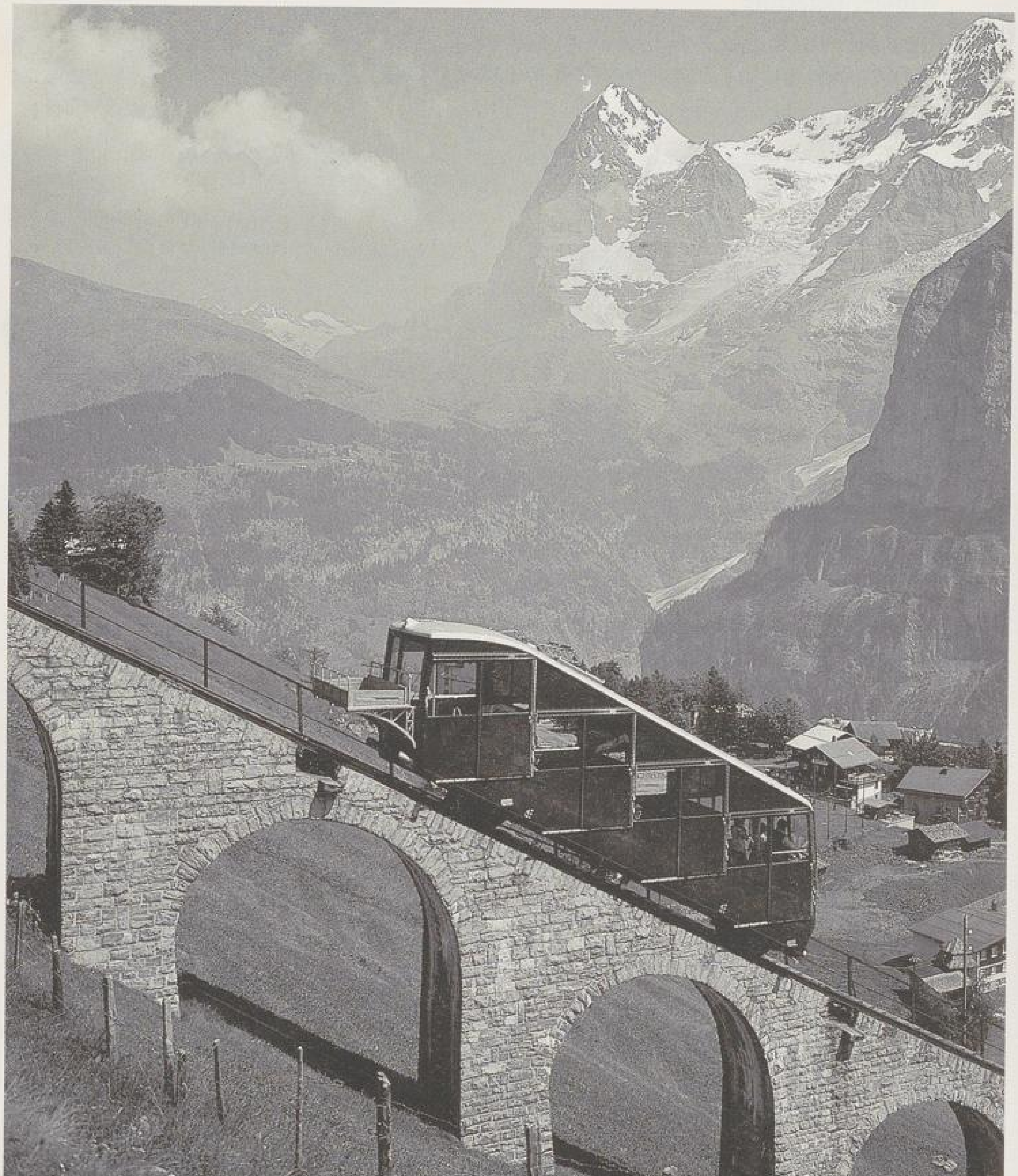
Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

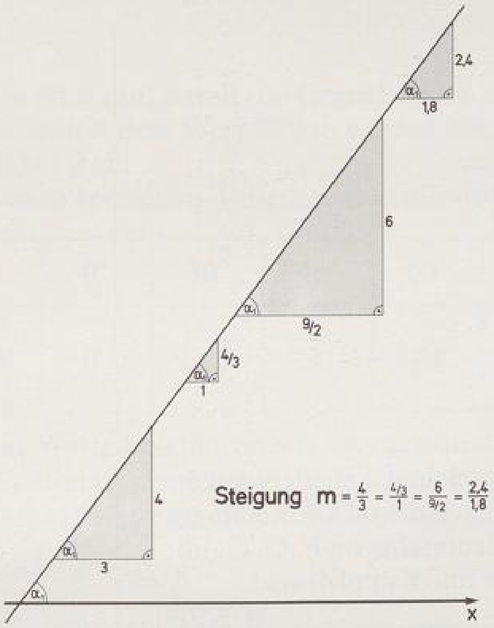
5. Kapitel Trigometrie am rechtwinkligen Dreieck

