Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

7.5 Exponentialgleichungen und Logarithmusgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

7.5 Exponentialgleichungen und Logarithmusgleichungen

7.5.1 Exponentialgleichungen

Bestimmungsgleichungen, bei denen die Unbekannte nur in den Exponenten von Potenzen vorkommt, nennt man **Exponentialgleichungen**. Bei einfachen Gleichungen dieser Art kann man die Lösungen exakt bestimmen. Grundlage dafür ist

> **Satz 184.1:** Die Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = \log_b a$.

Daß $\log_b a$ eine Lösung der Gleichung $b^x = a$ ist, beruht auf der Definition des Logarithmus (Definition 155.1), daß es die einzige Lösung ist, wurde schon in Satz 155.1 festgestellt.

Beispiel 1:

$5^x = 12$ hat die Lösung $x = \log_5 12$.

Den Übergang von der ersten zur zweiten Gleichung deuten wir so, daß von beiden Seiten der Gleichung der Logarithmus zur Basis 5 gebildet wird. Man nennt diesen Schritt **Logarithmieren der Gleichung**. Wir schreiben dafür

$$\begin{aligned} 5^x &= 12 \qquad \| \log_5 \\ x &= \log_5 12 \end{aligned}$$

Beim praktischen Rechnen, z.B. mit dem Taschenrechner, bevorzugt man den dekadischen Logarithmus. Man erhält dann folgenden Lösungsweg:

$$\begin{aligned} 5^x &= 12 \qquad \| \lg \\ x \cdot \lg 5 &= \lg 12 \qquad \| : \lg 5 \\ x &= \frac{\lg 12}{\lg 5} \approx 1{,}544 \end{aligned}$$

Daß die so gefundene Lösung mit $\log_5 12$ übereinstimmt, folgt aus Satz 164.1.

Beispiel 2:

Bei der Gleichung $16^x = 128$ kann man beide Seiten als Potenzen mit gleicher Basis darstellen. Das Logarithmieren der Gleichung läuft dann einfach auf das Gleichsetzen der Exponenten hinaus:

$$\begin{aligned} 16^x &= 128 \\ 2^{4x} &= 2^7 \qquad \| \log_2 \\ 4x &= 7 \\ x &= \tfrac{7}{4} \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$1{,}5^{2x+1} = 7^{-x}$

Hier steht auf beiden Seiten eine Potenz, deren Exponent die Unbekannte enthält. Durch Logarithmieren erhält man eine lineare Gleichung für x.

$$1{,}5^{2x+1} = 7^{-x} \quad \| \lg$$
$$(2x+1)\cdot \lg 1{,}5 = -x \cdot \lg 7$$
$$x(2\cdot \lg 1{,}5 + \lg 7) = -\lg 1{,}5$$
$$x = \frac{-\lg 1{,}5}{2\cdot \lg 1{,}5 + \lg 7} \approx -0{,}1471$$

Beispiel 4:

$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$

Da rechts eine Differenz steht, führt Logarithmieren nicht weiter. Man kann aber jedes der beiden Glieder, welche die Unbekannte enthalten, durch die Potenz 3^x ausdrücken.

$$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$
$$5 \cdot (3^x)^2 = 3^3 \cdot 3^x - 34$$

Mit der Substitution $z = 3^x$ erhält man eine quadratische Gleichung für z.

$$5z^2 - 27z + 34 = 0$$

Sie hat die Lösungen $z_1 = 2$ und $z_2 = 3{,}4$. Beide Lösungen sind positiv und kommen somit als Werte der Potenz 3^x in Betracht. Damit gilt

$$3^x = 2 \quad \vee \quad 3^x = 3{,}4$$
$$x = \frac{\lg 2}{\lg 3} \quad \vee \quad x = \frac{\lg 3{,}4}{\lg 3};$$

$x_1 \approx 0{,}6309$ und $x_2 \approx 1{,}114$, jeweils auf vier geltende Ziffern gerundet.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge. Gib für irrationale Lösungen auch den auf vier geltende Ziffern gerundeten Näherungswert an.

