Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

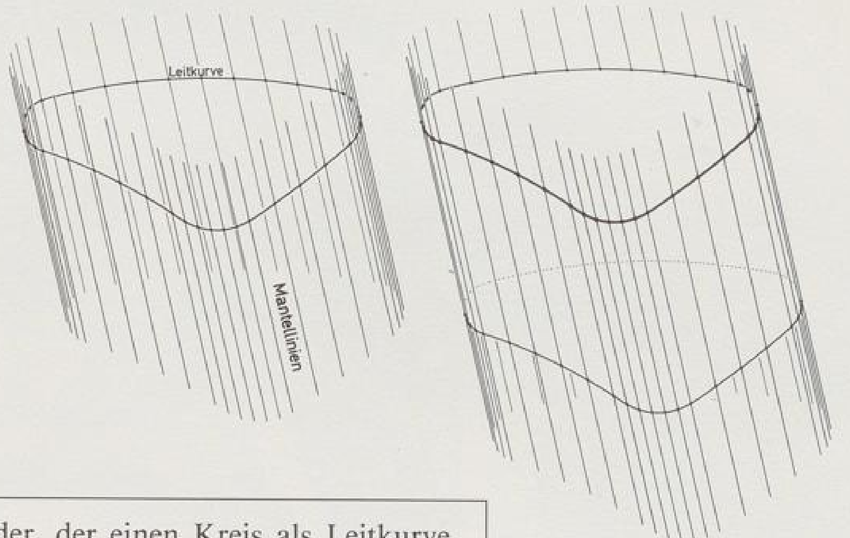
3. Kapitel Zylinder und Kegel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

3. Kapitel
Zylinder und Kegel

3.1 Der Zylinder

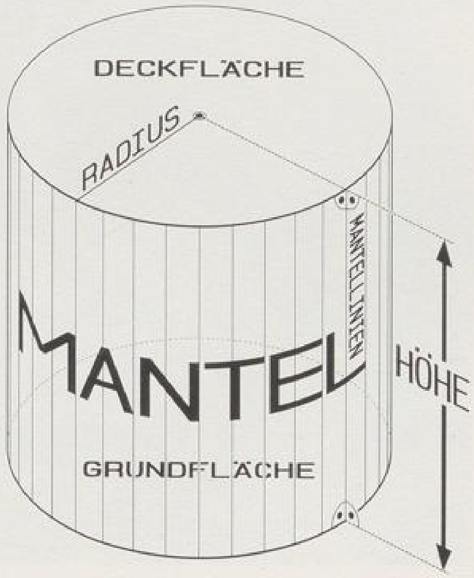
Neben dem Quader ist der Zylinder die häufigste regelmäßige Körperform in unserer Umwelt: Gaskessel, Litfaßsäulen, Münzen usw. In der Mathematik versteht man unter einem Zylinder einen Körper, der entsteht, wenn man eine Gerade parallel zu sich längs einer geschlossenen ebenen Kurve im Raum verschiebt; die Gerade darf nicht in der Ebene der Kurve liegen. Man kann sich auch vorstellen, dass das von der Kurve begrenzte Flächenstück parallel zu sich im Raum verschoben wird. Die ebene Kurve heißt **Leitkurve**, die Gerade heißt **Erzeugende** oder **Mantellinie** des Zylinders. Es gibt also unendlich viele verschiedene Zylinderformen. Wir definieren nur den einfachsten, aber wichtigsten Fall:

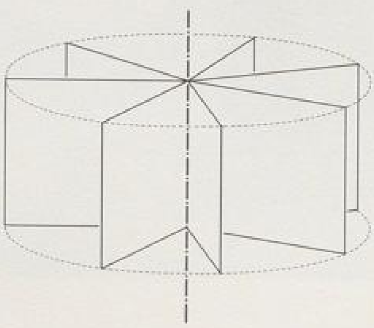


Definition

> Ein Zylinder, der einen Kreis als Leitkurve hat und dessen Mantellinien senkrecht auf der Kreisfläche stehen, heißt **gerader Kreiszylinder**.

Im Folgenden beschränken wir uns auf endliche gerade Kreiszylinder, die von zwei parallelen Kreisflächen begrenzt sind, und nennen sie der Einfachheit halber kurz Zylinder. So ein Zylinder entsteht auch, wenn ein Rechteck um eine Seite als Drehachse rotiert.





Schaut man schräg auf den Zylinder, so sieht man Grund- und Deckfläche als Ellipse. Beim Zeichnen eines Schrägbilds muss man also die Kreise von Deck- und Grundfläche zu Ellipsen stauchen.

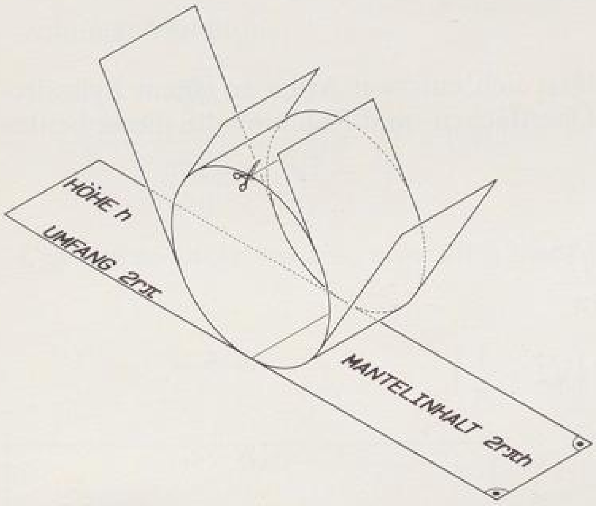
Bezeichnungen am Zylinder:	D	Deckfläche	r	Radius
	G	Grundfläche	h	Höhe
	M	Mantelfläche	m	Mantellinie
	S	Oberfläche		

