Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

7.6 Zur Geschichte der Logarithmen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

**7.6 Zur Geschichte der Logarithmen

Im 16. Jh. nahmen die Anforderungen an die Rechengenauigkeit vor allem von seiten der Astronomie immer mehr zu. So mußten insbesondere die von dem dänischen Astronomen Tycho BRAHE (1546–1601) gelieferten Beobachtungsdaten auf Verträglichkeit mit den von der Theorie angebotenen Planetenbahnen überprüft werden. Man suchte daher nach Möglichkeiten, das für große Zahlen sehr zeitaufwendige Multiplizieren und Dividieren durch das schnellere und auch leichtere Addieren bzw. Subtrahieren zu ersetzen, so, wie es zwischen 1505 und 1513 in der Trigonometrie* dem Nürnberger Pfarrer Johannes WERNER (1468–1528) gelungen war.** Diese Prosthaphairesis (προσθαφαίρεσις = Zu-Wegnahme) genannte Methode wurde 1580 von Tycho BRAHE und seinem schlesischen Assistenten Paul WITTICH (1555?–1587) wiederentdeckt. Sie benützten neben der WERNERschen Formel $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ auch die schon bei IBN YUNIS (†1009 Kairo) vorkommende Formel $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$, deren praktisch-rechnerische Bedeutung IBN YUNIS aber noch nicht erkannt hatte: Man faßt die Ziffernfolge der zwei zu multiplizierenden Zahlen als Ziffernfolge des Kosinus eines Winkels α bzw. β auf, sucht in cos-Tabellen α und β und kann damit die rechte Seite recht einfach berechnen.***

Das Bestreben, bessere Methoden dieser Art zu finden, führt gegen Ende des 16. Jh.s zur Entdeckung der Logarithmen, und zwar durch einen Schweizer Uhrmacher und einen schottischen Baron, die nichts voneinander wußten und die auf keine Vorarbeiten zurückgreifen konnten! Ausgangspunkt der Überlegungen ist das auf Seite 38 beschriebene Korollar zu Satz 11 aus Buch IX der *Elemente* des EUKLID (um 300 v. Chr.), das ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) in seiner *Schrift über die Sandzahl* wesentlich vertiefen konnte (siehe Seite 38). Über die Araber gelangte seine Erkenntnis ebenso wie die von den Indern erfundene Null ins Abendland, so daß Nicolas CHUQUET 1484 in seinem *Triparty* geometrischen Folgen der Bauart $1, a, a^2, a^3, \ldots$ die mit 0 beginnende arithmetische Folge $0, 1, 2, \ldots$ gegenüberstellen kann. Er nennt die Glieder der arithmetischen Folge die *denominacions* der Glieder der geometrischen Folge und zeigt dann die zwischen den Gliedern solcher Doppelfolgen bestehende interessante Beziehung: Man erhält als Produkt zweier Glieder der geometrischen Folge dasjenige Glied dieser Folge, dessen *denominacion* in der arithmetischen Folge die Summe der *denominacions* der beiden Faktoren ist. Wir illustrieren diese Regel an Hand der uns auf der altbabylonischen Keilschrifttafel MLC 2078**** überlieferten

* Das Wort *Trigonometrie* scheint der in der Pfalz als Hofprediger wirkende Schlesier Bartholomaeus PITISCUS (1561–1613) mit dem Titel seines 1595 in Heidelberg erschienenen Werks *Trigonometria sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* – »Trigonometrie oder eine kurze und klare Abhandlung über die Lösung von Dreiecken« geprägt zu haben. Es ist zusammengesetzt aus τρίγωνον (trígonon) = *Dreieck* und μετρεῖν (metreīn) = *messen*.

** Das Manuskript seiner *Libri quatuor de triangulis sphaericis* wurde erst 1902 wiederaufgefunden und 1907 gedruckt.

*** Auf Grund der Formeln wird der Name Prosthaphairesis verständlich. Er ist zusammengesetzt aus πρόσθεσις (prósthesis) = *Hinzufügung, Addition* und aus ἀφαίρεσις (aphaíresis) = *Wegnahme, Subtraktion*, da α und β einmal addiert und einmal subtrahiert werden. Hierzu ein **Beispiel**:

$2{,}31456 \cdot 8{,}00753 = 0{,}231456 \cdot 0{,}800753 \cdot 10^2 = ?$

$\cos\alpha = 0{,}231456 \Rightarrow \alpha = 76°37'02''$; $\cos\beta = 0{,}800753 \Rightarrow \beta = 36°47'53''$

$\alpha - \beta = 39°49'09'' \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = 0{,}768068294$; $\alpha + \beta = 113°24'55'' \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = -0{,}397390122$

$\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] = 0{,}185339086$, also $2{,}31456 \cdot 8{,}00753 = 18{,}5339086$.

Das exakte Ergebnis lautet 18,5339086368.

**** Morgan Library Collection der Yale University, New Haven (USA) zwei Doppelfolgen. Das zweite Beispiel zeigt, daß die arithmetische Folge keineswegs die Folge der natürlichen Zahlen sein muß; der Anfang $0 \leftrightarrow 1$ fehlt natürlich.

		plus			↓		plus		↓	
1	2	3	4	5	6	arithmetisch	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
2	4	8	16	32	64	geometrisch	2	4	8	16
		mal			↑		mal		↑	

Wozu die Babylonier diese Doppelfolgen gebraucht haben, wissen wir nicht. Aber die Erkenntnis Chuquets findet sich wieder bei mehreren deutschen Cossisten der 1. Hälfte des 16. Jh.s. 1544 stellt Michael Stifel (1487?–1567) in Buch I (fol. 35r) seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – die vier Rechengesetze zusammen, die die Beziehung zwischen diesen Doppelfolgen regeln:*

1. Addition in der arithmetischen Folge entspricht der Multiplikation in der geometrischen Folge.
2. Subtraktion in der arithmetischen Folge entspricht der Division in der geometrischen Folge.
3. Multiplikation in der arithmetischen Folge entspricht einer Potenzierung in der geometrischen Folge.
4. Division in der arithmetischen Folge entspricht dem Radizieren in der geometrischen Folge, das Halbieren also dem Quadratwurzelziehen.

Das sind aber genau die Gesetze des logarithmischen Rechnens, die du in den Sätzen 160.1 bis 161.1 kennengelernt hast. In Buch III nennt Stifel die Glieder der arithmetischen Folge *Exponenten* (= Ausgesetzte) der Glieder der geometrischen Folge. Und dann folgt die überaus bedeutsame Idee, die arithmetische Folge ins Negative fortzusetzen (vgl. auch Seite 41):

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Stifel ist sich der Bedeutung dieses Vorgangs auch bewußt; denn unmittelbar im Anschluß an diese Tabelle schreibt er: »Man könnte jetzt ein ganzes Buch über die wunderbaren Eigenschaften der Zahlen schreiben, aber ich muß mich an dieser Stelle zurückhalten und mit geschlossenen Augen weitergehen.« Er weist aber noch darauf hin, daß die oben aufgestellten Regeln auch für negative Exponenten gelten.