1. a) $7^x = 343$ b) $3^x = 11$ c) $(\frac{3}{7})^x = 10$ d) $1{,}2^x - 0{,}6 = 0$
2. a) $4^{x-5} = 6$ b) $8^{2x-3} = 32$ c) $5^{x^2-1} = 1$ d) $0{,}4^{3-x} = 0{,}5$
3. a) $2^x = 8^{x-2}$ b) $3{,}1^{2x} = 2 \cdot 31^x$ c) $10 \cdot (\frac{5}{9})^{4-x} = 2^{2x+1}$
4. a) $3^x \cdot 5^{x-1} = 1$ b) $4^{2x-3} \cdot 32^{1-x} = \frac{1}{8}$

   c) $\dfrac{2^{5x}}{7^{x+2}} = 10$ d) $(\sqrt{2})^{x+3} = \dfrac{3 \cdot 13^{4-x}}{(\sqrt{5})^x}$

5. **a)** $4 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 0{,}5^{-x}$ **b)** $5^{x^2+3} = 25 \cdot 0{,}2^{x-1}$

6. **a)** $7^{2x+1} - 40 \cdot 7^x = 63$ **b)** $9 \cdot (\frac{2}{3})^{2x+1} + 54 \cdot (\frac{2}{3})^{x-1} - 42 = 0$

7. **a)** $25^x = 15 \cdot 5^x - 50$ **b)** $3^x + 9^x = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

8. **a)** $4^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+3} - 24 = 0$ **b)** $(\frac{1}{2})^{x-1} \cdot (8^{x+1} - 4^5) = 16(4^x - 8)$

9. Im Jahre 1990 lebten auf der Erde 5,3 Milliarden Menschen. Die jährliche Wachstumsrate betrug etwa 1,5%.

a) In welchem Jahr würde bei gleichbleibender Wachstumsrate die Weltbevölkerung

1) auf 6,0 Milliarden anwachsen

2) doppelt so groß wie 1990 werden?

b) In welcher Zeit nimmt bei der Wachstumsrate 1,5% die Bevölkerungszahl von 1990

1) um 1 Million zu (Einwohnerzahl einer Großstadt)

2) um 77 Millionen zu (Bevölkerungszahl Deutschlands)?

7.5.2 Logarithmusgleichungen

Eine Bestimmungsgleichung, bei der die Unbekannte nur im Argument von Logarithmen auftritt, bezeichnet man als **Logarithmusgleichung**. Auch solche Gleichungen lassen sich in einfachen Fällen exakt lösen. Grundlage dafür ist

Satz 186.1: Die Gleichung $\log_b x = \varrho$ mit $b > 0$, $b \neq 1$ und $\varrho \in \mathbb{R}$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = b^{\varrho}$.

Dies folgt aus der echten Monotonie der Funktion $x \mapsto \log_b x$ und der Tatsache, daß diese Funktion die Wertemenge $\mathbb{R}$ hat.

Beispiel 1:

$\log_4 x = 5$ hat die Lösung $x = 4^5$.

Den Übergang zur zweiten Gleichung kann man so deuten, daß man jede Seite der Ausgangsgleichung zum Exponenten einer Potenz mit der Basis 4, also der Basis des Logarithmus, macht. Wir schreiben

$$\log_4 x = 5 \qquad \| 4^{\cdots}$$
$$4^{\log_4 x} = 4^5$$
$$x = 1024$$

Diese Umformung, bei der der Logarithmus »beseitigt wird«, bezeichnet man als **Delogarithmieren der Gleichung**.