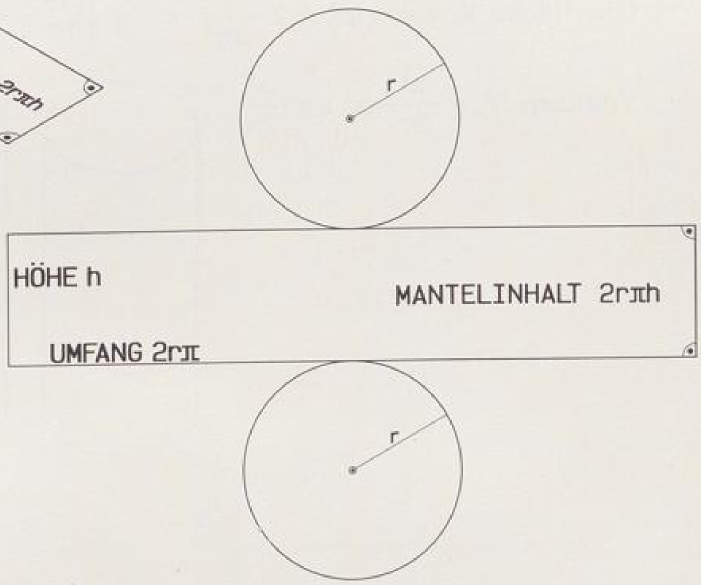
Oberfläche

Schneidet man den Mantel längs einer Mantellinie auf, so lässt er sich zu einer Rechteckfläche aufbiegen. Die Rechteckseiten sind die Höhe h und der Grundkreisumfang $2r\pi$. Deshalb gilt für

Mantelinhalt $\boxed{M = 2r\pi h}$

Oberflächeninhalt $\boxed{S = 2r\pi h + 2r^2\pi}$

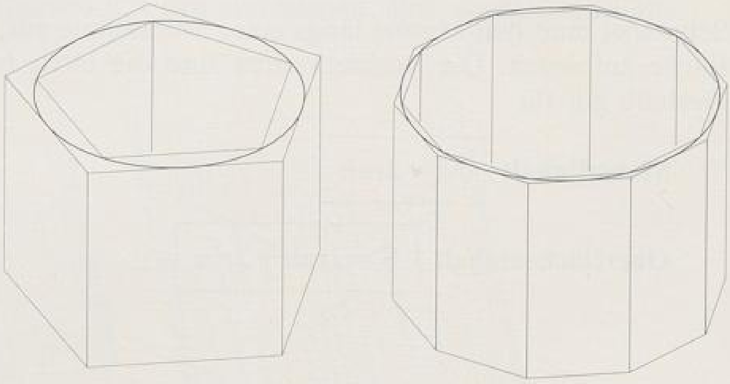




Volumen

Den Kreisinhalt haben wir bestimmt, indem wir die Kreisfläche zwischen ein- und umbeschriebene regelmäßige Vielecke eingesperrt haben. In ähnlicher Weise nähern wir den Zylinder durch ein- und umbeschriebene Prismen an. Die Prismen entstehen, wenn man Grund und Deckfläche des Zylinders durch ein- und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke ersetzt. Für alle diese Prismen gilt: **Volumen = Grundfläche mal Höhe**. Weil sich bei genügend großer Eckenzahl die Prismen beliebig wenig vom Zylinder unterscheiden, verwenden wir diese Formel auch für Zylinder:

Volumen $\boxed{\mathbf{V = Gh = r^2\pi h}}$



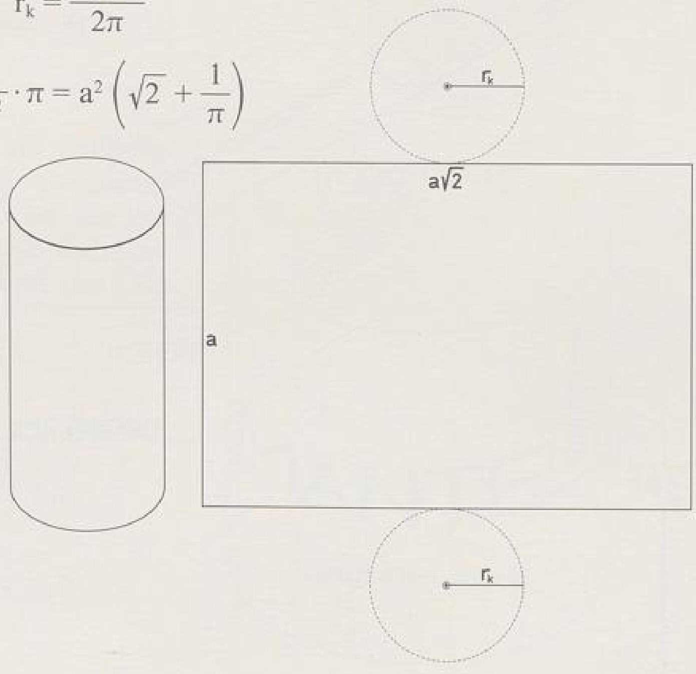
Beispiel: Ein Blatt Papier im DIN-Format lässt sich auf zwei Arten zu einem Zylindermantel biegen. Wie verhalten sich Oberflächen- und Rauminhalte dieser beiden Zylinder?

Zuerst der Kurze-Dicke:

Umfang $2r_k\pi = a\sqrt{2}$ Radius $r_k = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\pi}$

Oberfläche $S_k = a \cdot a\sqrt{2} + 2 \cdot \dfrac{a^2}{2\pi^2} \cdot \pi = a^2\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\pi}\right)$

Volumen $V_k = \dfrac{a^2}{2\pi^2} \cdot \pi \cdot a = \dfrac{a^3}{2\pi}$

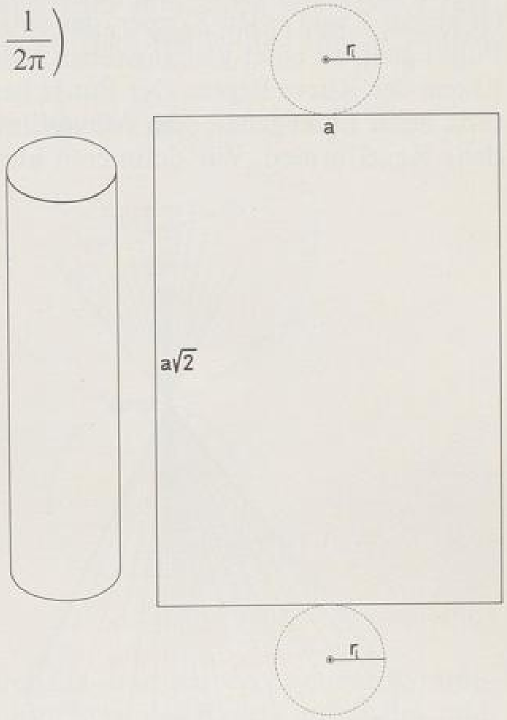


Jetzt der Lange-Dünne:

$$\text{Umfang } 2r_l\pi = a \qquad \text{Radius } r_l = \frac{a}{2\pi}$$

$$\text{Oberfläche } S_l = a \cdot a\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot \pi = a^2\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2\pi}\right)$$

$$\text{Volumen } V_l = \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot \pi a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4\pi}$$