Von unten nach oben gelesen, stellt die obige Tafel in unserer Sprechweise eine Logarithmentafel $x \mapsto \log_2 x$ für $x \in \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \ldots, 64\}$ dar. Für die im 16. Jh. gesuchte praktische Anwendung war diese Tafel natürlich nicht umfangreich genug. Und selbst wenn man sie nach beiden Seiten fortsetzte, könnten so einfache Rechnungen wie $2 \cdot 5$ oder $3 \cdot 3$ mit ihr gar nicht bewältigt werden, da in der unteren Zeile weder 5 noch 3 vorkommen. Man brauchte also Tafeln mit sehr kleiner Schrittweite.

Es war das Verdienst des aus Coburg stammenden Frankfurter Rechenmeisters Simon Jacob (1510?–1564), in seinem *Ein New und Wolgegründet Rechenbuch, auff den Linien und Ziffern, sampt der Welschen Practic* (1565) die Erkenntnisse Stifels eingedeutscht und weiterverarbeitet zu haben. Sein Werk kann der des Lateinischen nicht mächtige Schweizer Uhrmacher und Instrumentenbauer Jost Bürgi (1552–1632) lesen, der sich, vielleicht schon 1588, vielleicht aber erst zwischen 1603 und 1611 an die Arbeit macht,

* Wahrscheinlich erstmals ausgesprochen im *Codex Dresden* $C80^m$ um 1499.

eine arithmetisch-geometrische Doppelfolge mit kleiner Schrittweite zu berechnen, nachdem er 1584 durch den Besuch WITTICHS in Kassel die Prosthaphairesis kennengelernt und auch verbessert hat. Vergessen wir nicht, daß zu jener Zeit das Rechnen mit Dezimalbrüchen noch in den Kinderschuhen steckte. Kleine Schrittweiten erzielt BÜRGI nun dadurch, daß er den Zahlenbereich von 10^8 bis 10^9 verwendet; dem Einerschritt dort entspricht im Intervall [1; 10] eine Schrittweite von 10^{-8}. Seiner Rechnung legt BÜRGI die arithmetische Folge 0, 10, 20, ..., allgemein $x_n = 10n$, und die geometrische Folge $y_n = 10^8(1+10^{-4})^n$ zugrunde*, deren Glieder sich wegen $y_{n+1} = y_n(1+10^{-4}) = y_n + 10^{-4}y_n$ leicht berechnen lassen: Addiere zu einer Zahl ihren 10000ten Teil, und du hast ihren Nachfolger. BÜRGI macht dies 23000mal, was ihn sicher einige Monate Rechenzeit gekostet hat; nach der Einerstelle schneidet er dabei immer ab.

0	100 000 000 = 10^8
	10 000
10	100 010 000
	10 001
20	100 020 001
	10 002
30	100 030 003
	10 003
40	100 040 006
	10 004
...	... ...
230 000	997 303 557

Schließlich berechnet er noch

230 270,022 1 000 000 000 = 10^9.

Da hier der roten Null nicht die schwarze Eins, sondern die schwarze 10^8 zugeordnet ist, lassen sich die STIFELschen Regeln nicht unmittelbar anwenden. Nach unserem heutigen Verständnis sind aber die rot gedruckten Zahlen die Logarithmen der schwarz gedruckten Zahlen (siehe Anhang Lösungsheft). BÜRGI hat keinen Namen für sie. Er nennt sie »rote Zahlen« und läßt sie auch rot drucken, als er endlich** 1620 seine *Progreß-Tabulen* (siehe Abbildung 198.1) herausbringt. Sie sind eine sog. **Antilogarithmentafel*****; denn zu den ganzzahligen (roten) Log-

1619

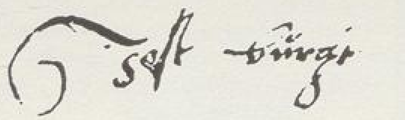


Abb. 197.1 Jost BÜRGI (28.2.1552 Lichtensteig/Schweiz – 31.1.1632 Kassel) Stich von Egidius II SADELER (1570–1629)

* Die Zuordnung $10n \mapsto y_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, kann auch als Zinseszinsformel gedeutet werden mit dem Anfangskapital $y_0 = 10^8$, dem Zinsfuß 10^{-2}% und dem Endkapital y_n nach $10n$ Monaten, wenn alle 10 Monate der Zins zum Kapital geschlagen wird.

** Noch 1627 tadelt Johannes KEPLER (1571–1630) in seinen *Rudolphinischen Tafeln* BÜRGI: »Etsi homo cunctator et secretorum suorum custos foetum in partu destituit, non ad usus publicos educavit.« [Allerdings hat der Zauderer und Geheimniskrämer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen großzuziehen.]

*** Auch **Antilogarithmus** ist wie Logarithmus eine Wortschöpfung John NAPIERS (1550–1617); er versteht jedoch in seiner *Descriptio* (1614) darunter den Logarithmus des Kosinus eines Winkels. Erst John WALLIS (1616–1703) verwendet es 1693 in seinem *Tractatus de Algebra* im heutigen Sinn: In $y = \log x$ ist y der Logarithmus von x und x ist der Antilogarithmus von y.