Beispiel 2:

$\lg(2x+3)+\lg(1-x)-\lg(1-4x)=0$

Hier muß man zuerst die linke Seite zu einem einzigen Logarithmusterm zusammenfassen:

$$\lg\frac{(2x+3)(1-x)}{1-4x}=0 \qquad \| 10^{\cdots}$$

$$\frac{(2x+3)(1-x)}{1-4x}=1 \qquad \| \cdot(1-4x)$$

$$2x^2-3x-2=0$$

$$x_1=2; \quad x_2=-0{,}5$$

Da die Zusammenfassung von Logarithmen keine Äquivalenzumformung zu sein braucht, wenn man jeweils die maximale Definitionsmenge zugrundelegt, muß man die Probe machen. Sie zeigt, daß nur x_2 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Beispiel 3:

$\log_9(x^2+1)=\log_3(2x-1)$

Hier muß man zuerst Logarithmen mit gleicher Basis herstellen:

$$\frac{\log_3(x^2+1)}{\log_3 9}=\log_3(2x-1)$$

$$\log_3(x^2+1)=2\cdot\log_3(2x-1) \qquad \| 3^{\cdots}$$

$$x^2+1=(2x-1)^2$$

$$3x^2-4x=0$$

$$x_1=0; \quad x_2=\tfrac{4}{3}$$

Die Probe zeigt, daß nur x_2 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge. Gib für irrationale Lösungen auch den auf vier geltende Ziffern gerundeten Näherungswert an.

1. **a)** $\log_3 x=1{,}5$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} x=8$ **c)** $\lg x=0{,}1$

2. Alle Gleichungen sollen auf der jeweils maximalen Definitionsmenge betrachtet werden.
   a) Zeige an Hand der Lösungsmengen, daß die Gleichungen
   $\lg[(x+4)(x+1)]=1$ und $\lg(x+4)+\lg(x+1)=1$
   nicht äquivalent sind.
   b) Sind die Gleichungen $\log_3(x-8)-\log_3(1-2x)+1=0$ und
   $\log_3\dfrac{x-8}{1-2x}+1=0$ äquivalent?

c) Begründe, daß für die Lösungsmengen L_1 und L_2 der Gleichungen
(1) $\log_b[(rx+s)(ux+v)] = c$ und
(2) $\log_b(rx+s) + \log_b(ux+v) = c$
gilt: L_2 ist (echte oder unechte) Teilmenge von L_1.

3. a) $\lg(7x+2) = 1 + \lg(x-4)$
b) $\mathrm{ld}(x^2-1) - \mathrm{ld}(4x-1) + \mathrm{ld}\,3 = 0$

4. a) $\log_6(5x-4) - \log_6(3+x) + \log_6(2x+1) = 1$
b) $\lg 2 + \lg(x+2) + \lg(3x+5) = \lg(5x^2-1)$
c) $\lg 2 + \lg[(x+2)(3x+5)] = \lg(5x^2-1)$

5. a) $\log_5(3x+4) - \log_{25}(4x-3) = 1$
b) $\lg(x^2+4) - \log_{\sqrt{10}}(3x+2) = 0$

6. a) $\log_5(x^2-5x+1) = 1 + \log_5(3x-10)$
b) $\lg(2x^2+x-5) + \log_{0,1}(x^2+1) = \lg 2$

7.5.3 Graphische und numerische Lösungsverfahren

Die in den bisherigen Beispielen betrachteten Exponential- und Logarithmusgleichungen ließen sich durch Logarithmieren bzw. Delogarithmieren oder mit Hilfe einer Substitution auf einfachere Gleichungstypen zurückführen, für die uns exakte Lösungsverfahren bekannt sind. Es gibt aber auch Gleichungen, bei denen eine solche Vereinfachung nicht möglich ist. Dann muß man sich damit begnügen, für die Lösungen hinreichend gute Näherungswerte zu bestimmen. Das kann durch graphische Lösungsmethoden, durch lineare Interpolation oder durch ein geeignetes Iterationsverfahren geschehen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 1:
$1 + 2^x - 3^{-x} = 0$

a) Graphische Lösung: Man bringt die Gleichung z.B. auf die Form $1 + 2^x = 3^{-x}$ und sucht die x-Werte, für welche die Funktionen $x \mapsto 1 + 2^x$ und $x \mapsto 3^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, gleichen Funktionswert haben. Zeichnet man die Graphen $y = 1 + 2^x$ und $y = 3^{-x}$, so ergeben sich diese x-Werte als die Abszissen der gemeinsamen Punkte beider Kurven. Abbildung 189.1 zeigt, daß in diesem Fall genau ein solcher Punkt existiert; für seine Abszisse liest man $x \approx -0{,}5$ ab.

