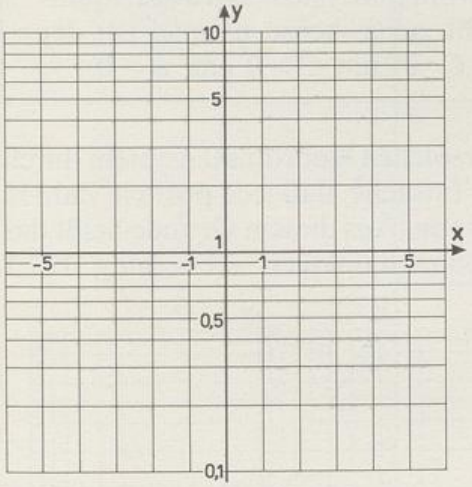

Abb. 175.2 Einfach-logarithmisches Koordinatensystem

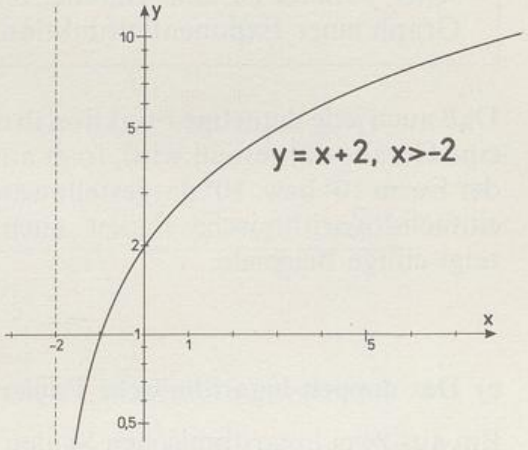

Abb. 175.3 Graph von $x \mapsto x + 2$, $x > -2$ auf einfach-logarithmischem Papier

Natürlich hat in einem solchen Koordinatensystem der Graph einer Funktion eine andere Form als in den uns geläufigen Systemen mit jeweils äquidistant geteilten Achsen. Zum Beispiel ist der Graph einer linearen Funktion auf einfach-logarithmischem Papier keine Gerade, sondern eine gekrümmte Kurve (Abbildung 175.3). Es gibt aber auch Funktionen, deren Graphen sich bei Verwendung von logarithmischem Papier vereinfachen. Von besonderem Interesse ist die Frage, welche Funktionen in einem solchen Koordinatensystem als Graphen eine Gerade haben.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Um dies zu untersuchen, führen wir eine mit der y-Achse zusammenfallende, äquidistant geteilte z-Achse ein, und zwar so, daß der Punkt $z = 0$ mit dem Punkt $y = 1$ und der Punkt $z = 1$ mit dem Punkt $y = 10$ zusammenfallen (Abbildung 176.1). Jedem Punkt dieser Achse ist dann sowohl ein y- als auch ein z-Wert zugeordnet; dabei gilt $z = \lg y$. Eine nicht zu dieser Achse parallele Gerade hat im (x, z)-System eine Gleichung der Form $z = ax + b$. In den Koordinaten x und y hat diese Gerade die Gleichung $\lg y = ax + b$. Die Umformung $\lg y = ax + b \Leftrightarrow y = 10^{ax+b} \Leftrightarrow y = (10^a)^x \cdot 10^b$ zeigt, daß es sich um eine Gleichung der Form $y = C \cdot B^x$ handelt (mit $B := 10^a$ und $C := 10^b$), also um die Gleichung einer Exponentialfunktion. Dabei sind die Basis B und der Faktor C positiv. Damit haben wir folgendes Ergebnis:

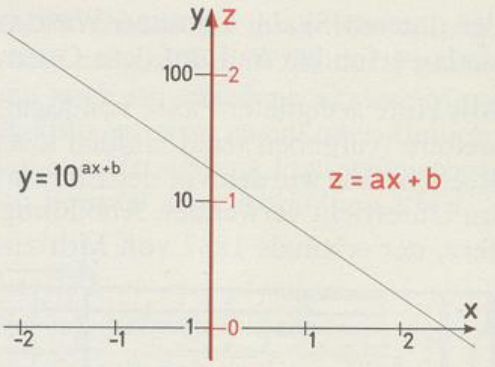

Abb. 176.1 Einfach-logarithmisches (x, y)-System und ein (x, z)-System mit äquidistant geteilten Achsen

> In einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem mit logarithmischer y-Skala ist eine Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist, der Graph einer Exponentialfunktion $x \mapsto C \cdot B^x$ mit $C > 0$ und $B > 0$.