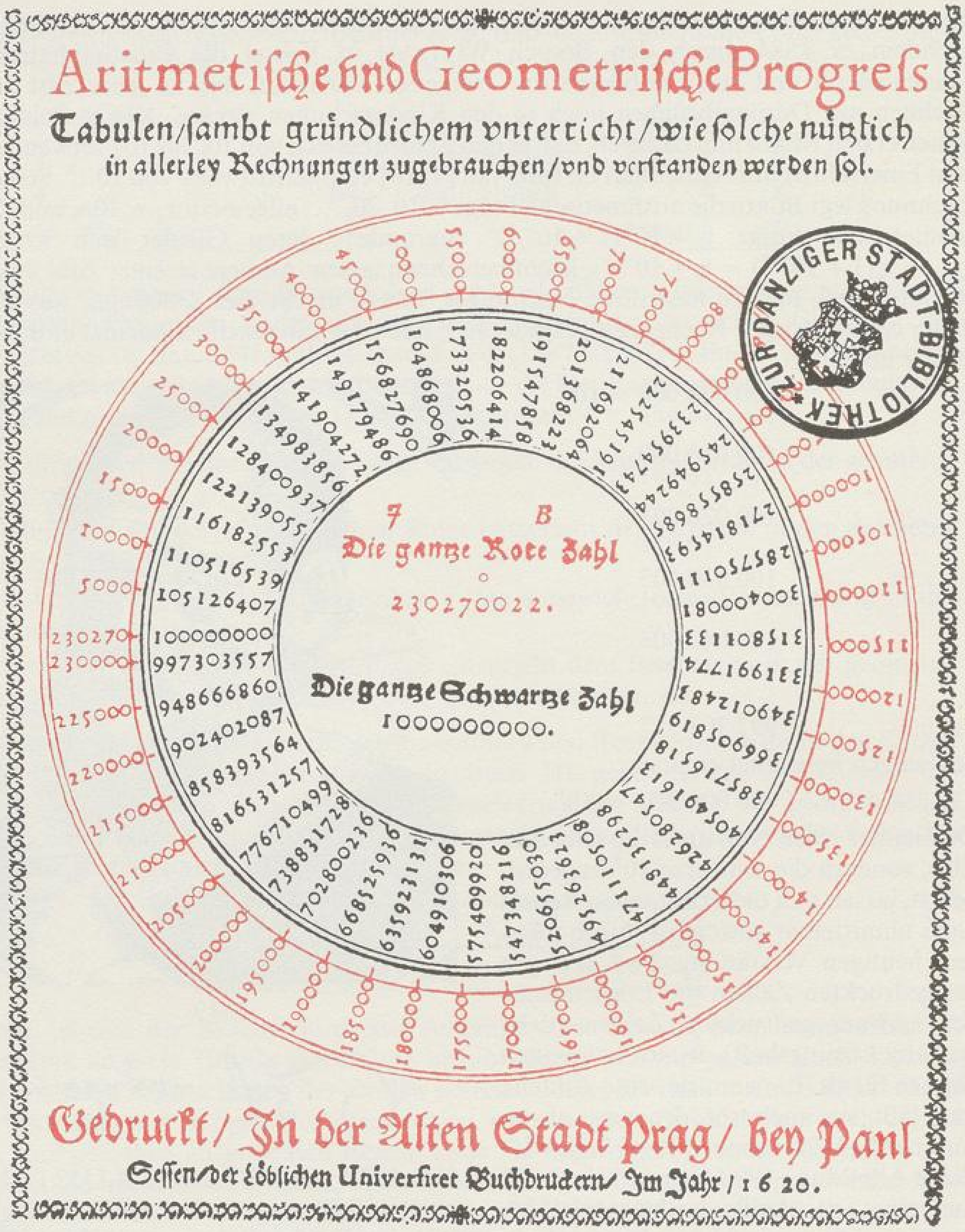


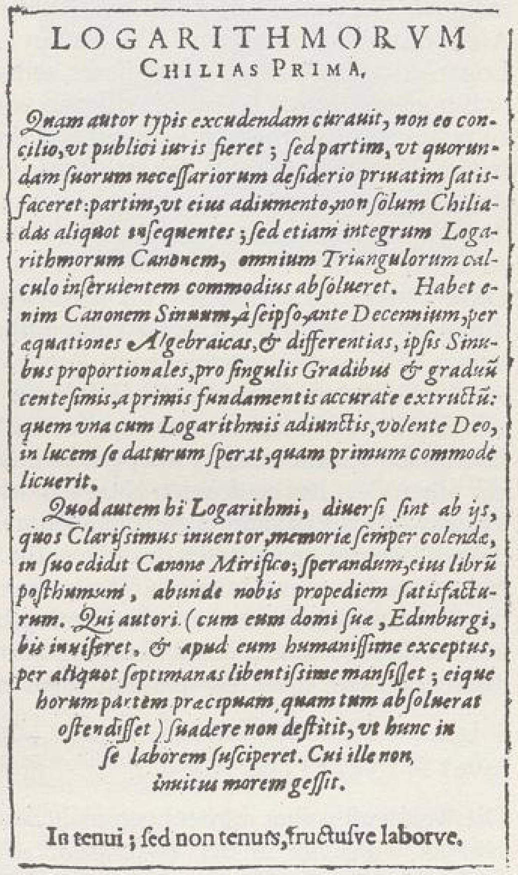
Abb. 198.1 Titelblatt der Logarithmentafel von Jost BÜRGI von 1620. Die Initialen J und B stehen für den Verfasser. Die Darstellung enthält zwei Druckfehler: Die neben der roten 5000 stehende schwarze Zahl 105 126 407 muß richtig 105 126 847 heißen. Bei der darunter stehenden schwarzen Zahl 100 000 000 fehlt eine Null; es handelt sich nämlich um »Die gantze Schwartze Zahl« 1 000 000 000. Der kleine rote Kreis über 230 270 022 kennzeichnet die Einerstelle; »Die gantze Rote Zahl« ist also als 230 270,022 zu lesen. – Nur zwei Exemplare sind erhalten geblieben, eines in Danzig und eines in München.

arithmen sind die gerundeten (schwarzen) Numeri angegeben. In einer Logarithmentafel werden dagegen zu den ganzzahligen Numeri die gerundeten Logarithmen angegeben. Der im Titel angekündigte »gründliche Unterricht« fehlt gänzlich, so daß die Tafeln für die wenigen Käufer unverständlich und wertlos blieben.

Die Zeit war aber schon über BÜRGI hinweggeschritten. Denn bereits 1614 hatte der schottische Gutsherr und kämpferische Protestant John NAPIER, auch NEPER, (1550–1617), der sich in seinen Mußestunden der Mathematik widmete, seine *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (siehe Abbildung 153) herausgebracht.

1590 hört NAPIER durch John CRAIG, der Tycho BRAHE auf der Insel Hven besucht hat, von dessen »Erfindung« der Prosthaphairesis. Bereits am 27. März 1592 schreibt dann CRAIG an BRAHE, daß ein Landsmann einen *canon mirificus* konstruiere. NAPIERS Ziel ist es, die trigonometrischen Rechnungen zu vereinfachen. Seine *Descriptio* ist daher eine Tafel der Logarithmen des Sinus der Winkel zwischen 0° und 90°. Zu seiner Zeit war der Sinus noch nicht das Verhältnis aus Gegenkathete und Hypotenuse, sondern die Länge der Gegenkathete selbst, was auch seinen ursprünglichen indischen Namen erklärt.*