Oberflächen-Verhältnis:

$$\frac{S_k}{S_l} = \frac{a^2\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\pi}\right)}{a^2\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2\pi}\right)} = \frac{2\pi\sqrt{2} + 2}{2\pi\sqrt{2} + 1} = 1{,}10\ldots$$

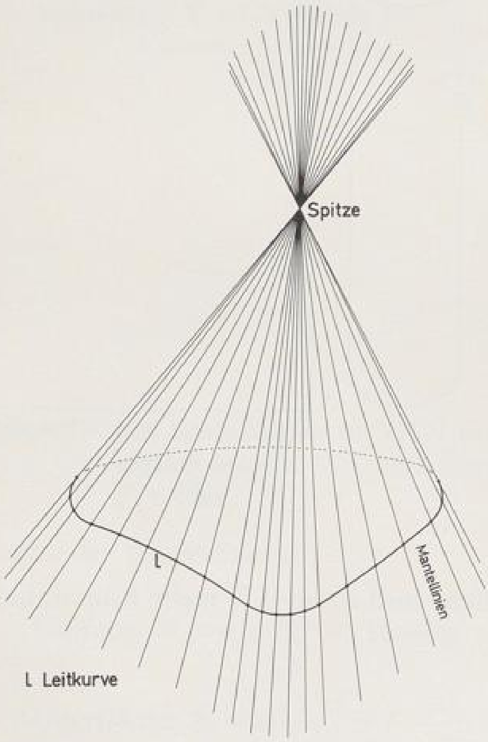
Volumen-Verhältnis:

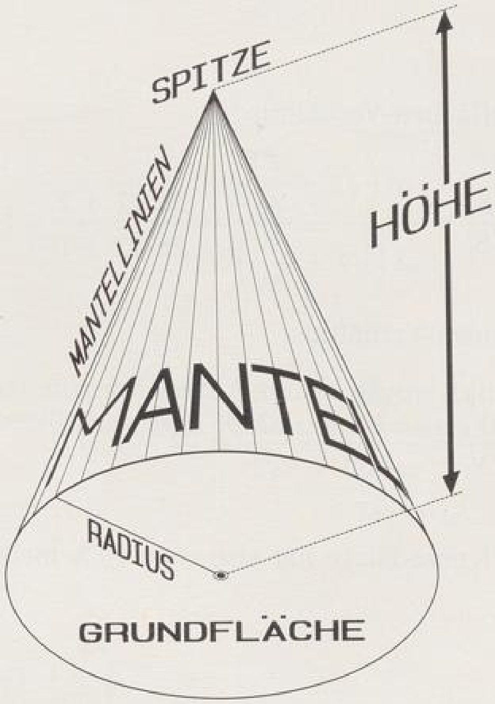
$$\frac{V_k}{V_l} = \frac{\frac{a^3}{2\pi}}{\frac{a^3\sqrt{2}}{4\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1{,}41\ldots$$

Der Kurze-Dicke hat also etwa 10 % mehr Oberfläche und etwa 41 % mehr Rauminhalt.

3.2 Der Kegel

Kegelformen finden wir in der Baukunst als Turmdächer und sonst zum Beispiel bei Schul-, Eistüten, Kopfbedeckungen, Schüttkegel usw. In der Mathematik versteht man unter einem Kegel einen Körper, der entsteht, wenn man eine Gerade, die durch einen festen Punkt geht, an einer geschlossenen ebenen Kurve entlangführt; der Punkt darf nicht in der Ebene der Kurve liegen. Der Punkt heißt **Spitze**, die ebene Kurve heißt **Leitkurve**, die Gerade heißt **Erzeugende** oder **Mantellinie** des Kegels. Es gibt also unendlich viele verschiedene Kegelformen. Wir definieren nur den einfachsten, aber wichtigsten Fall:



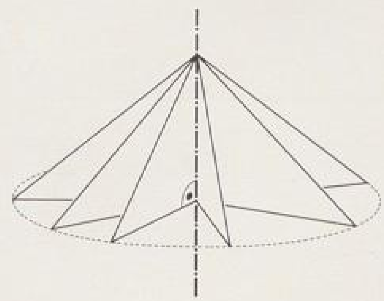


Definition

Ein Kegel, der einen Kreis als Leitkurve hat und bei dem die Spitze senkrecht überm Kreismittelpunkt liegt, heißt **gerader Kreiskegel**.

Im Folgenden beschränken wir uns auf endliche gerade Kreiskegel, die von einer Kreisfläche und der Spitze begrenzt sind, und nennen sie der Einfachheit halber kurz Kegel. So ein Kegel entsteht auch, wenn ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete als Drehachse rotiert.

Wie beim Zylinder erscheint auch hier im Schrägbild die Grundfläche als Ellipse.



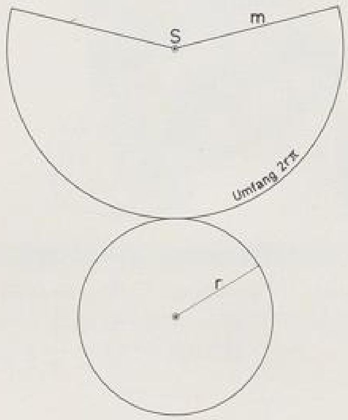
Bezeichnungen am Kegel:

G	Grundfläche	r	Radius
M	Mantelfläche	h	Höhe
S	Oberfläche	m	Mantellinie

Oberfläche

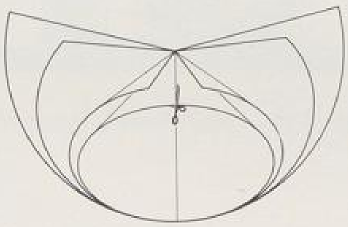
Schneidet man den Mantel längs einer Mantellinie auf, so lässt er sich zu einer Kreissektorfläche aufbiegen: Die Mantellinie m wird zum Radius r des Sektors, der Umfang des Grundflächenkreises wird zur Bogenlänge b des Sektors. Im Bild sehen wir einen Kegel auf der Zeichenebene liegen; sein Mantel wird oben längs einer Mantellinie aufgeschnitten und in die Zeichenebene aufgebogen.

Wegen $F_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Bogenlänge} \cdot \text{Sektorradius}$ gilt $M = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot m$.