Daß auch jede derartige Funktion in einem solchen Koordinatensystem durch eine Gerade dargestellt wird, folgt aus der Tatsache, daß jede positive Zahl in der Form 10^a bzw. 10^b dargestellt werden kann. Aus diesem Grunde heißt das einfach-logarithmische Papier auch Exponentialpapier. Abbildung 177.1 zeigt einige Beispiele.

c) Das doppelt-logarithmische Papier

Ein aus zwei logarithmischen Skalen gebildetes Koordinatensystem heißt doppelt-logarithmisch; Papiere, auf denen eine entsprechende Einteilung vorgedruckt ist, bezeichnet man als doppelt-logarithmische Papiere (Abbildung 176.2).

Welche Funktionen werden auf doppelt-logarithmischem Papier durch Geraden graphisch dargestellt? Wir denken uns an Stelle der x-Achse eine äquidistant geteilte t-Achse so, daß

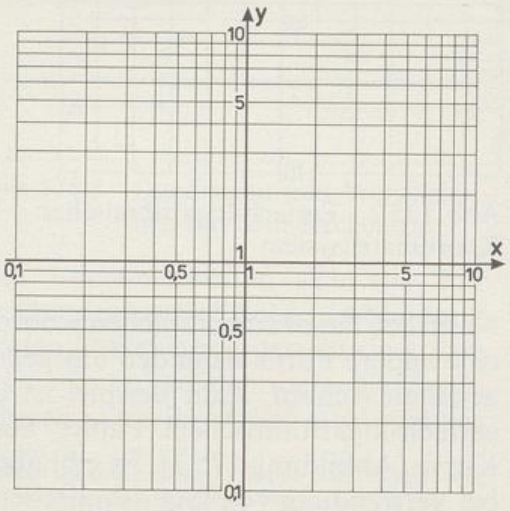

Abb. 176.2 Doppelt-logarithmisches Koordinatensystem

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

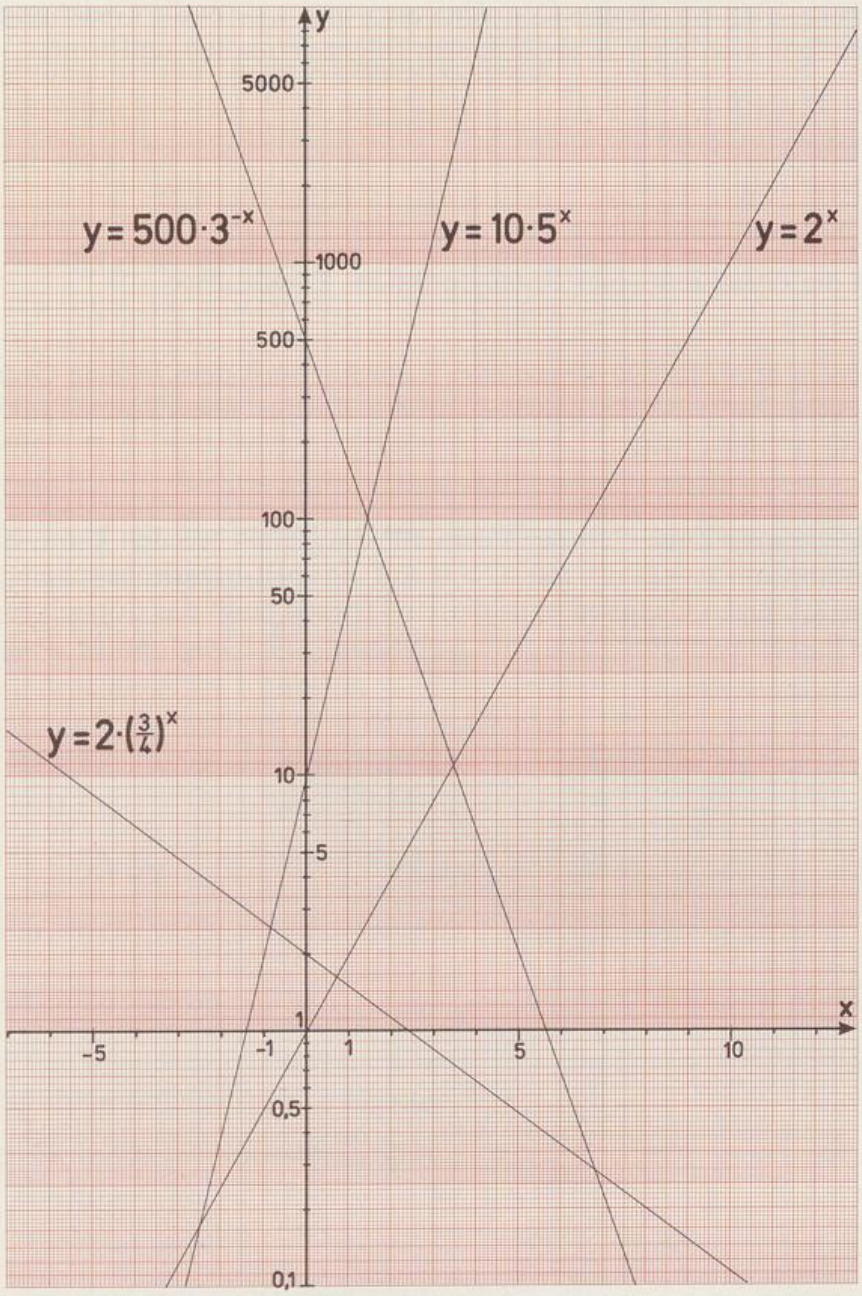

Abb. 177.1 Graphen von Exponentialfunktionen auf einfach-logarithmischem Papier