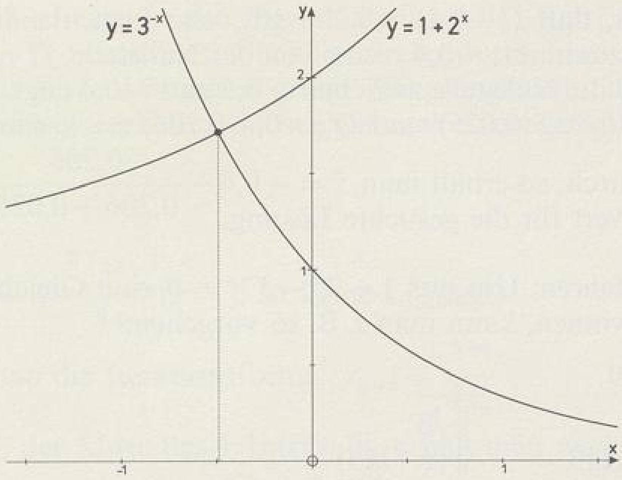

Abb. 189.1 Graphische Lösung der Gleichung $1 + 2^x - 3^{-x} = 0$

b) Lineare Interpolation: Man berechnet für die Funktion $f: x \mapsto 1 + 2^x - 3^{-x}$ eine Wertetabelle, etwa

x	-2	-1	0	1	2
y	$-7{,}75$	$-1{,}5$	1	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{8}{9}$

Offensichtlich liegt zwischen -1 und 0 eine Nullstelle der Funktion, also eine Lösung der gegebenen Gleichung. Wir ersetzen den Graphen zwischen den Punkten $(-1|-1{,}5)$ und $(0|1)$ durch die Strecke und berechnen deren Schnittpunkt mit der x-Achse.

Hat man allgemein zwei Punkte $P(x_1|y_1 < 0)$ und $Q(x_2|y_2 > 0)$ und ist $S(\bar{x}|0)$ der Schnittpunkt der Geraden PQ mit der x-Achse, so kann man die Steigung dieser Geraden sowohl aus dem Steigungsdreieck $\triangle$ STQ als auch aus $\triangle$ PRQ bestimmen (Abbildung 189.2) und erhält die Gleichung

$$\frac{y_2 - 0}{x_2 - \bar{x}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Deren Auflösung nach $\bar{x}$ ergibt

$$\bar{x} = x_2 - \frac{y_2}{y_2 - y_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

In unserem Beispiel erhält man so für die Lösung der Gleichung den Näherungswert

$$\bar{x} = 0 - \frac{1}{1 + 1{,}5} \cdot 1 = -0{,}4.$$

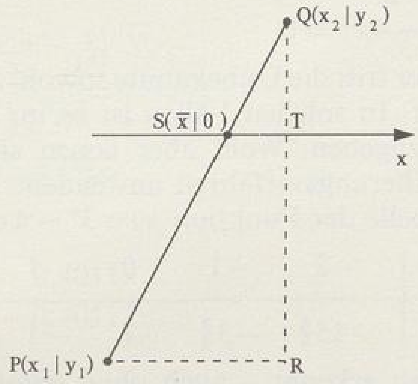

Abb. 189.2 Zur linearen Interpolation

Die Probe zeigt, daß $f(-0{,}4) \approx 0{,}206$ gilt; also liegt, da die Funktion in diesem Bereich zunimmt, $-0{,}4$ rechts von der Nullstelle. $f(-0{,}5) \approx -0{,}025$ zeigt weiter, daß die Nullstelle zwischen $-0{,}5$ und $-0{,}4$ liegt. Führt man mit den Punkten $P'(-0{,}5|0{,}025)$ und $Q'(-0{,}4|0{,}206)$ noch einmal die lineare Interpolation durch, so erhält man $\bar{x} = -0{,}4 - \dfrac{0{,}206}{0{,}206 + 0{,}025} \cdot 0{,}1 \approx -0{,}49$ als genaueren Wert für die gesuchte Lösung.