Mantelinhalt $\boxed{\mathbf{M = r\pi m}}$

Oberflächeninhalt $\boxed{\mathbf{S = r\pi m + r^2\pi}}$

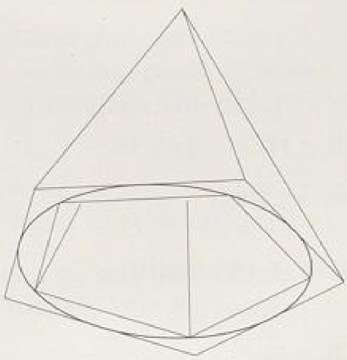


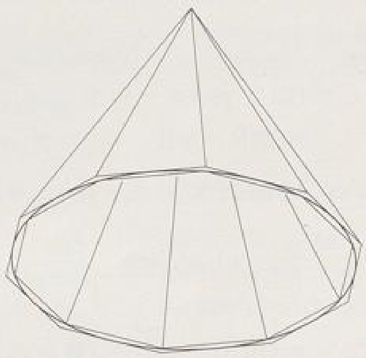
Volumen

Ähnlich wie beim Zylinder nähern wir den Kegel durch ein- und umbeschriebene Pyramiden an. Die Pyramiden entstehen, wenn man die Grundfläche des Kegels durch ein- und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke ersetzt. Für alle diese Pyramiden gilt:

Volumen $= \frac{1}{3} \cdot$ **Grundfläche · Höhe.** Weil sich bei genügend großer Eckenzahl die Pyramiden beliebig wenig vom Kegel unterscheiden, verwenden wir diese Formel auch für den Kegel:

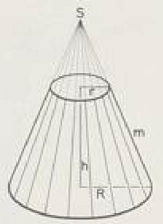
Volumen $\boxed{\mathbf{V = \frac{1}{3}\,Gh = \frac{1}{3}\,r^2\pi h}}$

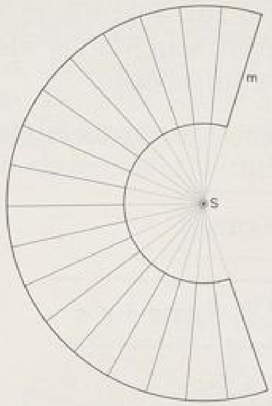




Wir wenden die neuen Formeln an und berechnen Volumen und Mantelinhalt eines Kegelstumpfs. Ein **Kegelstumpf** entsteht, wenn man von einem Kegel einen Kegel abschneidet.

Die begrenzenden Kreisflächen mit den Radien R und r heißen Grund- und Deckfläche, ihr Abstand h heißt Höhe des Kegelstumpfs; die Mantellinien des Stumpfs sind die Reste der Mantellinien des ursprünglichen Kegels.





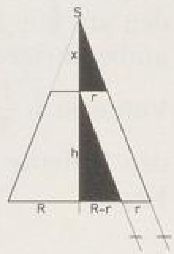
Volumen $V_{\text{Stumpf}} = V_{\text{großer Kegel}} - V_{\text{kleiner Kegel}}$

$$= \frac{1}{3} R^2\pi(h + x) - \frac{1}{3} r^2\pi x$$

$$= \frac{1}{3} \pi(R^2h + R^2x - r^2x)$$

$$= \frac{1}{3} \pi(R^2h + x(R^2 - r^2)) \qquad (\blacklozenge)$$

Aus der Ähnlichkeit der schwarzen Dreiecke folgt



$\frac{x}{r} = \frac{h}{R-r}$, also $x = \frac{hr}{R-r}$, eingesetzt in ($\blacklozenge$) ergibt

$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{1}{3}\pi \left[R^2h + \frac{hr}{R-r}(R^2 - r^2)\right]$$

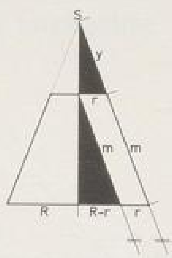
$$\mathbf{V_{Stumpf} = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + rR + r^2)}$$

Mantel $M_{\text{Stumpf}} = M_{\text{großer Kegel}} - M_{\text{kleiner Kegel}}$

$$= (m + y)R\pi - yr\pi$$

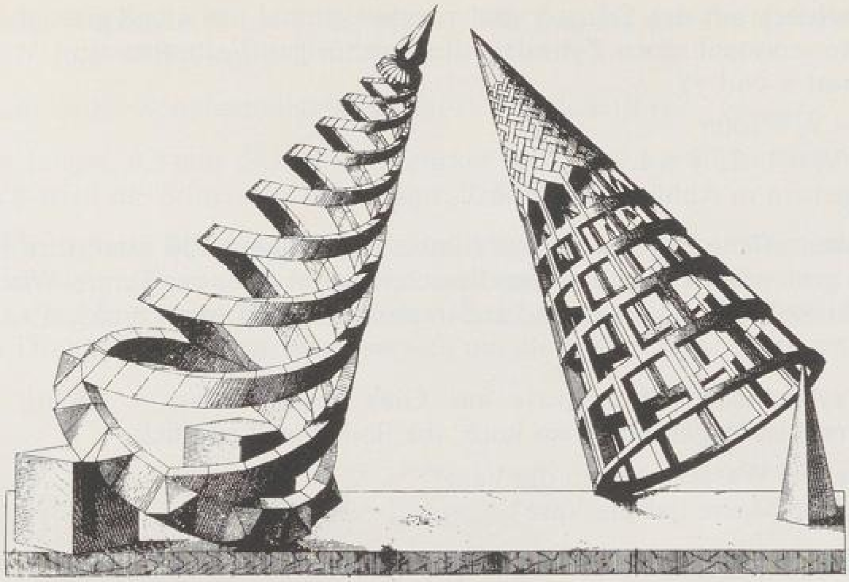
$$= \pi(mR + yR - yr) = \pi(mR + y(R - r)) \qquad (\bullet)$$

Aus der Ähnlichkeit der schwarzen Dreiecke folgt



$\frac{y}{r} = \frac{m}{R-r}$, also $y = \frac{rm}{R-r}$, eingesetzt in ($\bullet$) ergibt

$$\mathbf{M_{Stumpf}} = \pi\left[mR + \frac{rm}{R-r}(R - r)\right] = \boldsymbol{\pi m(R + r)}$$



Wenzel JAMNITZER, 1568, Perspectiva Corporum Regularium

Aufgaben zu 3.1

1. Berechne die fehlenden Stücke eines Zylinders

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
r	1	10	4	0,1					
h	2	10			5	0,4			
V			π		20π		20π	1	
S				π					2π
M						8π	20π	1	π

•2. Ein Rechteck mit den Seiten x und y lässt sich auf zwei Arten zu einem Zylinder-zeugt so jedesmal einen Zylinder. Berechne die Verhältnisse der Volumina, der Mantelflächen und der Oberflächen dieser Zylinder.

a) $x = 10,\ y = 20$
b) $x : y = \sqrt{2}$
c) allgemein in Abhängigkeit von x und y

•3. Ein Rechteck mit den Seiten x und y lässt sich auf zwei Arten zu einem Zylindermantel biegen. Wie verhalten sich Oberflächen und Rauminhalte dieser Zylinder

a) $x = 10,\ y = 20$ **b)** $x : y = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

c) allgemein in Abhängigkeit von x und y?