$t = 0$ mit $x = 1$ und $t = 1$ mit $x = 10$ übereinstimmt, ebenso an Stelle der y-Achse eine äquidistant geteilte z-Achse so, daß sich $z = 0$ und $y = 1$ sowie $z = 1$ und $y = 10$ entsprechen. Es gilt dann $t = \lg x$ und $z = \lg y$. Im (t, z)-System hat jede Gerade, die nicht zur z-Achse parallel ist, eine Gleichung

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

der Form $z = at + b$. In den Koordinaten x und y heißt die Gleichung dieser Geraden $\lg y = a \cdot \lg x + b$; sie läßt sich folgendermaßen umformen:

$\lg y = a \cdot \lg x + b$
$\lg y = \lg(x^a) + \lg(10^b)$
$\lg y = \lg(x^a \cdot 10^b)$
$y = C \cdot x^a$, mit $C := 10^b$, also $C > 0$.

Das ist die Gleichung einer Potenzfunktion. Es gilt also:

> In einem doppelt-logarithmischen Koordinatensystem ist eine Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist, der Graph einer Potenzfunktion $x \mapsto C \cdot x^a$ mit $C > 0$.

Da jede positive Zahl C in der Form 10^b dargestellt werden kann, hat jede Potenzfunktion $x \mapsto C \cdot x^a$ mit $C > 0$ auf doppelt-logarithmischem Papier einen geradlinigen Graphen. Aus diesem Grunde heißt das doppelt-logarithmische Papier auch Potenzpapier. Abbildung 178.1 zeigt einige Beispiele.