NAPIER erstellt in langjähriger Arbeit eine komplizierte 7ziffrige arithmetisch-geometrische Doppelfolge, indem er zwei Punkte mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit starten läßt. Der eine bewegt sich ins Unendliche so fort, daß in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurückgelegt werden, der andere auf einer vorgegebenen endlichen Strecke so, daß die jeweils noch zurückzulegenden Wege eine geometrische Folge bilden. Diese Wege sind dann die Numeri, deren »Logarithmen« die auf der Geraden bis zum jeweiligen Zeitpunkt zurückgelegten Strecken sind. Da die Numeri sin-Werte sein sollen, es aber keine geometrische Folge gibt, die mit $0 = \sin 0°$ beginnen kann, konstruiert NAPIER eine fallende geometrische Folge, die mit sin 90°, dem sinus totus, wie man seit GERHARD VON CREMONA (1114–1187) den Kreisradius nennt, beginnt. Dem gibt er den Wert 10^7, um – wie BÜRGI – zu kleinen Schrittweiten kommen zu kön-


LOGARITHMORVM
CHILIAS PRIMA,

Quam autor typis excudendam curauit, non eo concilio, vt publici iuris fieret; sed partim, vt quorundam suorum necessariorum desiderio priuatim satisfaceret: partim, vt eius adiumento, non solum Chiliadas aliquot insequentes; sed etiam integrum Logarithmorum Canonem, omnium Triangulorum calculo inseruientem commodius absolueret. Habet enim Canonem Sinuum, à seipso, ante Decennium, per æquationes Algebraicas, & differentias, ipsis Sinubus proportionales, pro singulis Gradibus & graduū centesimis, a primis fundamentis accurate extructū: quem vna cum Logarithmis adiunctis, volente Deo, in lucem se daturum sperat, quam primum commode licuerit.

Quod autem hi Logarithmi, diuersi sint ab ijs, quos Clarissimus inuentor, memoriæ semper colendæ, in suo edidit Canone Mirifico; sperandum, eius librū posthumum, abunde nobis propediem satisfacturum. Qui autori (cum eum domi suæ, Edinburgi, bis inuiseret, & apud eum humanissime exceptus, per aliquot septimanas libentissime mansisset; eique horum partem præcipuam, quam tum absoluerat ostendisset) suadere non destitit, vt hunc in se laborem susciperet. Cui ille non inuitus morem gessit.

In tenui; sed non tenuis, fructusve laborve.

Abb. 199.1 Titelblatt von Henry BRIGGS' *Logarithmorum chilias prima* von 1617**

* Babylonier und Griechen legten ihren trigonometrischen Überlegungen die zu einem Zentriwinkel gehörende Sehne zugrunde. Der indische Astronom ĀRYABATHA I (476 n. Chr. – ?) führte eine Rechnung mit der Halb-Sehne = *ardha-dschyâ* ein. Aus Bequemlichkeit ließ man die Vorsilbe *ardha* bald wieder weg, und aus *dschyâ* wurde allmählich *dschîva*, das die Araber wie *dschiba* aussprachen und, da ihre Schrift keine Vokale kennt, als *dschb* schrieben. Dies wiederum wurde später als das echt arabische Wort *dschaib* gelesen und als Fachwort verwendet; die eigentliche Bedeutung von *dschaib* ist aber *Halsausschnitt eines Kleides, Busen*. ROBERT VON CHESTER (um 1145) übersetzte *dschaib* durch das bedeutungsgleiche lateinische Wort *sinus*. – Georg Simon KLÜGEL (1739–1812) definierte 1770 in seiner *Analytische*[n] *Geometrie* den Sinus als das heute übliche Verhältnis.

** Übersetzung im Lösungsheft

nen, und ordnet ihm als Logarithmus den Wert 0 zu. Durch Interpolation gestaltet er die Tabelle schließlich so, daß er von Winkelminute zu Winkelminute fortschreiten kann (Aufgabe **2** im Anhang des Lösungshefts).
Edward WRIGHT (1558–1615), Mathematiker und Kartograph in Cambridge, erkennt sofort die Bedeutung der NAPIERschen Tafeln für die Navigation und übersetzt die *Descriptio* mit dessen Zustimmung in die »englische Volkssprache«. 1616 gibt sie WRIGHTS Sohn Samuel postum, auf 6 Stellen gekürzt und mit einem Vorwort von Henry BRIGGS (1561–1631)* versehen, heraus.
Voller Begeisterung hat dieser Henry BRIGGS, Professor für Geometrie in London, noch im Winter 1614/15 seine Studenten den Gebrauch der Logarithmen gelehrt und NAPIER brieflich vorgeschlagen, dem sinus totus als Logarithmus die Null und dessen 10. Teil als Logarithmus den Wert 10^{10} zuzuordnen. Damit waren die Numeri nicht mehr sin-Werte, sondern natürliche Zahlen; ein wesentlicher Fortschritt für die Praxis! Als er dann im Sommer 1615 NAPIER in Edinburg besucht und seine neu berechneten Logarithmen mitbringt, meint dieser, selbst schon an eine Änderung gedacht zu haben, daß er aber vorzöge, 0 als Logarithmus von 1 und 10^{10} als Logarithmus des sinus totus zu nehmen. »Ich mußte erkennen, daß dies das weitaus Zweckmäßigste ist [...] Auf seinen Rat hin machte ich mir ernsthafte Gedanken über die Berechnung [dieser neuen Art von Logarithmen] und fuhr im nächsten Sommer wieder nach Edinburg und zeigte ihm die wichtigsten von denen, die ich hier vorlege« schreibt BRIGGS 1624 im Vorwort zu seiner *Arithmetica logarithmica* (siehe unten).
Diese neuen Logarithmen – wir nennen sie heute die dekadischen – kündigt NAPIER durch eine in WRIGHTS Übersetzung aufgenommene Passage an. Und im Vorwort zu seinen 1617 postum erschienenen *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo* – »Zwei Bücher über die Rhabdologie oder die Zählkunst durch Stäbchen«** – schreibt er: »Wir haben eine viel bessere Art von Logarithmen gefunden [...], aber überlassen wegen unserer körperlichen Schwäche die tatsächliche Berechnung [...] vor allem dem hochgelehrten Henry BRIGGS [...], einem mir seit langem sehr teueren Freund.« Das Erscheinen der *Logarithmorum chilias prima*, einer 14stelligen Tafel der dekadischen »Logarithmen des ersten Tausends«, also der Zahlen von 1 bis 1000, erlebt NAPIER nicht mehr. Das nur 16 Seiten umfassende Werkchen trägt weder den Namen des Autors noch Erscheinungsort und -jahr. Und dennoch können wir aus einem Brief vom 6.12.1617 schließen, daß es von Henry BRIGGS stammt und vor diesem Datum erschienen sein muß. Beispielhaft seien einige seiner Logarithmen angegeben:

$$\lg 2 = 0{,}3010\ 29995\ 66398 \qquad \lg 3 = 0{,}4771\ 21254\ 71966$$
$$\lg 961 = 2{,}9827\ 23387\ 66854 \qquad \lg 999 = 2{,}9995\ 65488\ 22598$$