• **4.** Ein Rechteck mit den Seiten x und y rotiert einmal um x und einmal um y und erzeugt so jedesmal einen Zylinder; die zugehörigen Volumina sind V_x und V_y. Wie groß sind x und y?

a) $V_x = V_y = 100\pi$
b) $V_x : V_y = 1:2,\ y = 4$
c) allgemein in Abhängigkeit von V_x und V_y

5. Eine oben offene Regentonne aus dünnem Blech fasst 800 Liter, ihre Höhe ist doppelt so groß wie ihr Durchmesser. Berechne den Radius der Tonne. Wie viel kg Farbe braucht man, um sie innen und außen anzustreichen, wenn 0,1 kg etwa für 1 m^2 ausreicht?

6. Eine zylindrische Blumenvase aus Glas (Innenradius = 3,6 cm, Außenradius = 4,2 cm) ist insgesamt 30 cm hoch, ihr Boden ist 1 cm dick.

a) Wie viel Wasser passt in die Vase?
b) Welche Masse hat die Vase? ($\varrho_{Glas} = 2{,}2\ g/cm^3$)

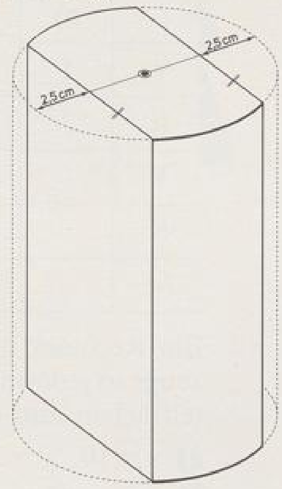
7. Berechne Volumen und Oberfläche des Zylinders, der einem Würfel mit der Kantenlänge a

a) einbeschrieben **b)** umbeschrieben ist.

8. Ein Würfel hat dieselbe Oberfläche wie ein Zylinder, dessen Durchmesser und Höhe gleich lang sind. Welcher Körper hat das größere Volumen? Um wie viel % ist sein Volumen größer?

: 9. Von einem Eisenzylinder (r = 5 cm, h = 15 cm) werden von der Rundung auf beiden Seiten 2,5 cm weggefeilt (im Bild gestrichelt).

a) Welche Oberfläche hat der Restkörper?
b) Welche Masse hat der Restkörper, welche haben die Feilspäne?
($\varrho_{Fe} = 7{,}9\ g/cm^3$)



10. Ein Messzylinder hat einen Innendurchmesser von 25 mm. In welchem Abstand liegen die Teilstriche für 1 cm^3?

11. In einem Messzylinder mit der Wandstärke 2 mm stehen 500 cm^3 Wasser 25 cm hoch. Berechne den Innendurchmesser.

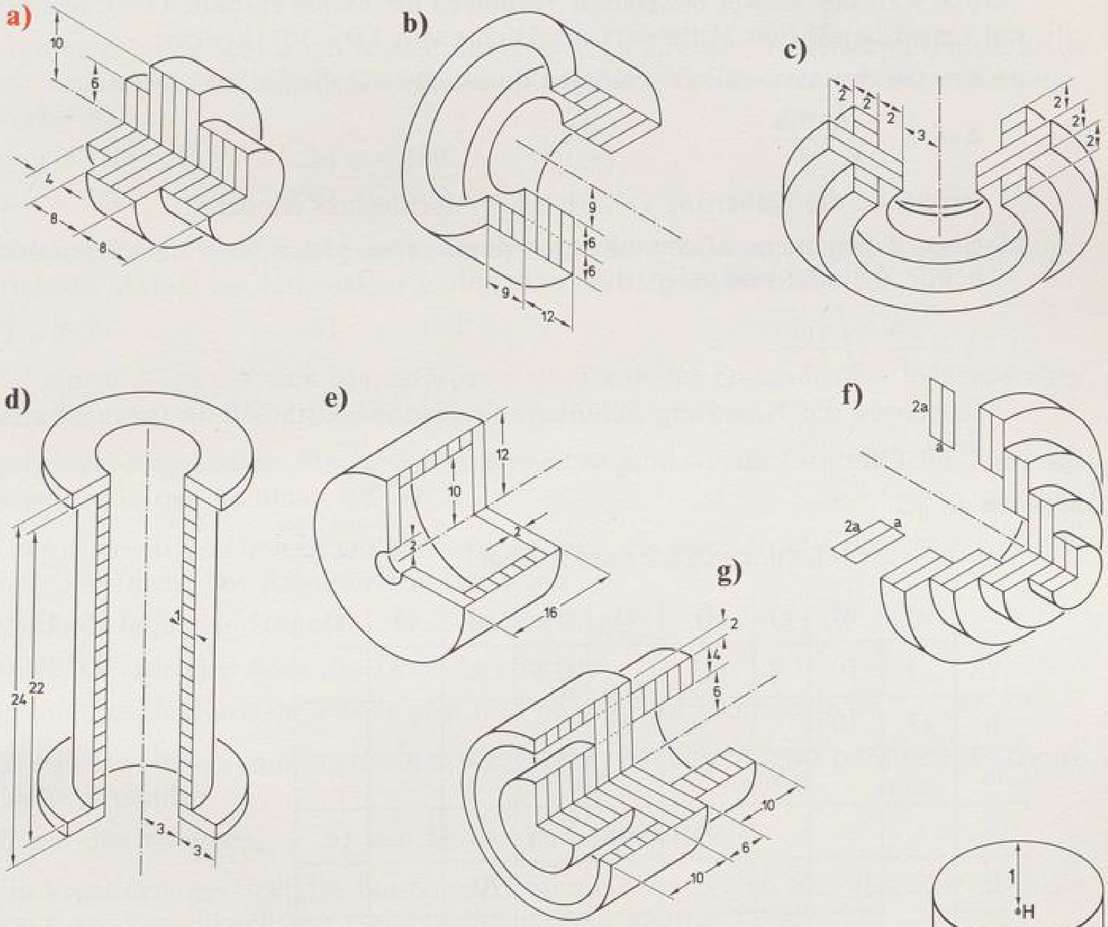
12. Durch einen Würfel bohrt jemand ein zylindrisches Loch parallel zu einer Kante. Wie verhalten sich Lochdurchmesser und Kantenlänge, wenn der Würfel dann nur noch halb so schwer ist?