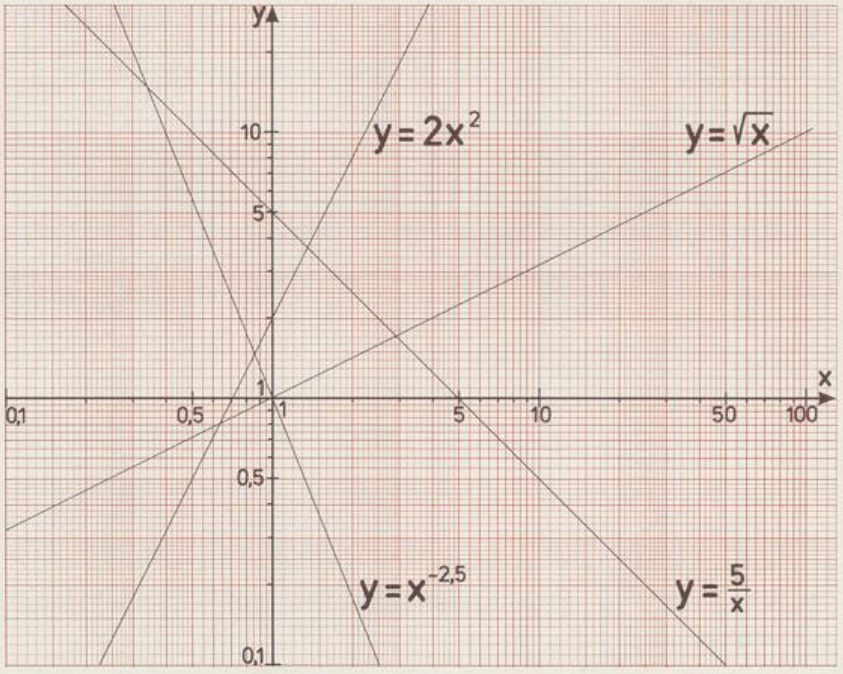

Abb. 178.1 Graphen von Potenzfunktionen auf doppelt-logarithmischem Papier

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aufgaben

1. Bestimme die maximale Definitionsmenge:

a) $x \mapsto \log_3 x$ **b)** $x \mapsto \log_5 |x|$ **c)** $x \mapsto \log_2 \sqrt{x}$

d) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(2x-5)$ **e)** $x \mapsto \log_4(2x+5)$ **f)** $x \mapsto \log_7 |2x-3|$

2. Welche maximale Definitionsmenge hat folgende Funktion?

a) $x \mapsto \lg(x^2+11)$ **b)** $x \mapsto \lg(x^2-1)$

c) $x \mapsto \log_{0,1}(x^2+2x+2)$ **d)** $x \mapsto \log_5(x^2+2x+1)$

e) $x \mapsto \log_{1,1}(x^2-4x-5)$ **f)** $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}|2x^2+7x-4|$

3. Gib zu den folgenden Funktionsgleichungen $y = f(x)$ jeweils eine Gleichung $x = f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion an.

a) $y = 2^x$ **b)** $y = (\frac{1}{3})^x$ **c)** $y = 5^{2x}$ **d)** $y = 0{,}1^{2-x}$

e) $y = \operatorname{ld} x$ **f)** $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ **g)** $y = \lg(-2x)$ **h)** $y = \log_{0,1}\sqrt{x}$

4. Zeichne den Graphen der Funktion.

a) $x \mapsto \log_3 x$ **b)** $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$ **c)** $x \mapsto \log_{0,6} x$ **d)** $x \mapsto \log_{\sqrt{3}} x$

5. Bestimme diejenige Funktion $x \mapsto \log_b x$, deren Graph den angegebenen Punkt enthält, und skizziere den Graphen.

a) A(8|3) **b)** B(8|1,5) **c)** C(8|−6)

d) D(0,25|2) **e)** E(5|$\frac{1}{2}$) **f)** F($\frac{1}{27}$|$-\frac{3}{4}$)

6. Kann man zu jedem Punkt der rechten Halbebene ($x > 0$) eine Funktion $x \mapsto \log_b x$ angeben, deren Graph den Punkt enthält? Gibt es Punkte, durch welche mehr als eine derartige Logarithmuskurve geht?

7. Zeichne die Graphen $y = \operatorname{ld} 5x$ und $y = \operatorname{ld}\frac{x}{5}$ und vergleiche sie mit dem Bild von $y = \operatorname{ld} x$. Welche Zusammenhänge vermutest du? Begründe deine Vermutung mit Hilfe der Rechengesetze.

8. Stelle folgende Funktionen graphisch dar:

a) $x \mapsto \operatorname{ld}(x-1)$ **b)** $x \mapsto \operatorname{ld} x - 1$

c) $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ **d)** $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x + 2$

9. Zeichne die Graphen der Funktionen f und g auf der jeweiligen maximalen Definitionsmenge.

a) $f(x) = 2\operatorname{ld} x, \quad g(x) = \operatorname{ld} x^2$

b) $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(2x-5), \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-5)^2$

c) $f(x) = 2\log_3|x-3|, \quad g(x) = \log_3(x-3)^2$

10. Werden durch die folgenden Paare von Zuordnungsvorschriften verschiedene Funktionen definiert? (Es soll jeweils die größtmögliche Definitionsmenge genommen werden.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

a) $x \mapsto 2\log_a x$ und $x \mapsto \log_a x^2$ **b)** $x \mapsto \frac{1}{2}\log_a x$ und $x \mapsto \log_a \sqrt{x}$

c) $x \mapsto 3\log_5 x$ und $x \mapsto \log_5 x^3$ **d)** $x \mapsto \lg(x+1)^2$ und $x \mapsto 4\lg\sqrt{x+1}$

e) $x \mapsto x$ und $x \mapsto \mathrm{ld}\, 2^x$ **f)** $x \mapsto \mathrm{ld}\, 2^x$ und $x \mapsto 2^{\mathrm{ld}\, x}$

g) $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto \log_3 3^{x^2}$ **h)** $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto 3^{2\log_3 x}$