Die Welt wußte aber immer noch nicht, wie Logarithmen überhaupt errechnet werden. NAPIER wünschte in der *Descriptio*, »daß zuerst ihr Gebrauch und ihre Vorteile verstanden würden [...]. Ich will das Urteil und die Kritik der Gelehrten abwarten, ehe der Rest, vorzeitig ans Licht gebracht, der Ablehnung der Neider ausgesetzt wird.« Nachdem aber 1618 WRIGHTS Übersetzung eine zweite, ergänzte Auflage erfahren hat,

* Man findet für Henry BRIGGS die Daten Februar 1560 Worleywood/Yorkshire bis 26.1.1630 Oxford. Nun war in England seit dem 14. Jh. der Neujahrstag der 25. März. Als man dort 1752 den Julianischen durch den Gregorianischen Kalender ersetzte, entschloß man sich, das Jahr 1752 mit dem 1. Januar beginnen zu lassen. Das Jahr 1751 hatte also nur 281 Tage. Inzwischen hatte sich aber die Datumsdifferenz seit der Einführung des Gregorianischen Kalenders in den katholischen Ländern des Kontinents (1582 bis 1585) von 10 auf 11 Tage erhöht. Diese sparte man dadurch ein, daß auf den 2. September der 14. September 1752 folgte. Die Lebensdaten von Henry BRIGGS sind gregorianisch also Februar 1561 – 5. Februar 1631, da bis zum 28. Februar 1700 die Datumsdifferenz 10 Tage betrug.

** In ihnen erblickt das Dezimalkomma das Licht der Welt.

entschließt sich 1619 NAPIERS Sohn Robert, die mehrere Jahre vor der *Descriptio* verfaßte *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* herauszugeben, in der es übrigens das erst in der *Descriptio* geprägte Kunstwort Logarithmus noch nicht gibt. Statt seiner heißt es dort *numerus artificialis* [künstliche Zahl]. In einem noch von NAPIER verfaßten Anhang wird auch eine Konstruktion für dekadische Logarithmen erklärt.

Die Entwicklung schreitet nun schnell voran. BRIGGS' Kollege Edmund GUNTER (1581–1626), Professor für Astronomie, bringt 1620 mit seinem *Canon triangulorum* eine 7stellige Tafel der dekadischen Logarithmen des Sinus und Tangens* mit der Schrittweite 1′ und erfindet die logarithmische Skala (Seite 174).

Abb. 201.1 Die göttliche *Logarithmica* aus den *Tabulae Rudolphinae* KEPLERS

Bereits 1617 kann Johannes KEPLER (1571–1630) kurz die *Descriptio* einsehen, lehnt aber die Logarithmen ab. Ihren Wert lernt er 1618 durch den *Cursus Mathematici Practici* (1618) des URSINUS genannten Schlesiers Benjamin BEHR (1587–1633/34), seines früheren Gehilfen, kennen. In ihm ist NAPIERS Werk, um 2 Stellen gekürzt, nachgedruckt. Noch am 1.12.1618 schreibt er: »Die Logarithmen sind das glückbringende Unglück [foelix calamitas] für meine Rudolphinischen Tafeln. Es sieht nämlich so aus, als ob die Tafeln neu zu machen und auf Logarithmen umzustellen oder überhaupt aufzugeben seien.«** Da er die Werte nicht ungeprüft übernehmen will und er hinter das Geheimnis ihrer Berechnung gekommen ist, rechnet er die Tafeln nach und verbessert sie.*** KEPLERS Begeisterung für das Rechnen mit den neuen Logarithmen wird keineswegs von den älteren deutschen Mathematikern geteilt, die vor allem ihre kinematische Erzeugung als unmathematisch ablehnen. Seinen Brief vom 3.12.1618

* Dabei prägt GUNTER das Wort *cosinus* als Abkürzung für *sinus complementi* und analog *cotangens* für *tangens complementi*. *Complementum* ist die lateinische Übersetzung des arabischen *tamām* = *Rest*, womit der Winkel bezeichnet wurde, der einen gegebenen Winkel zu 90° ergänzt.

** 1601 hatte KEPLER von Kaiser RUDOLF II. (1552–1612, Kaiser seit 1576) den Auftrag erhalten, BRAHES astronomische Tafeln zu vollenden. 1616 glaubte er, die mit prosthaphäretischen Methoden durchgeführte Berechnung bald abschließen zu können; da kamen die Logarithmen dazwischen. 1624 war er dann mit der Neuberechnung fertig, konnte aber erst 1627 auf eigene Kosten (!) 1000 Exemplare der *Tabulae Rudolphinae* drucken lassen. Sie lösten wegen ihrer größeren Genauigkeit – ihnen liegen ja auch schon die sog. KEPLERschen Gesetze zugrunde (siehe Aufgabe 84/**10**) – die *Alfonsinischen Tafeln* (siehe Seite 123) ab.

*** NAPIER hat dies wohl erwartet; denn in einigen Exemplaren endet seine *Descriptio* mit *Nihil in ortu perfectum* – »Nichts ist bei Geburt vollkommen«. Erst im Juli 1619 erhält KEPLER ein Exemplar der *Descriptio*. Voller Begeisterung schreibt er am 28.7.1619 an NAPIER – nicht wissend, daß dieser schon seit zwei Jahren tot ist –, spricht auch hier von der foelix calamitas und berichtet, daß er nur kleinere Fehler gefunden habe. Als Widmung stellt er diesen Brief seiner *Ephemeris motuum coelestium ad annum incarnationis verbi MDCXX* – »Jahrbuch der Himmelsbewegungen auf das Jahr der Fleischwerdung des Wortes 1620« – voran. KEPLER war auf seine Verbesserung des NAPIERschen Wertes 6931469 auf 6931472 für den Logarithmus von $\frac{1}{2}\cdot 10^7$ so stolz, daß er den das Frontispiz der *Tabulae Rudolphinae* bildenden Tempel mit der göttlichen *Logarithmica* als Akroterion schmückte, die in ihren Händen zwei Stäbe im Längenverhältnis 1 : 2 hält und deren Gloriole den von ihm gefundenen Wert zeigt.