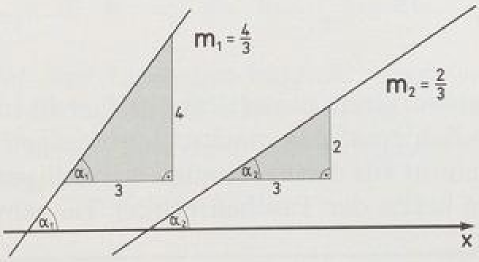
5. Kapitel
Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck



Zahnradbahn bei Mürren, im Hintergrund der Eiger

Bei vielen geometrischen Problemen sucht man die Längen von Seiten oder die Größe von Winkeln einer Figur, die durch gegebene Stücke festgelegt ist – zum Beispiel: Wie lang ist a und wie groß ist γ im Dreieck mit $b = 4$, $c = 6$ und $\alpha = 70°$? Solche Aufgaben haben wir bisher durch Konstruktion gelöst. Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt dabei von der Zeichen- und Messgenauigkeit ab. Meistens kann man Strecken höchstens auf 0,5 mm und Winkel höchstens auf 0,5° genau zeichnen und messen. Will man die Genauigkeit steigern, dann hilft nur noch rechnen. Der Strahlensatz und die Flächensätze fürs rechtwinklige Dreieck haben uns manchmal schon die Möglichkeit gegeben, Streckenlängen rechnerisch exakt zu bestimmen.
Die Trigonometrie ist der Zweig der Mathematik, der sich mit der Berechnung von Seiten und Winkeln im allgemeinen Dreieck befasst. Konstruktionen sind dann entbehrlich. Man löst eine Aufgabe algebraisch, das Ergebnis ist ein Rechenausdruck, eine algebraische Formel. Solche Formeln erlauben eine schnelle, sichere und beliebig genaue Berechnung der gesuchten Stücke. Die Trigonometrie ist eine unerlässliche Voraussetzung für viele Berechnungen in der Astronomie, der Landvermessung, der Navigation, im Bauwesen, im Maschinenbau und in der Elektrotechnik.
Das rechtwinklige Dreieck ist die Grundfigur der Trigonometrie. Mit ihm fangen wir an.



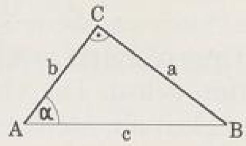


5.1 Tangens

In ähnlichen Dreiecken sind entsprechende Seitenverhältnisse gleich. Beim Steigungsdreieck einer Gerade ($m > 0$) haben wir ein solches Verhältnis schon kennen gelernt: Den Quotienten von senkrechter und waagrechter Kathete haben wir Steigung m genannt. Je größer die Steigung ist, desto größer ist der Winkel α zwischen Gerade und x-Achse. Zu jedem Neigungswinkel α gehört eindeutig eine Steigung m, in der Trigonometrie nennen wir sie den Tangens von α, kurz $m = \tan \alpha$. Dieses Kathetenverhältnis verwenden wir auch in andern rechtwinkligen Dreiecken. Wir bezeichnen die Kathete am Scheitel von α als **Ankathete** (von α) und die gegenüberliegende als **Gegenkathete** (von α) und definieren:

Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ist:

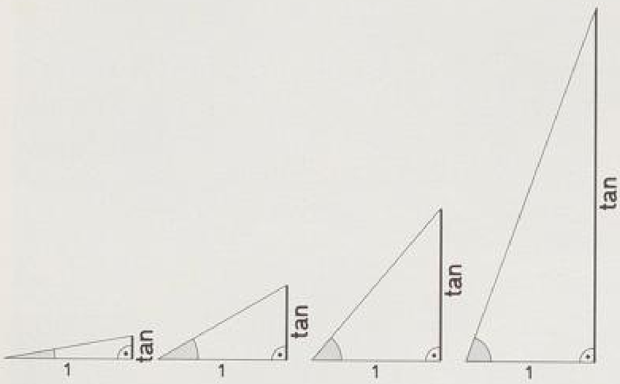
$$\tan\alpha = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$



Merke: Tangens $= \dfrac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Ankathete}}$

Nimmt man ein Dreieck mit der Ankathete 1, dann ist die Länge der Gegenkathete gleich dem Tangens des Winkels; man kann also schon aus der Zeichnung Tangenswerte unmittelbar ablesen, wenn auch nur grob mit Zeichengenauigkeit:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\tan\alpha$	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	gibts nicht



Genauere Werte musste man früher in umfangreichen Tabellenwerken, den »Zahlentafeln«, nachschlagen; einen Eindruck davon vermittelt ein Ausschnitt aus den berühmten vierstelligen Zahlentafeln von F. G. Gauß. Heute liefert der Taschenrechner Tangenswerte auf Knopfdruck.