11. Stelle die Funktionen $x \mapsto \log_2 x$, $x \mapsto \log_4 x$ und $x \mapsto \log_8 x$ graphisch dar. Welche geometrische Beziehung besteht zwischen den Graphen?

12. Zeichne das Bild der Funktion $x \mapsto \lg x$ und konstruiere daraus den Graphen einer neuen Funktion, indem du alle Ordinaten

a) verdoppelst **b)** verdreifachst **c)** halbierst.

Handelt es sich bei den neuen Kurven ebenfalls um die Graphen von Logarithmusfunktionen, und wenn ja, von welchen?

13. **a)** Gegeben sei der Graph $y = \mathrm{ld}\, x$ und ein beliebiger Punkt $P(x_1|y_1)$ mit $x_1 > 1$ und $y_1 > 0$. Zeichne den durch P verlaufenden Graphen einer Funktion $x \mapsto \log_b x$. (*Hinweis*: Nach der Umrechnungsregel von Satz 164.1 ist das Verhältnis der zu einer bestimmten Abszisse gehörenden Ordinaten der beiden Graphen konstant.)

b) Verwende anstatt des Punktes P einen Punkt $Q(x_2|y_2)$ mit $x_2 > 1$, $y_2 < 0$.

14. Für welche Werte von x sind die folgenden Funktionen definiert?

a) $f(x) = \mathrm{ld}(\mathrm{ld}\, x)$ **b)** $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} x)$ **c)** $f(x) = \lg(\log_{0,1} x)$

d) $f(x) = \log_3[\log_4(\log_5 x)]$ **e)** $f(x) = \log_2[\log_{0,4}(\log_3 x)]$

15. Löse folgende Gleichungen:

a) $\mathrm{ld}(\mathrm{ld}\, x) = 1$ **b)** $\log_5(\log_3 x) = 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4 x^2) = -1$ **d)** $\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(x^2 - 2x + 8)] = -2$

e) $\log_2[\log_3(\log_5 x)] = 0$ **f)** $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_{0,2} x)] = 1$

16. Welche Ungleichung besteht zwischen

a) $\mathrm{ld}\, 5$ und $\mathrm{ld}\, 7$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} 5$ und $\log_{\frac{1}{2}} 7$

c) $\log_7 \frac{3}{5}$ und $\log_7 \frac{5}{8}$ **d)** $\log_{0,2} 0{,}7$ und $\log_{\frac{1}{5}} 0{,}699$

e) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 15$ und $\log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} 0{,}15$ **f)** $\log_\pi 1$ und $\log_\pi \frac{12}{13}$?

17. Zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegen die folgenden Logarithmen?

a) $\log_5 100$ **b)** $\log_3 39$ **c)** $\lg 1{,}67$ **d)** $\lg 16{,}7$ **e)** $\lg 1670$

f) $\log_5 0{,}3$ **g)** $\mathrm{ld}\, 0{,}01$ **h)** $\lg 0{,}0011$ **i)** $\log_{0,3} 2$ **k)** $\log_{\frac{2}{3}} 7$

l) $\log_{0,5} 50$ **m)** $\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{8})$ **n)** $\log_{\frac{3}{7}}(\frac{3}{26})$ **o)** $\log_{0,5} 0{,}3$ **p)** $\log_{0,2} 0{,}05$

18. Löse folgende Ungleichungen:

a) $\log_5 x < \log_5 \sqrt{5}$ **b)** $\log_{0,3} x \leqq \log_{0,3} 11$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

c) $0 < \log_3 x < 3$ **d)** $\log_{\frac{1}{2}} 3 \geqq \operatorname{ld} \frac{1}{x} \geqq -3$

e) $\operatorname{ld}(2x+5) > \log_4(4x+1)$ **f)** $\log_{0,5}(2x+1) < \log_{\frac{1}{4}}(x+2)$