beantwortet sein alter Lehrer Michael MÄSTLIN (1550–1631) am 2.3.1620: »Ich halte es eines Mathematikers für unwürdig, mit fremden Augen sehen zu wollen und sich auf Beweise zu stützen oder als solche auszugeben, die er nicht verstehen kann.« »Das war für mich der Anlaß, auf der Stelle mit einem ordentlichen Beweis zu beginnen«**, den KEPLER dann bereits am 19.6.1620 an MÄSTLIN schickt. Gegen Ende 1621 ist KEPLER dann entschlossen, die neue Theorie der Logarithmen zusammen mit den verbesserten NAPIERschen Tafeln drucken zu lassen, deren Berechnung er im Winter 1621/22 abschließt. Die Drucklegung verzögert sich jedoch. Da trifft am 1.12.1623, gewissermaßen als Antwort des toten NAPIER auf KEPLERS Widmungsbrief von 1619, der von GUNTER am 22.2.1622 abgesandte *Canon triangulorum* ein – die Wirren des 30jährigen Krieges machen sich wohl schon bemerkbar – und einige Tage später BRIGGS' *Logarithmorum chilias prima*. KEPLER schreibt daraufhin am 4.12.1623 an GUNTER, er überlege, den logarithmischen Teil der *Tabulae Rudolphinae* dekadisch umzugestalten. Als dann jedoch im Februar 1624 seine *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos* – »Tausend Logarithmen zu ebensoviel runden Zahlen«*** – erscheinen, ändert er nichts mehr, sondern bereitet die Herausgabe des *Supplementum Chiliadis Logarithmorum, continens praecepta de eorum usu* – »Ergänzung zu den tausend Logarithmen mit Unterweisungen für ihren Gebrauch« – vor, die zur Frankfurter Buchmesse im Herbst 1625 vorliegen. Enttäuscht hat aber schon am 20. Februar (a.St.) = 2. März 1625 (n.St.) BRIGGS auf das Erscheinen von KEPLERS *Chilias Logarithmorum* reagiert, der an Stelle GUNTERS KEPLER antwortete: »Ich erkenne den Scharfsinn an und lobe den Fleiß. Hättest Du jedoch auf den Erfinder MERCHISTON [= NAPIER] gehört und

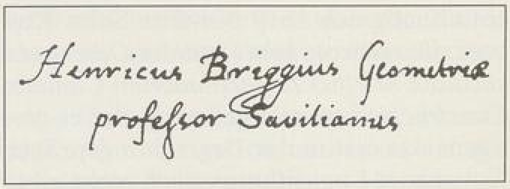
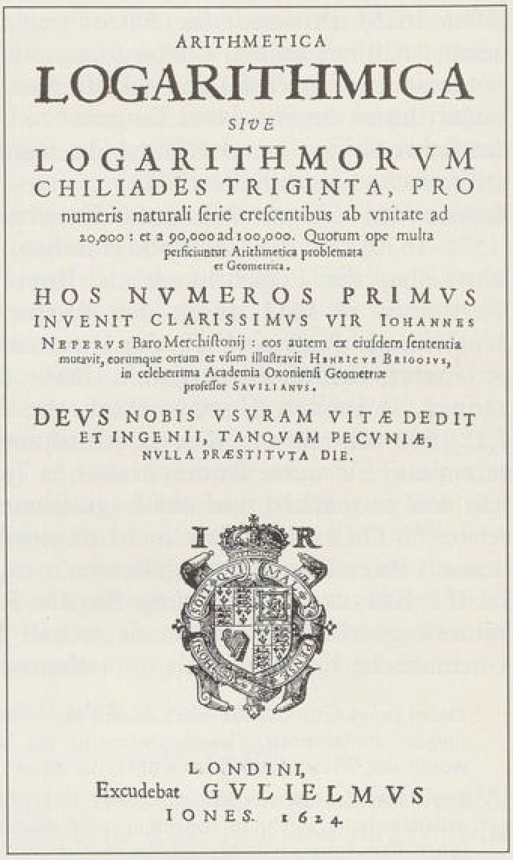


Abb. 202.1 Henry BRIGGS' Unterschrift unter seinen Brief an KEPLER vom 20. Februar (alter Stil) = 2. März (neuer Stil) 1625. – Von BRIGGS ist kein Bildnis überliefert.



ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad 20,000 : et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa perficiuntur Arithmetica problemata et Geometrica.
HOS NVMEROS PRIMVS INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES NEPERVS Baro Merchiſtonij : eos autem ex eiuſdem ſententia mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS, in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ profeſſor SAVILIANVS.
DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ, NVLLA PRÆSTITVTA DIE.
I R
LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS IONES. 1624.

Abb. 202.2 Titelblatt von Henry BRIGGS' *Arithmetica logarithmica*, 1624*

* Übersetzung im Lösungsheft

** Vorwort zu KEPLERS *Supplementum Chiliadis Logarithmorum* (1625). Dem Beweis liegt die Proportionenlehre EUKLIDS (*Elemente*, Buch V) zugrunde.

*** In diesem Werk erklärt KEPLER »LOGARITHMUS, das ist die Zahl (ἀριθμός), die das Verhältnis (λόγον) anzeigt, das jene Zahl, der der Logarithmus zugeordnet ist, zu 1000 hat.«

wärest mir gefolgt, dann hättest Du meiner Meinung nach denen, die am Gebrauch der Logarithmen ihre Freude haben, einen besseren Dienst erwiesen.«
Beigefügt hat BRIGGS diesem Brief seine Ende 1624 erschienene *Arithmetica logarithmica, sive logarithmorum chiliades triginta, pro numeris naturali serie crescentibus ab unitate ad 20000 et a 90000 ad 100000*, einen Folioband von fast 400 Seiten. In ihr sind als Ergebnis ungebrochenen Fleißes und ungeheuerer Arbeit die neuen dekadischen Logarithmen von 30000 Zahlen, auf 14 Stellen berechnet, enthalten, und zwar von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000.* Da das Werk diesmal unter seinem Namen erschien, heißen die dekadischen Logarithmen auch **Briggssche Logarithmen**. Sie verdrängen in wenigen Jahren wegen ihrer guten Anwendbarkeit die NAPIERschen bzw. KEPLERschen Logarithmen** und heißen im Gegensatz zu diesen und anderen auch **gewöhnliche Logarithmen**.
Theoretisch hält BRIGGS noch an der Vorstellung einer arithmetisch-geometrischen Doppelfolge fest, aus der heraus er auch glaubt, NAPIERS Wortschöpfung »Logarithmus« erklären zu können. In Anlehnung an NAPIER*** bezeichnet er selbst die Logarithmen zunächst als *numerorum proportionalium comites aequidifferentes*, d.h. als »gleiche Differenz habende Begleiter von Zahlen, die in konstantem Verhältnis zueinander stehen«, und fährt dann fort:

> »*Qui ideo videntur a clarissimo Inventore Logarithmi nominati, quia numeros nobis exhibent eandem inter se servantes rationem.*«
> »Die deswegen, so scheint es, von ihrem hochberühmten Erfinder Logarithmen genannt wurden, weil sie uns Zahlen liefern, die untereinander dasselbe Verhältnis bewahren.«