c) Iterationsverfahren: Um aus $1 + 2^x - 3^{-x} = 0$ eine Gleichung der Form $x = g(x)$ zu gewinnen, kann man z. B. so vorgehen:

$$\begin{aligned}
&1 + 2^x - 3^{-x} = 0 && \\
&1 + 2^x = 3^{-x} && \| \lg \\
&\lg(1 + 2^x) = -x \lg 3 && \| :(-\lg 3) \\
&x = -\frac{\lg(1 + 2^x)}{\lg 3} &&
\end{aligned}$$

Mit der Iterationsformel $x_{n+1} = -\dfrac{\lg(1 + 2^{x_n})}{\lg 3}$ und $x_0 = -0{,}5$ erhält man:

$x_1 = -0{,}486\ldots$	$x_3 = -0{,}4893\ldots$	$x_5 = -0{,}48952\ldots$
$x_2 = -0{,}490\ldots$	$x_4 = -0{,}48958\ldots$	$x_6 = -0{,}489539\ldots$

Daraus kann man bereits einen sehr genauen Näherungswert für die gesuchte Lösung entnehmen: $x \approx -0{,}4895$. Die Zahlen x_n lassen sich sehr einfach mit dem Taschenrechner berechnen; Abbildung 190.1 zeigt eine dafür geeignete Tastenfolge. Natürlich läßt sich ein Iterationsverfahren besonders gut mit einem programmierbaren Rechner durchführen.

$\boxed{x_0}$ $\boxed{\mathrm{M}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\mathrm{MR}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$

Abb. 190.1 Zum Lösen der Gleichung $1 + 2^x - 3^{-x} = 0$ mit dem Taschenrechner

Beispiel 2:

$3^x - 4x^2 = 0$

Hier tritt die Unbekannte sowohl als Exponent als auch als Basis einer Potenz auf. In solchen Fällen ist es im allgemeinen unmöglich, exakte Lösungen anzugeben. Wohl aber lassen sich auch hier die in Beispiel 1 benützten Näherungsverfahren anwenden. Man beginnt am besten mit einer Wertetabelle der Funktion $x \mapsto 3^x - 4x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-15\frac{8}{9}$	$-3\frac{2}{3}$	1	-1	-7	-9	17	25

Man erkennt – auch ohne graphische Darstellung –, daß der Graph die x-Achse mindestens dreimal schneidet, die Gleichung also mindestens drei

Lösungen hat. Sie liegen in den Intervallen $]-1;0[$, $]0;1[$ und $]3;4[$ und seien mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezeichnet. Graphisch oder durch lineare Interpolation könnte man für diese Lösungen grobe Näherungswerte bestimmen. Um genauere Ergebnisse zu erhalten, suchen wir nach einem geeigneten Iterationsverfahren.

1. Versuch:

$$3^x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3^x}{4x} \quad (x = 0 \text{ ist keine Lösung!})$$

Damit erhält man die Iterationsformel $x_{n+1} = \dfrac{3^{x_n}}{4x_n}$. $\qquad (\mathrm{I}_1)$

Mit $x_0 = -0{,}5$, der Mitte des 1. Intervalls, erhält man nach (I_1)

$x_1 = -0{,}288\ldots$	$x_3 = -0{,}198\ldots$
$x_2 = -0{,}630\ldots$	$x_4 = -1{,}01\ldots$

Die Werte »laufen auseinander«; (I_1) ist für die Berechnung von ξ_1 ungeeignet.

Mit $x_0 = 0{,}5$, der Mitte des 2. Intervalls, erhält man aus (I_1)

$x_1 = 0{,}866\ldots$	$x_5 = 0{,}75844\ldots$
$x_2 = 0{,}747\ldots$	$x_6 = 0{,}75837\ldots$
$x_3 = 0{,}760\ldots$	$x_7 = 0{,}758389\ldots$
$x_4 = 0{,}758\ldots$	$x_8 = 0{,}758387\ldots$

Für die in $]0;1[$ liegende Lösung ξ_2 gilt also $\xi_2 = 0{,}75838\ldots \approx 0{,}7584$.

Mit $x_0 = 3{,}5$, der Mitte des 3. Intervalls, erhält man aus (I_1)

$x_1 = 3{,}340\ldots$
$x_2 = 2{,}937\ldots$
$x_3 = 2{,}144\ldots$

und erkennt, daß (I_1) zur Berechnung von ξ_3 unbrauchbar ist.

Zur Bestimmung von ξ_1 und ξ_3 benötigt man also andere Iterationsformeln.

2. Versuch:

$$3^x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3^x}{4} \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3^x} \vee x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3^x}.$$

Das ergibt für $x > 0$ die Iteration $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{3^{x_n}} \qquad (\mathrm{I}_2)$

und für $x < 0$ die Iteration $\quad x_{n+1} = -\frac{1}{2}\sqrt{3^{x_n}}. \qquad (\mathrm{I}_3)$

Mit $x_0 = -0{,}5$ erhält man aus (I_3)

$x_1 = -0{,}379\ldots$	$\ldots$	$x_6 = -0{,}40113\ldots$
$x_2 = -0{,}405\ldots$		$x_7 = -0{,}40112\ldots$

Damit hat man bereits $\xi_1 \approx -0{,}4011$ gefunden.
Dagegen erweist sich (I_2) zur Berechnung von ξ_3 wieder als ungeeignet!

3. Versuch:

$3^x - 4x^2 = 0$

$3^x = 4x^2 \qquad \| \lg$

$x \lg 3 = \lg(4x^2) \qquad \| : \lg 3$

$$x = \frac{\lg(4x^2)}{\lg 3}$$

Die entsprechende Iterationsformel lautet $x_{n+1} = \dfrac{\lg(4x_n^2)}{\lg 3}$. $\qquad (\mathrm{I}_4)$

Mit $x_0 = 3{,}5$ erhält man daraus

$x_1 = 3{,}542\ldots$	$\ldots$	$x_{10} = 3{,}5872\ldots$
$x_2 = 3{,}564\ldots$		$x_{11} = 3{,}5873\ldots$

Da die Werte immer noch leicht ansteigen, ist man noch nicht sicher, ob beim Runden auf 4 Ziffern die 7 erhalten bleibt. Man kann dies prüfen, indem man $x = 3{,}587$ und $x = 3{,}5875$ in die linke Seite der zu lösenden Gleichung, also in $f(x) = 3^x - 4x^2$, einsetzt. Aus $f(3{,}587) = -0{,}01\ldots$ und $f(3{,}5875) = +0{,}003\ldots$ folgt, daß ξ_3 zwischen diesen beiden x-Werten liegt und somit $\xi_3 \approx 3{,}587$ gilt.

Aufgaben

1. Bestimme Näherungswerte für die Lösungen nach der graphischen Methode. (Längeneinheit 1 cm; eine Stelle nach dem Komma)
   a) $2^x + 8x - 7 = 0$ **b)** $1{,}5^x + x^2 = 2$ **c)** $1 - x + (\frac{1}{3})^x = 0$

2. Berechne mit Hilfe eines Iterationsverfahrens die auf vier geltende Ziffern gerundeten Lösungen der Gleichung von
   a) Aufgabe **1.a)** **b)** Aufgabe **1.b)** **c)** Aufgabe **1.c)**.