19. a) Zeichne unter Verwendung des dekadischen Logarithmus und der Längeneinheit 5cm eine logarithmische Skala für das Intervall $[1; 1000]$. Gib auf dieser Skala die den Zahlen 6; 350; $\sqrt{1000}$ und $\sqrt[3]{100}$ entsprechenden Punkte an.

b) Fertige für das Intervall $[\frac{1}{16}; 1024]$ eine auf der Funktion $x \mapsto \operatorname{ld} x$ beruhende logarithmische Skala mit der Längeneinheit 1 cm an. Trage darauf die Punkte $\sqrt{2}$, 5, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, 100 und 800 ein.

20. Auf der in Aufgabe **19.a)** beschriebenen logarithmischen Skala liege

a) der Punkt A 4cm rechts von der Marke 1,

b) der Punkt B in der Mitte zwischen den Marken 100 und 1000,

c) der Punkt C 32mm links von der Marke 100.

Bestimme die auf zwei Stellen nach dem Komma gerundeten Werte der diesen Punkten zugeordneten Zahlen a, b und c.

21. a) Wieviel Längeneinheiten beträgt auf einer dekadisch-logarithmischen Skala der Abstand zwischen den Punkten

1) 2 und 20 **2)** 0,46 und 460 **3)** $\sqrt{0{,}1}$ und $\sqrt{1000}$?

b) Begründe für eine beliebige logarithmische Skala (mit Basis b), daß auf ihr der Abstand zweier Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 > x_2$ dem dekadischen Logarithmus des Quotienten $x_1 : x_2$ proportional ist.

22. a) In Abbildung 181.1 sind die mit derselben Längeneinheit $\overline{OE}$ konstruierten logarithmischen Skalen mit Basis 10 und Basis 2 einander gegenübergestellt. Mit welchem Faktor muß man die erste Skala strecken (z.B. vom Punkt 1 aus), um den Abstand der Punkte 1 und 2 auf den gleichen Wert wie in der zweiten Skala zu bringen?

b) Zeige, daß das bei dieser Streckung entstehende Bild der ersten Skala zur zweiten Skala kongruent ist. (*Hinweis*: Betrachte die einer beliebigen Zahl $x > 0$ auf den beiden Skalen zugeordneten Punkte.)

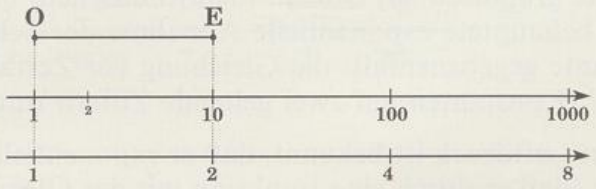

Abb. 181.1
Zu Aufgabe **22**

23. Konstruiere analog zu Abbildung 174.3 über dem Intervall $[1; 10]$ einer logarithmischen Skala eine »Kubikskala« so, daß man mit diesem Skalenpaar 3. Potenzen und 3. Wurzeln bestimmen kann.*

* Auf den meisten Rechenstäben ist eine solche Skala tatsächlich vorhanden, 1645 von Edmund WINGATE (1596–1656) eingeführt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

24. Stelle einer logarithmischen Skala des Intervalls [1; 10] eine »Kehrwertskala« gegenüber, auf der man unter dem Punkt x der ersten Skala die Zahl $\frac{1}{x}$ abliest. Zeige, daß es sich bei ihr wieder um eine logarithmische Skala handelt.*

25. **a)** Begründe, daß man die beiden Skalen von Abbildung 174.3 so einander gegenüberstellen kann, daß über der Marke x der unteren Skala der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius x abgelesen werden kann.

b) Welche Anordnung der Skalen liefert zum Durchmesser x den Flächeninhalt des Kreises?

26. Zeige, daß man mit zwei gleichen logarithmischen Skalen zu drei positiven Zahlen a, b, c die 4. Proportionale, d.h. die Lösung der Gleichung $a:b = c:x$, bestimmen kann. (*Hinweis*: Vgl. Abbildung 174.2.)