Praktisch hat BRIGGS aber völlig neue Wege zur Berechnung der dekadischen Logarithmen beschritten. Wir begnügen uns damit, den Anfang eines angewandten Verfahrens zu skizzieren.
Ausgehend von

$$\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3{,}1622\ 77660\ 16837\ 93319\ 98893\ 54$$

hat er sofort

$$\lg 3{,}1622\ 77660\ 16837\ 93319\ 98893\ 54 = 0{,}5.$$

Dann errechnet er über

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[2^2]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1{,}7782\ 79410\ 03892\ 28011\ 97304\ 13,$$

gewinnt also

$$\lg 1{,}7782\ 79410\ 03892\ 28011\ 97304\ 13 = 0{,}25.$$

Nun fährt er so fort und erhält schließlich, nachdem er insgesamt 54mal die Quadratwurzel gezogen hat,

$$\sqrt[2^{54}]{10} = 10^{2^{-54}} = 1{,}0000\ 00000\ 00000\ 01278\ 19149\ 32003\ 235, \quad \text{also}$$

$$\lg 1{,}0000\ 00000\ 00000\ 01278\ 19149\ 32003\ 235 =$$
$$= 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 31257\ 82702\ 11815.$$

* Man findet in der Literatur eine weitere Ausgabe aus demselben Jahr beschrieben, die auch noch die Logarithmen der Zahlen von 100000 bis 101000 enthält.

** Wegen der Bedeutung der *Tabulae Rudolphinae* blieben sie in der Astronomie noch bis ins 18. Jh. am Leben.

*** *Descriptio*, Satz 1: Proportionalium numerorum, aut quantitatum, aequi-differentes sunt Logarithmi. [Die Logarithmen proportionaler Zahlen oder Größen haben gleiche Differenz.]

Bei dieser Vorstellung des enormen Rechenaufwands wollen wir es belassen.

Natürlich muß die Lücke zwischen 20000 und 90000 schnellstmöglich geschlossen werden. BRIGGS bietet dazu in seinem Vorwort jedem Interessierten an, das von ihm »zu diesem Zweck beschaffte und durch gerade Linien in Felder eingeteilte Papier zuzusenden«. Im Vorwort der in der 1. Fußnote auf Seite 203 erwähnten weiteren Ausgabe schreibt er überdies, daß er ernsthaft vorhabe, selbst die Lücke zu schließen, wenn er »seine durch anhaltende Anstrengung des Geistes und unausgesetztes Wachen geschwächten Kräfte wieder gestärkt hätte«.

Der rührige holländische Mathematiker und Buchhändler Adriaan VLACQ (um 1600–1667) wittert in den Tafeln mit Recht ein großes Geschäft. Er gewinnt den holländischen Rechenmeister und Landmesser Ezechiel DE DECKER (1603/04 bis 1646/47) für seinen Plan, den Wettlauf mit der Zeit aufzunehmen, weil er »überzeugt ist«, daß der 66jährige BRIGGS »ob seiner sonstigen amtlichen Verpflichtungen, ganz zu schweigen von den Beschwerlichkeiten, denen alle Menschen ausgesetzt sind« nicht in der Lage sein würde, die Arbeit bald abschließen zu können (Vorwort der *Arithmetica logarithmica* von 1628, siehe unten). Da VLACQ außerdem erkennt, daß 10 Stellen »für den allgemeinen Gebrauch mehr als genug sind«, läßt er DE DECKER, für den er NAPIERS *Descriptio* übersetzt, im Oktober 1626 die *Nieuwe tel-konst* – »Neue Zählkunst« – herausbringen; sie enthält die auf 10 Stellen gekürzten BRIGGSschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 und GUNTERS logarithmische trigonometrische Tafeln und kündigt die Fortsetzung an. Der Entschluß, die Lücke zwischen 20000 und 90000 nur 10stellig zu schließen, bringt einen erheblichen Zeitgewinn. Bereits im Oktober 1627 kann daher DE DECKER den *Tweede deel van de nieuwe tel-konst* – »Zweiter Teil der neuen Zählkunst« – herausgeben. Neben einer von ihm verfaßten Einleitung enthält sie die dekadischen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000, die größtenteils von VLACQ berechnet worden waren.*

Da sich VLACQ bewußt wurde, daß nur eine lateinische Ausgabe Erfolg haben wird, verbindet er 1628 diese Tafeln mit dem nur wenig veränderten Text von BRIGGS' *Arithmetica logarithmica*, fügt die von ihm mit der Schrittweite 1′ neu berechneten Logarithmen der trigonometrischen Funktionen hinzu und deklariert, ohne jede Erwähnung DE DECKERS, das Ganze als 2., vermehrte Auflage von BRIGGS' *Arithmetica logarithmica*. Sie wird ein großer Erfolg und trägt zur raschen Verbreitung der dekadischen Logarithmen bei. BRIGGS ist sicher nicht sehr erfreut. Doch hören wir ihn hierzu selbst in einem Brief an den jungen Mathematiker John PELL (1611–1685) vom 25.10.1628 (Übersetzung im Lösungsheft):

> »My desire was to have those chiliades that are wantinge betwixt 20 and 90 calculated and printed, and I had done them all almost by my selfe, and by some frendes whom my rules had sufficiently informed, and by agreement the busines was conveniently parted amongst us; but I am eased of that charge and care by one Adrian Vlacque, an Hollander, who hathe done all the whole hundred chiliades and printed them in Latin, Dutche and Frenche, 1000 bookes in these 3 languages, and hathe sould them almost all. But he hathe cutt off 4 of my figures throughout; and hathe left out my dedication, and to the reader, and two chapters the 12 and 13, in the rest he hath not varied from me at all.«

Die VLACQsche Tafel ist die Mutter aller weiteren Logarithmentafeln. Sie enthält im ganzen nur 600 Fehler, davon nur 171 in den ersten 7 Stellen!

Am Ende seiner *Arithmetica logarithmica* hat BRIGGS angekündigt, er hoffe, in einem weiteren Buch »die edelste, mit der Lehre von den sphärischen Dreiecken in innigster

* Das Werk geriet völlig in Vergessenheit. Erst 1920 wurde ein Exemplar gefunden.

Verbindung stehende Anwendung der Logarithmen« zeigen zu können. Er greift dazu auf seine um 1600 berechneten 15stelligen trigonometrischen Tafeln zurück und berechnet deren Logarithmen, für den Sinus auf 14, für den Tangens auf 10 Stellen. Dabei entscheidet er sich für eine dezimale Winkelunterteilung! Als Schrittweite wählt er $\frac{1}{100}°$. Auf BRIGGS' Bitten hin läßt VLACQ das Tafelwerk samt Konstruktionsanleitung auf seine Kosten drucken; währenddessen stirbt BRIGGS. Die noch fehlende Anwendung auf die ebene und sphärische Trigonometrie verfaßt, von BRIGGS noch gebeten und von VLACQ schließlich gedrängt, 1632 – das Vorwort trägt das Datum des 30. Oktober – BRIGGS' Freund Henry GELLIBRAND (1597–1637), Professor für Astronomie. VLACQ bringt beide Teile 1633 unter dem Titel *Trigonometria Britannica* in Gouda heraus. Nun hat VLACQ selbst aber schon vor drei Jahren eine 10stellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen mit einer Schrittweite von nur 10″ berechnet, was bei der Interpolation eine gerade in der Astronomie benötigte größere Genauigkeit liefert. Da VLACQ außerdem erwartet, daß die dezimale Unterteilung des Grades auf Ablehnung stoßen wird, entschließt er sich, obwohl er BRIGGS' Dezimalteilung begrüßt hat, seine eigenen Tafeln, zusammen mit GELLIBRANDS kaum verändertem Text, noch im selben Jahr, also 1633 – die Widmung trägt das Datum des 26. April – unter dem Titel *Trigonometria artificialis* ebenfalls in Gouda erscheinen zu lassen. Vielleicht hätte sich ohne VLACQS Buch BRIGGS' dezimale Winkelteilung durchgesetzt!

In den bisher aufgeführten Werken wird das Rechnen mit den Logarithmen an Beispielen vorgeführt. Es ist das Verdienst von William OUGHTRED (1574–1660), dem Erfinder des Rechenstabs (1621), in seinem 1647 erschienenen *The Key of the mathematicks, new forged and filed* die unseren Sätzen 160.1 bis 161.1 entsprechenden Rechenregeln kurz und präzise formuliert zu haben.* OUGHTRED wird im übrigen für den Verfasser des anonymen *Appendix* gehalten, der der 2. Auflage von WRIGHTS Übersetzung der *Descriptio* 1618 angefügt wurde und in dem eine neue Methode zur Berechnung der Logarithmen vorgeführt wird, die BRIGGS 1624 auch in seiner *Arithmetica logarithmica* verwendet.

Erhebliche Fortschritte machte die Berechnung der Logarithmen, als man lernte, unendliche Reihen hierfür einzusetzen. Das können wir hier aber nicht mehr darstellen.

Sicher ist dir aufgefallen, daß das Wort **Basis** in diesem historischen Überblick überhaupt noch nicht gefallen ist. Es muß uns heute wirklich erstaunen, daß das bereits von Michael STIFEL (1487?–1567) in seiner *Arithmetica integra* 1544 behandelte Problem, zu vorgegebener Basis b und vorgegebenem Potenzwert a den Wert des Exponenten x zu suchen, der die Gleichung $b^x = a$ löst (Aufgabe 67/**8**), nicht zur Einführung des Logarithmus als Lösung dieser Gleichung führte. Erst langsam gewinnt eine solche Vorstellung an Boden. So schreibt zwar David GREGORY (1661–1710) schon 1684 in seiner *Exercitatio geometrica de dimensione figurarum* »Exponentes sunt ut logarithmi« [Exponenten sind wie Logarithmen] und 1742 William GARDINER (?–?) in seinen *Tables of Logarithms* »The common Logarithm of a number is the Index of that power of 10, which is equal to the number: That is, The Logarithm of any number $a = \overline{10}|^{+x}$, or $\overline{10}|^{-x}$, is $+x$, or $-x$.« Es ist aber Leonhard EULER (1707–1783) vorbehalten, 1748 in seiner *Introductio in Analysin Infinitorum* – »Einleitung in die Analysis des Unendlichen« – diese grundlegend neue Sicht des

* The Summe of two Logarithmes, is the Logarithme of the Product of their Valors: and their difference is the Logarithme of the Quotient. The Logarithme of the Side, drawne into the *Index* or number of Dimensions of any *Potestas*, is the Logarithme of the same *Postestas*. The Logarithme of any *Potestas* divided by the number of its Dimensions, sheweth the Logarithme of its Root.

Logarithmusbegriffs begründet zu haben. In Nr. 101 betrachtet er in der Gleichung $y = a^z$ die Werte a und z als gegeben, behandelt also das übliche Potenzieren. Dann heißt es aber in Nr. 102:

> »Ebenso aber, wie bei gegebenem Werte von a zu jedem Wert von z der entsprechende Wert von y gefunden werden kann, läßt sich auch umgekehrt zu jedem gegebenen positiven Wert von y der Wert von z angeben, für welchen $a^z = y$ ist. Dieser Wert von z heißt, insofern er als Funktion von y betrachtet wird, der *Logarithmus* von y. Es setzt daher die Lehre von den Logarithmen die Annahme einer bestimmten konstanten Zahl a voraus, welche deshalb die *Basis* der Logarithmen genannt wird.«*

Diese uns heute so einsichtige Definition des Logarithmus als Exponent setzte sich in Deutschland erst gegen die Mitte des 19. Jh.s durch, da man sie für Anfänger für viel zu schwierig erachtete. In Frankreich hielten bedeutende Mathematiker noch zu Beginn dieses Jahrhunderts an der Definition des Logarithmus durch die arithmetisch-geometrische Doppelfolge fest.
Heute ist durch die billig gewordenen Taschenrechner die Verwendung der Logarithmen beim praktischen Rechnen fast völlig verschwunden. Wir sollten aber nicht übersehen, daß viele Berechnungen, die der Taschenrechner ausführt, nach einem Programm auf logarithmischer Grundlage ablaufen. Wenn wir uns auch mit vollem Recht die Vorteile der modernen Technik zunutze machen, um »die Rechenarbeit zu verringern, die Kräfte des angespannten Verstandes zu schonen und Zeit zu gewinnen«**, wie KEPLER schon als einen der Zwecke der *Tabulae Rudolphinae* erklärte, so sollten wir doch daran denken, daß es nicht nur »für einen Professor der Mathematik schimpflich ist, sich über irgendeine Abkürzung des Rechnens kindisch zu freuen«***, wenn man deren Grundlage nicht verstanden hat.

* Quemadmodum autem dato numero a ex quovis valoris ipsius z reperiri potest valor ipsius y, ita vicissim dato valore quocunque affirmativo ipsius y conveniens dabitur valor ipsius z, ut sit $a^z = y$; iste autem valor ipsius z, quatenus tanquam functio ipsius y spectatur, vocari solet *Logarithmus* ipsius y. Supponit ergo doctrina logarithmorum numerum certum constantem loco a substituendum, qui propterea vocatur *basis* logarithmorum.

** minuere laborem computandi, parcere viribus intentae mentis, et redimere tempus

*** »turpe esse Professori Mathematico, super compendio aliquo calculi pueriliter exultare«, lautet der von KEPLER im Vorwort seines *Supplementum Chiliadis Logarithmorum* (1625) wiedergegebene Vorwurf der älteren deutschen Mathematiker, er habe sich für das logarithmische Rechnen ohne soliden Beweis begeistert.