13. Eine Rolle Kupferdraht hat 14 kg Masse. Wie lang ist der Draht, wenn er 1,8 mm dick ist? ($\varrho_{Cu} = 8{,}8\ g/cm^3$)

14. Ein 30 cm langer Spaghetto hat 0,3 g Masse. Wie dick ist er? ($\varrho_{Spaghetti} = 1{,}2\ g/cm^3$).

15. Ein 1 m langer, 0,5 mm dicker Kupferdraht soll mit 0,1 g Silber versilbert werden. Wie dick wird die Silberschicht? ($\varrho_{Ag} = 10{,}5\ g/cm^3$).

16. Die Bilder zeigen Schnittbilder von Drehkörpern. Die Schnittebenen (schraffiert) schneiden sich rechtwinklig in der Symmetrieachse des Drehkörpers.
Berechne Volumen und Oberfläche des Drehkörpers sowie den Inhalt der Fläche, die den Drehkörper erzeugt, wenn sie sich um die Symmetrieachse (gepunktstrichelt) dreht.



• 17. DUDENEYS Fliege
Von Englands größtem Rätselerfinder Henry Ernest DUDENEY stammt folgendes Fliegenproblem: Auf der Außenseite eines Glaszylinders sitzt eine Fliege F und will auf kürzestem Weg zum Honigtropfen H krabbeln. Wie lang ist ihr Weg?

18. Schneide von einem zylindrischen Korken (Radius r) zwei kongruente Stücke so ab, dass der Rest als Stöpsel genau hineinpasst in ein Rohr mit
- kreisförmigem Querschnitt (Radius r),
- quadratischem Querschnitt (Seite 2r),
- dreieckigem Querschnitt (gleichschenklig, Basis = Höhe = 2r).

Wie schaut dieser Allzweckstöpsel aus? Welches Volumen hat er?

19. Oberfläche des Menschen
In der Medizin berechnet man die Oberfläche A eines Menschen mit der Formel $A = 71{,}84 \cdot m^{0{,}425} \cdot h^{0{,}425}$ von DUBOIS/DUBOIS aus dem Jahr 1916.
m ist die Masse in kg und h die Körperhöhe in cm, A ist die Oberfläche in cm^2. Um eine einfachere Formel zu finden, ersetzt man den menschlichen Körper durch einfachere geometrische Körper mit gleichem Volumen und gleicher Höhe. Weil aber die Formel statt des schwer messbaren Volumens die Masse enthalten soll, rechnet man mit einem bewährten Mittelwert der Dichte von $1{,}05 \cdot 10^{-3}\,kg/cm^3$.

a) Ersetze den menschlichen Körper durch einen Zylinder und zeige:

$$A = \frac{16}{7}\sqrt{\frac{\pi m h}{r}}$$

Verwende die Näherung $1 + r/h \approx 8/7$ (schlechtes Modell).

b) Ersetze den menschlichen Körper durch zwei gleich hohe nebeneinander stehende Zylinder und zeige, dass dann gilt

$$A = \frac{30}{7}\sqrt{\frac{\pi m h}{r}}$$

Verwende die Näherung Schulterbreite/Höhe $= 4r/h \approx 2/7$ (brauchbares Modell).

Aufgaben zu 3.2

1. Berechne die fehlenden Stücke eines Kegels

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
r	5	10	4	0,3		0,4	2		
h	12	10			5				
m			5						2
V				$0{,}01\pi$	60π				
S							20π	3π	
M						$0{,}8\pi$		2π	2π

2. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten x und y rotiert einmal um x und einmal um y und erzeugt so jedesmal einen Kegel. Berechne die Verhältnisse der Volumina, der Mantelflächen und der Oberflächen dieser Kegel.

a) $x = 35,\ y = 84$

b) $x : y = \sqrt{2}$

c) allgemein in Abhängigkeit von x und y

• **3.** Man biegt einen Sektor mit Mittelpunktswinkel μ und dem Radius R zu einem Kegelmantel. Berechne das Kegelvolumen:

$\mu = 90°$, $R = 1$ **b)** $\mu = 270°$, $R = 1$

c) $\mu = 180°$, $R = 1/\pi$ **d)** $\mu = 120°$, $R = 3$

• **4.** Eine Symmetrieebene eines Kegels schneidet aus ihm ein gleichschenkliges Dreieck aus. Der Winkel an der Spitze heißt **Öffnungswinkel** ω des Kegels. Entscheide mit Rechnung, ob die folgenden Kegel spitze, stumpfe oder rechtwinklige Öffnungswinkel haben.

a) $r = 1$, $m = \sqrt{2}$

b) $r = 1$, $h = \sqrt{3}$

c) $r = 12$, $m = 17$.

• **5.** Man biegt einen Sektor mit Mittelpunktswinkel μ zu einem Kegelmantel. Entscheide mit Rechnung, ob die folgenden Kegel spitze, stumpfe oder rechtwinklige Öffnungswinkel haben.

a) $\mu = 270°$ **b)** $\mu = 180°$

c) $\mu = 240°$ **d)** $\mu = \sqrt{2}\,\pi$

6. Welcher Zusammenhang besteht zwischen m und r bei einem Kegel, wenn der abgewickelte Mantel ein Kreissektor ist mit dem Mittelpunktswinkel

a) $\mu = 90°$ **b)** $\mu = 180°$?

7. Bei einem Kegel ist eine Mantellinie so groß wie der Durchmesser. Wie verhalten sich Volumen und Oberfläche?

• **8.** Bei einem Kegel ist die Mantelfläche doppelt so groß wie die Grundfläche. Wie hoch ist er, wenn das Volumen 100 ist?

9. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a rotiert um eine Gerade. Berechne Volumen und Oberfläche des Rotationskörpers, wenn

a) die Gerade eine Höhe des Dreiecks enthält,

b) die Gerade eine Seite des Dreiecks enthält,

c) die Gerade durch eine Ecke geht und parallel zur Gegenseite ist.

• **10.** In welcher Höhe x muss man einen Kegel (r, h) mit einer Ebene parallel zur Grundfläche schneiden,

a) um das Volumen, **b)** den Mantel zu halbieren?

• **11.** Ein kegelförmiges Sektglas hat eine Trichtertiefe von 15 cm und eine Trichterweite von 6 cm. Ein vorsichtiger Gast möchte nur ein »halbes Glas«.

a) Der Gastgeber füllt das Glas bis zur halben Höhe. Wie viel Sekt trinkt der Gast?

b) Der Gastgeber macht das Glas halb voll. Wie hoch steht der Sekt, wie viel trinkt der Gast?

c) Der Gastgeber füllt das Glas, bis die Sekt»ober«fläche halb so groß ist wie die Kreisfläche, die der Glasrand bildet. Wie hoch steht der Sekt, wie viel trinkt der Gast?

12. Ein Kegel mit m = 3r hat dieselbe Grundfläche wie ein anderer, größerer Kegel. Wie verhalten sich die Höhen, wenn

a) der größere doppeltes Volumen hat,

b) der größere doppelte Mantelfläche hat,

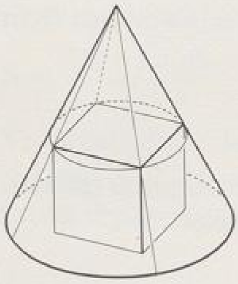
c) der größere doppelte Oberfläche hat?

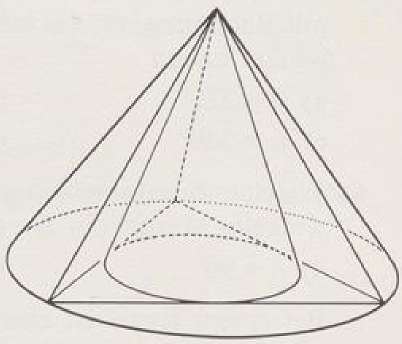
• **13.** Ein Kegel mit h = 4r und ein Zylinder haben gleiches Volumen und

a) gleiche Höhe **b)** kongruente Grundflächen.

Berechne das Verhältnis der Mantelflächen und das der Oberflächen.

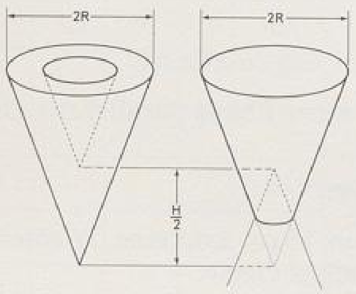
14. Einem Kegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h soll ein Würfel so einbeschrieben werden, dass der Würfel auf der Grundfläche des Kegels steht. Berechne die Kantenlänge k in Abhängigkeit von r und h.





15. Einem regelmäßigen Tetraeder der Kantenlänge k ist ein Kegel ein- und ein Kegel umbeschrieben. In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte dieser Kegel?

16. Aus einem Kegel (R, H) wird ein konzentrischer Kegel (r, h) mit gleichem Öffnungswinkel so ausgebohrt, dass die Spitzen die Entfernung s = H/2 haben. Welches Volumen hat der Restkörper,



a) wenn man von der Grundfläche zur Spitze bohrt,

b) wenn man von der Spitze zur Grundfläche bohrt?

17. Ein Kegel (r,h) wird längs seiner Achse um s verschoben. Welches Volumen überstreicht der Kegel,

a) wenn s = h ist,

b) s = h/2 ist?

• **18.** Ein Kegel (R, H) wird zylindrisch (Zylinderradius r) so durchbohrt, dass Kegel- und Zylinderachse zusammenfallen.

a) Berechne das Volumen des Restkörpers.

b) Wie groß muß r sein, damit das Volumen des Restkörpers halb so groß ist wie das des Kegels?

19. Der **Böschungswinkel** eines Kegels ist der Winkel zwischen einer Mantellinie und der Grundfläche. Ein Schüttkegel entsteht, wenn man körniges Gut aufschüttet. Der Böschungswinkel von Kohle ist 45°, der von Getreide 30°. Der Grundkreisumfang eines Schüttkegels sei 12 m. Welches Volumen hat er wenn es

a) ein Kohlekegel **b)** ein Getreidekegel ist?

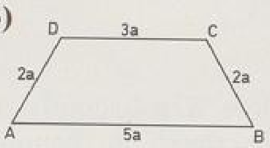
20. Das gleichschenklige Trapez ABCD rotiert um die Achse

a) AB **b)** CD **c)** BC

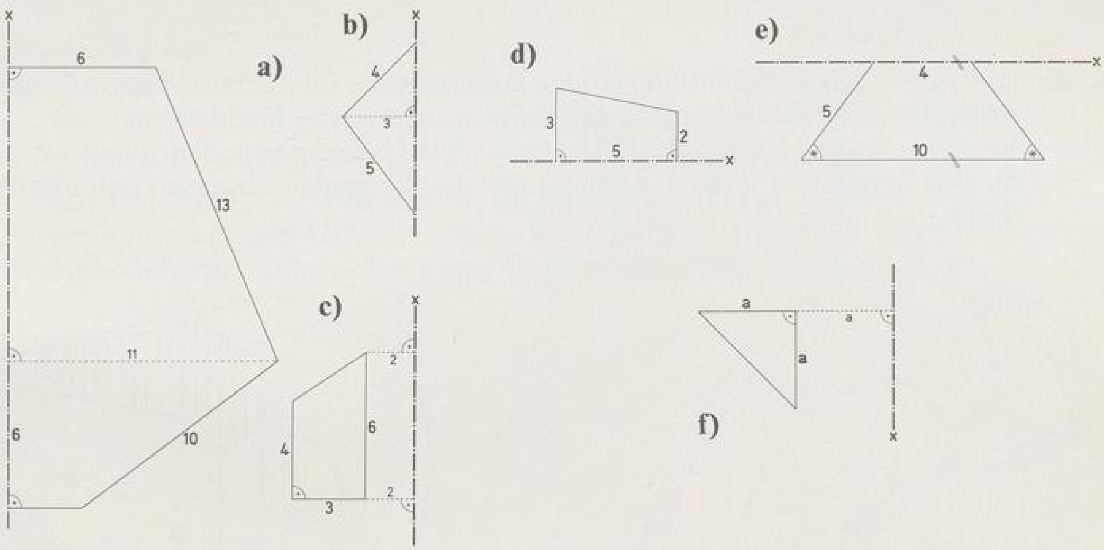
Berechne Volumen und Oberfläche der Rotationskörper.

α)

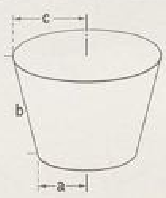
β)



21. Die gezeichneten Vielecke rotieren um die Achse x. Berechne Volumen und Oberfläche der Rotationskörper.



22. Gib Volumen und Mantelfläche des Kegelstumpfs in Abhängigkeit von a, b und c an.

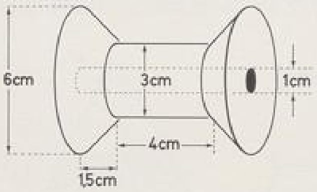


23. Ein Kegel (Mantellinie = Durchmesser) soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geschnitten werden, dass beide Teile gleiche Oberfläche haben. In welchem Verhältnis muss man die Mantellinie des Kegels teilen?