27. Stelle in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem mit logarithmisch geteilter y-Achse folgende Funktionen graphisch dar:

a) $x \mapsto 3^x$ **b)** $x \mapsto 0{,}2^x$ **c)** $x \mapsto 20 \cdot 1{,}5^x$

d) $x \mapsto 50 \cdot (\frac{7}{8})^x$ **e)** $x \mapsto 10 \cdot 2^{-x}$ **f)** $x \mapsto 0{,}2 \cdot 0{,}5^{-x}$

28. Welche Funktion hat in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem mit logarithmischer y-Skala als Graphen die Verbindungsgerade der Punkte

a) P(0|100) und Q(2|1) **b)** R(0|1) und S(4|100)

c) T(0|80) und U(−3|10) **d)** V(1|2) und W(−5|128)?

29. Angeblich soll in einem frisch eingeschenkten Glas Bier die Höhe des Schaums exponentiell mit der Zeit abnehmen. Hans will dies nachprüfen. Er schenkt ein Glas Bier ein und mißt in Abständen von einer halben Minute die Schaumhöhe. Dabei erhält er folgende Meßreihe:

t [in min]	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
h [in mm]	80	56	39	27	19	13	9	7	5	3	2

Prüfe graphisch auf einfach-logarithmischem Papier, ob diese Meßreihe die behauptete exponentielle Abnahme der Schaumhöhe bestätigt. Wie könnte gegebenenfalls die Gleichung der Zerfallsfunktion $t \mapsto h(t)$ lauten? (Konstanten auf zwei geltende Ziffern runden.)

30. Vom Luftdruck ist bekannt, daß er exponentiell mit der Höhe abnimmt, d.h., daß er durch eine Funktion mit der Gleichung $p(h) = p_0 \cdot b^{-h}$, mit $b > 1$, beschrieben werden kann. Bei einem Ballonaufstieg wird in 1 km Höhe der Druck $p_1 = 879$ hPa und in 5 km Höhe der Druck $p_2 = 533$ hPa gemessen. Wie groß ist an diesem Tag der Luftdruck p_0 am Boden? Mit

* Auf den meisten Rechenstäben ist eine solche Skala tatsächlich vorhanden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

welchem Druck ist in 10 km Höhe zu rechnen? Löse die Aufgabe auf einfach-logarithmischem Papier.

31. a) Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto \mathrm{ld}\, x$ in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem, dessen x-Achse logarithmisch geteilt ist. Welche Vermutung legt das Ergebnis nahe?

• **b)** Beweise, daß der Graph einer Logarithmusfunktion mit der Gleichung $y = \log_b x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer x-Skala und äquidistant geteilter y-Skala stets eine Gerade ist.

32. Die Höhe über dem Erdboden kann aus dem Luftdruck nach der Formel $h = 18{,}4\,\mathrm{km} \cdot \lg\left(\frac{p_0}{p}\right)$ bestimmt werden; dabei ist p_0 der Luftdruck am Boden. In welcher Höhe befindet sich an einem Tag mit $p_0 = 1010\,\mathrm{hPa}$ ein Meßballon, wenn ein mitgeführtes Barometer folgenden Druck anzeigt:

a) 900 hPa **b)** 800 hPa **c)** 400 hPa **d)** 200 hPa **e)** 150 hPa?

Löse die Aufgabe graphisch auf einfach-logarithmischem Papier.

33. Zeichne auf doppelt-logarithmischem Papier die Graphen folgender Funktionen:

a) $x \mapsto x^3$ **b)** $x \mapsto 2\sqrt{x^3}$ **c)** $x \mapsto \left(\frac{2}{x}\right)^{1,5}$ **d)** $x \mapsto 5\sqrt[3]{x^2}$

34. a) Eine Potenzfunktion $x \mapsto Cx^{\varrho}$ hat für $x = 0{,}2$ den Wert $y = 0{,}4$ und für $x = 20$ den Wert $y = 10$. Bestimme mit Hilfe von doppelt-logarithmischem Papier näherungsweise den Funktionswert für

1) $x = 1$ **2)** $x = 2$ **3)** $x = 10$ **4)** $x = 40$.

⁝ **b)** Bestimme für die in **a)** definierte Funktion die Konstanten C und ϱ durch Rechnung.

35. Prüfe graphisch, ob die folgende Tabelle von Meßwerten einer Potenzfunktion entspricht.

a)

x	2	5	10	20	30	50
y	3,8	6,6	10,0	15,1	19,2	26,1

b)

x	0,5	1	2	4	6	10
y	0,42	0,53	0,85	2,2	5,7	37

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN