Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

7.5.2 Logarithmusgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

5. **a)** $4 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 0{,}5^{-x}$ **b)** $5^{x^2+3} = 25 \cdot 0{,}2^{x-1}$

6. **a)** $7^{2x+1} - 40 \cdot 7^x = 63$ **b)** $9 \cdot (\frac{2}{3})^{2x+1} + 54 \cdot (\frac{2}{3})^{x-1} - 42 = 0$

7. **a)** $25^x = 15 \cdot 5^x - 50$ **b)** $3^x + 9^x = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

8. **a)** $4^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+3} - 24 = 0$ **b)** $(\frac{1}{2})^{x-1} \cdot (8^{x+1} - 4^5) = 16(4^x - 8)$

9. Im Jahre 1990 lebten auf der Erde 5,3 Milliarden Menschen. Die jährliche Wachstumsrate betrug etwa 1,5%.

a) In welchem Jahr würde bei gleichbleibender Wachstumsrate die Weltbevölkerung
  1) auf 6,0 Milliarden anwachsen
  2) doppelt so groß wie 1990 werden?

b) In welcher Zeit nimmt bei der Wachstumsrate 1,5% die Bevölkerungszahl von 1990
  1) um 1 Million zu (Einwohnerzahl einer Großstadt)
  2) um 77 Millionen zu (Bevölkerungszahl Deutschlands)?

7.5.2 Logarithmusgleichungen

Eine Bestimmungsgleichung, bei der die Unbekannte nur im Argument von Logarithmen auftritt, bezeichnet man als **Logarithmusgleichung**. Auch solche Gleichungen lassen sich in einfachen Fällen exakt lösen. Grundlage dafür ist

Satz 186.1: Die Gleichung $\log_b x = \varrho$ mit $b > 0$, $b \neq 1$ und $\varrho \in \mathbb{R}$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = b^\varrho$.

Dies folgt aus der echten Monotonie der Funktion $x \mapsto \log_b x$ und der Tatsache, daß diese Funktion die Wertemenge $\mathbb{R}$ hat.

Beispiel 1:

$\log_4 x = 5$ hat die Lösung $x = 4^5$.

Den Übergang zur zweiten Gleichung kann man so deuten, daß man jede Seite der Ausgangsgleichung zum Exponenten einer Potenz mit der Basis 4, also der Basis des Logarithmus, macht. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \log_4 x &= 5 \qquad \| 4^{\cdots} \\ 4^{\log_4 x} &= 4^5 \\ x &= 1024 \end{aligned}$$

Diese Umformung, bei der der Logarithmus »beseitigt wird«, bezeichnet man als **Delogarithmieren der Gleichung**.

Beispiel 2:

$\lg(2x+3)+\lg(1-x)-\lg(1-4x)=0$

Hier muß man zuerst die linke Seite zu einem einzigen Logarithmusterm zusammenfassen:

$$\lg\frac{(2x+3)(1-x)}{1-4x}=0 \qquad \| 10^{\cdots}$$

$$\frac{(2x+3)(1-x)}{1-4x}=1 \qquad \| \cdot(1-4x)$$

$$2x^2-3x-2=0$$

$$x_1=2; \quad x_2=-0{,}5$$

Da die Zusammenfassung von Logarithmen keine Äquivalenzumformung zu sein braucht, wenn man jeweils die maximale Definitionsmenge zugrundelegt, muß man die Probe machen. Sie zeigt, daß nur x_2 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Beispiel 3:

$\log_9(x^2+1)=\log_3(2x-1)$

Hier muß man zuerst Logarithmen mit gleicher Basis herstellen:

$$\frac{\log_3(x^2+1)}{\log_3 9}=\log_3(2x-1)$$

$$\log_3(x^2+1)=2\cdot\log_3(2x-1) \qquad \| 3^{\cdots}$$

$$x^2+1=(2x-1)^2$$

$$3x^2-4x=0$$

$$x_1=0; \quad x_2=\tfrac{4}{3}$$

Die Probe zeigt, daß nur x_2 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge. Gib für irrationale Lösungen auch den auf vier geltende Ziffern gerundeten Näherungswert an.

1. **a)** $\log_3 x=1{,}5$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} x=8$ **c)** $\lg x=0{,}1$
2. Alle Gleichungen sollen auf der jeweils maximalen Definitionsmenge betrachtet werden.
   a) Zeige an Hand der Lösungsmengen, daß die Gleichungen
   $\lg[(x+4)(x+1)]=1$ und $\lg(x+4)+\lg(x+1)=1$
   nicht äquivalent sind.
   b) Sind die Gleichungen $\log_3(x-8)-\log_3(1-2x)+1=0$ und
   $\log_3\frac{x-8}{1-2x}+1=0$ äquivalent?

c) Begründe, daß für die Lösungsmengen L_1 und L_2 der Gleichungen
(1) $\log_b[(rx+s)(ux+v)] = c$ und
(2) $\log_b(rx+s) + \log_b(ux+v) = c$
gilt: L_2 ist (echte oder unechte) Teilmenge von L_1.

3. a) $\lg(7x+2) = 1 + \lg(x-4)$
b) $\operatorname{ld}(x^2-1) - \operatorname{ld}(4x-1) + \operatorname{ld} 3 = 0$

4. a) $\log_6(5x-4) - \log_6(3+x) + \log_6(2x+1) = 1$
b) $\lg 2 + \lg(x+2) + \lg(3x+5) = \lg(5x^2-1)$
c) $\lg 2 + \lg[(x+2)(3x+5)] = \lg(5x^2-1)$

5. a) $\log_5(3x+4) - \log_{25}(4x-3) = 1$
b) $\lg(x^2+4) - \log_{\sqrt{10}}(3x+2) = 0$

6. a) $\log_5(x^2-5x+1) = 1 + \log_5(3x-10)$
b) $\lg(2x^2+x-5) + \log_{0,1}(x^2+1) = \lg 2$

7.5.3 Graphische und numerische Lösungsverfahren

Die in den bisherigen Beispielen betrachteten Exponential- und Logarithmusgleichungen ließen sich durch Logarithmieren bzw. Delogarithmieren oder mit Hilfe einer Substitution auf einfachere Gleichungstypen zurückführen, für die uns exakte Lösungsverfahren bekannt sind. Es gibt aber auch Gleichungen, bei denen eine solche Vereinfachung nicht möglich ist. Dann muß man sich damit begnügen, für die Lösungen hinreichend gute Näherungswerte zu bestimmen. Das kann durch graphische Lösungsmethoden, durch lineare Interpolation oder durch ein geeignetes Iterationsverfahren geschehen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 1:
$1 + 2^x - 3^{-x} = 0$

a) Graphische Lösung: Man bringt die Gleichung z.B. auf die Form $1 + 2^x = 3^{-x}$ und sucht die x-Werte, für welche die Funktionen $x \mapsto 1 + 2^x$ und $x \mapsto 3^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, gleichen Funktionswert haben. Zeichnet man die Graphen $y = 1 + 2^x$ und $y = 3^{-x}$, so ergeben sich diese x-Werte als die Abszissen der gemeinsamen Punkte beider Kurven. Abbildung 189.1 zeigt, daß in diesem Fall genau ein solcher Punkt existiert; für seine Abszisse liest man $x \approx -0,5$ ab.