3. **a)** Bestimme graphisch Näherungswerte für die beiden Lösungen der Gleichung $0{,}5x^2 - 1 = \lg x$.
   b) Begründe, daß die in **a)** angegebene Gleichung auf die äquivalente Form $x = \sqrt{2(\lg x + 1)}$ gebracht werden kann, und benütze diese zur iterativen Berechnung des auf vier geltende Ziffern gerundeten Wertes der größeren der beiden Lösungen. Kann man mit dieser Iteration auch die zweite Lösung berechnen?
   c) Zeige, daß sich die Gleichung $0{,}5x^2 - 1 = \lg x$ nach Multiplikation mit $2x$ auf die Form $x = \dfrac{2x \cdot \lg x}{x^2 - 2}$ bringen läßt, und berechne damit den auf vier geltende Ziffern gerundeten Wert der zweiten Lösung.

4. **a)** Bestimme an Hand einer graphischen Darstellung näherungsweise die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Graphen $y = x^{-1}$ und $y = \lg(x - 2)$.

b) Berechne durch Iteration die auf Hundertstel gerundete Abszisse von S. Wie lautet die ebenso gerundete Ordinate von S?

5. Ermittle mit einer Wertetabelle die Lage der Nullstellen der Funktion. Suche geeignete Iterationsformeln zur Berechnung dieser Nullstellen und bestimme jeweils die auf vier geltende Ziffern gerundeten Werte.

a) $x \mapsto 10^x + 2^x - 9$ **b)** $x \mapsto 5 - x \cdot 2^{4-x}$

c) $x \mapsto \lg(2x - 1) + 3x - 5$ **d)** $x \mapsto \lg(x^2 + 1) + \operatorname{ld}(5 - x)$

• 6. Berechne die auf vier Stellen nach dem Komma gerundeten Näherungswerte der Lösungen.

a) $x - \cos x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}$ **b)** $\sin x - x^2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

c) $x^2(1 + \tan x) = 1 \wedge x \in [0; \frac{1}{2}\pi[$

• 7. Mit den von einer Schallquelle ausgesandten Wellen wird Energie transportiert. Unter der *Schallintensität* J an einer bestimmten Stelle versteht man die dort auf eine Fläche von $1\,\mathrm{m}^2$ entfallende Schalleistung; die Maßeinheit für J ist also $1\,\mathrm{W m^{-2}}$.

Von einer Schallintensität zu unterscheiden ist die beim Hören empfundene *Lautstärke* L. Eine Verdoppelung der Intensität J empfindet unser Gehör keineswegs als Verdoppelung der Lautstärke L. Auch gibt es einen *Schwellenwert* J_0 der Schallintensität, unterhalb dessen der Schall nicht mehr hörbar ist. Aus dem für Sinnesreize geltenden Weber-Fechnerschen Gesetz* folgt für den Zusammenhang zwischen Schallintensität und Lautstärke die Beziehung $L = k \lg \frac{J}{J_0}$, $k \in \mathbb{R}^+$. Für den Proportionalitätsfaktor k hat man die Zahl 10 festgelegt; also: $L = 10 \lg \frac{J}{J_0}$ phon.

Dabei ist phon keine physikalische Benennung: das Hinweiswort **Phon**** (Kurzzeichen phon) soll nur an die logarithmische Definition der unbenannten Zahl L und an ihre Verwendung in der Akustik erinnern.

a) Wie groß ist die Schallintensität J im Abstand r von der Schallquelle, wenn diese nach allen Seiten gleichmäßig die Leistung P abgibt?

b) Welcher Wert der Lautstärke L entspricht dem Schwellenwert J_0 der Schallintensität?

c) Wie groß ist J, ausgedrückt durch J_0, bei der Lautstärke

1) 10 phon (Ticken einer Taschenuhr in 4 m Abstand)

2) 40 phon (normales Sprechen bei 2 m Abstand)

* Das Weber-Fechnersche Gesetz besagt: Die Empfindungsstärke E eines Reizes ist proportional zum Logarithmus des Quotienten aus der Reizstärke R und der Schwellenreizstärke R_0; d.h., $E = k \cdot \lg \frac{R}{R_0}$.

Ernst Heinrich Weber (24.6.1795 Wittenberg – 26.1.1878 Leipzig) war Physiologe und Anatom.
Gustav Theodor Fechner (19.4.1801 Groß-Särchen bei Muskau/Lausitz – 18.11.1887 Leipzig) war Physiker, Psychologe und Philosoph.

** Das Hinweiswort Phon, vom griechischen φωνή (phonē) = *Laut*, wurde 1926 von dem deutschen Physiker Heinrich Georg Barkhausen (2.12.1881 Bremen – 20.2.1956 Dresden) eingeführt.

3) 80 phon (starker Straßenlärm)
4) 130 phon (Schmerzgrenze, bleibende Gehörschädigung!)?

d) Eine Schallquelle gibt einen bestimmten Ton mit gleichbleibender Leistung ab. In 1 m Entfernung beträgt die Lautstärke 40 phon. Wie weit muß man sich von der Schallquelle entfernen, um den Ton nicht mehr zu hören?

e) Der Lärm eines Flugzeugmotors wird in 400 m Entfernung mit 80 phon gemessen. Wie groß ist die Lautstärke für einen Flugpassagier, der sich beim Einsteigen dem Triebwerk auf 10 m nähert?

f) Die Schwellenintensität J_0 für die Schallwahrnehmung hängt von der Tonfrequenz ab. Im Bereich von 1000 Hz bis 2000 Hz ist sie besonders klein, bei sehr hohen und sehr tiefen Tönen wesentlich größer. Für die Frequenz 1000 Hz gilt $J_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$ (mittlerer Wert für Jugendliche!).

1) Welche Lautstärke entspricht bei einem Ton mit 1000 Hz der Schallintensität $J = 8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$?

2) Welche Schallintensitäten ergeben bei einem Ton von 1000 Hz die Lautstärken 1 phon, 20 phon, 100 phon, 130 phon?

3) Ein Lautsprecher strahlt mit der Leistung 5 W einen Ton von 1000 Hz gleichmäßig nach allen Seiten ab. Mit welchen Lautstärken hört man diesen Ton in 5 m, 10 m und 50 m Entfernung?

g) Bei einem Ton von 125 Hz ist die Schwellenintensität $J_0 = 10^{-9}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$. Welche Schallintensitäten gehören bei diesem Ton zu den Lautstärken von Aufgabe **f) 2)**?

•**8.** In der Praxis muß Schall häufig verstärkt bzw. gedämpft werden. Wird z. B. eine Intensität J_1 auf den kleineren Wert J_2 gedämpft, so gibt man als Maß der Dämpfung die Zahl $\beta = 10 \cdot \lg \frac{J_1}{J_2}$ Dezibel an. Das Hinweiswort **Dezibel***, abgekürzt mit dB, bezeichnet keine physikalische Maßeinheit, sondern dient nur zur Erinnerung an die logarithmische Definition der unbenannten Dämpfungszahl β.

a) Wie verhalten sich die Schallintensitäten J_1 und J_2 bei einer Dämpfung von 5 dB?

b) Wieviel Dezibel beträgt die Verstärkung, wenn die Schallintensität
1) verdoppelt **2)** verzehnfacht **3)** verhundertfacht wird?

c) Ein Tonsignal mit der Leistung 0,05 W wird durch einen Verstärker um 20 dB verstärkt. Welche Leistung hat das verstärkte Signal?

d) Um wieviel phon verändert sich die Lautstärke (vgl. Aufgabe **7**), wenn die Schallintensität um n dB verstärkt (gedämpft) wird?

* Die Bezeichnungen Bel (B) und Dezibel (dB) wurden zu Ehren des Ingenieurs Alexander Graham Bell (3.3.1847 Edinburgh – 1.8.1922 Baddeck [Kanada]), des Erfinders des elektromagnetischen Telephons, eingeführt. 1 B = 10 dB. Sein *Photophone*, das mittels eines codierten Lichtstrahls die menschliche Stimme (damals bis zu 200 m) übertragen konnte, hielt er schon 1880 für seine größte Errungenschaft. Damit war die *Photonik* geboren.