24. Ein Kessel von 500 Liter hat die Form eines Kegelstumpfs. Wie muss man seine Maße (auf cm gerundet) wählen, wenn gelten soll:
obere Weite : untere Weite : Tiefe = 4 : 2 : 3 ?

25. Ein 10 m langer Baumstamm hat die Form eines Kegelstumpfs. Berechne sein Volumen (auf dm^3 genau), wenn sein dickes Ende einen Umfang von 1,95 m hat, sein dünnes Ende einen von 1,64 m.

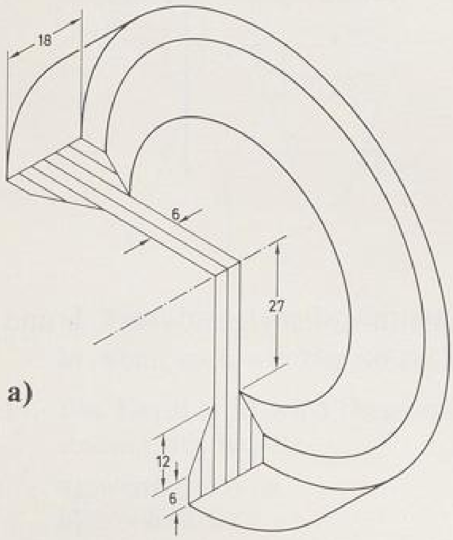
26. Berechne das Volumen der Garnrolle.



27. Das Volumen eines Kegelstumpfs (r, R = 3r, h) soll zwecks einfacherer Rechnung angenähert werden durch das Volumen eines gleich hohen Zylinders, dessen Radius das arithmetische Mittel der Kegelstumpfradien ist. Wie groß ist der prozentuale Fehler f?

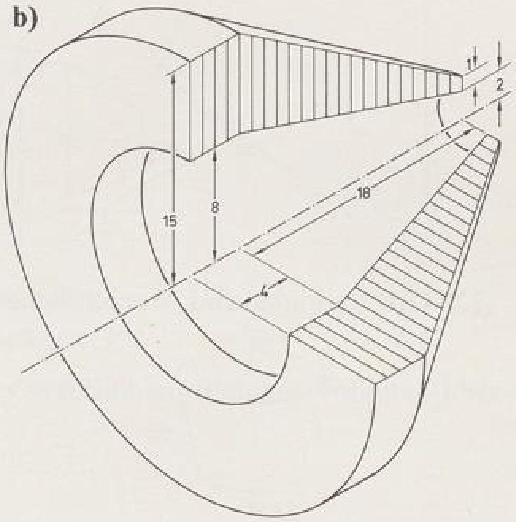
$$f = \frac{V_{\text{Kegelstumpf}} - V_{\text{Zylinder}}}{V_{\text{Kegelstumpf}}}$$

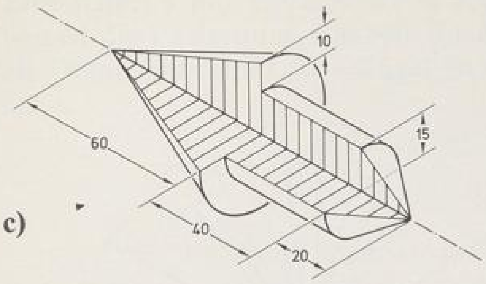
28. Die Bilder zeigen Schnittbilder von Drehkörpern. Die Schnittebenen (schraffiert) schneiden sich rechtwinklig in der Symmetrieachse des Drehkörpers.
Berechne Volumen und Oberfläche eines Drehkörpers sowie den Inhalt der Fläche, die den Drehkörper erzeugt, wenn sie sich um die Symmetrieachse (gepunktstrichelt) dreht.



a)

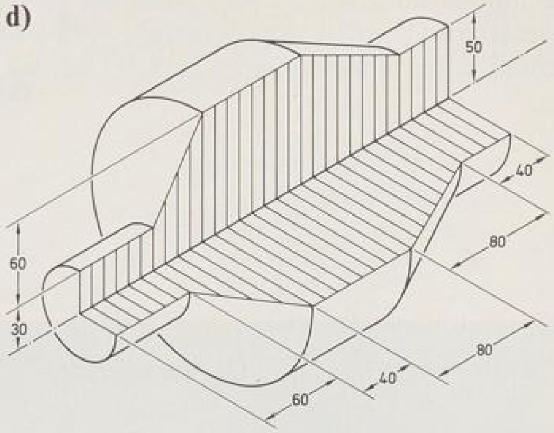
b)

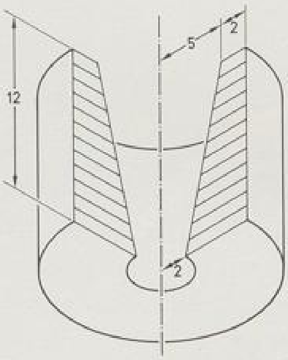




c)

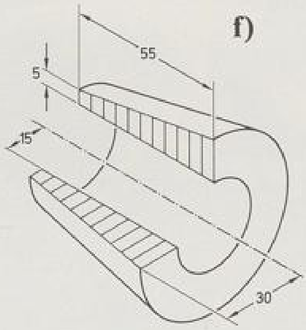
d)



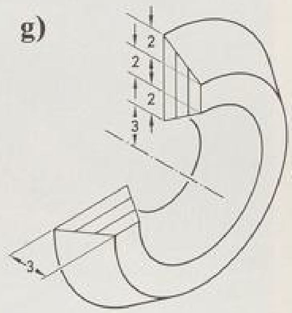


e)

f)



g)



29. KÜRZESTER WEG

a) Ein Mädchen (kleine Made!) sitzt auf einem zylindrischen Baum von 30 cm Durchmesser und will ihn umrunden. Wie lang ist der kürzeste Weg?

• **b)** Ein Mädchen (keine Made!) steht am Fuß eines kegelförmigen Hügels und will ihn umrunden. Der Weg soll um die Kegelachse führen. Der Hügel ist $10\sqrt{35}$ m hoch und hat den Umfang 20π m. Wie lang ist der kürzeste Weg? Auf welche Höhe führt er? Gibt es bei jedem Kegel einen solchen kürzesten Weg?