°	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
0	0, 0000	0029	0058	0087	0116	0145	0175	89	29
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	29
2	0349	0378	0407	0436	0465	0494	0523	87	29
3	0523	0552	0581	0610	0640	0669	0698	86	29
4	0698	0727	0756	0785	0814	0843	0872	85	29
5	0, 0872	0901	0929	0958	0987	1016	1045	84	29
6	1045	1074	1103	1132	1161	1190	1219	83	29
7	1219	1248	1276	1305	1334	1363	1392	82	29
8	1392	1421	1449	1478	1507	1536	1564	81	29
9	1564	1593	1622	1650	1679	1708	1736	80	29

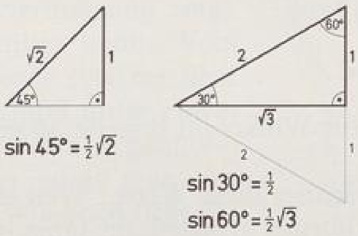
P. P.	30	29
1	3,0	2,9
2	6,0	5,8
3	9,0	8,7
4	12,0	11,6
5	15,0	14,5
6	18,0	17,4
7	21,0	20,3
8	24,0	23,2
9	27,0	26,1

Von einigen besonderen Winkeln finden wir leicht die exakten Tangenswerte:

Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck: $\mathbf{tan\ 45° = \frac{1}{1} = 1}$.

Halbes gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2:
die eine Kathete ist 1,
die andere Kathete ist nach Pythagoras
$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\mathbf{tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}}$ und $\mathbf{tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}}$.



Schrumpft α und damit die Gegenkathete auf null, so ergibt sich als Grenzfall $\mathbf{tan\ 0° = 0}$.
Nähert sich α dem Wert 90°, so wächst tan α über alle Grenzen, das heißt, tan 90° ist keine (endliche) Zahl.
Weil diese speziellen Tangenswerte oft vorkommen, merkt man sie sich:

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
tan α	**0**	$\mathbf{\frac{1}{3}\sqrt{3}}$	**1**	$\mathbf{\sqrt{3}}$	**–**

Andere Werte beschaffen wir uns gewöhnlich mit dem Taschenrechner. Arbeiten wir mit dem Gradmaß, dann muss der Rechner im DEG-Modus sein (DEGree = Grad). Man gibt den Winkelwert ohne das °-Symbol ein, die $\boxed{\text{tan}}$-Taste liefert dann den Tangenswert.

tan 37,8° ≈ 0,78

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{37.8}$ $\boxed{\text{tan}}$

Anzeige: $\boxed{0.7756795}$

Umgekehrt finden wir mit dem Taschenrechner auch einen Winkel, dessen Tangens bekannt ist. Zuständig für die Umkehrung ist die $\boxed{\text{INV}}$-Taste (INVers = umgekehrt).

tan φ = 0,24; φ = ?

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{0.24}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{tan}}$

Anzeige: $\boxed{13.49573328}$ $\varphi \approx 13{,}5°$

Wir vereinbaren: Näherungswerte für Winkel geben wir auf Zehntelgrad gerundet an.

Arbeiten wir im Bogenmaß, dann muss der Rechner im RAD-Modus sein (RADius = Strahl).

tan 0,83 ≈ 1,09

Tastenfolge: $\boxed{\text{RAD}}$ $\boxed{0.83}$ $\boxed{\text{tan}}$

Anzeige: $\boxed{1.0934329}$

umgekehrt:

tan φ = 2,71; φ = ?

Tastenfolge: $\boxed{\text{RAD}}$ $\boxed{2.71}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{tan}}$

Anzeige: $\boxed{1.217293}$ φ = 1,22

Wir vereinbaren: Näherungswerte für Winkel im Bogenmaß geben wir auf Hundertstel gerundet an.
Wie findet eigentlich der Taschenrechner diese Werte? Weil er nur die vier Grundrechenarten beherrscht, muss er mit einer Formel arbeiten, die tan x durch ein Polynom annähert, zum Beispiel

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

Hier muss x im Bogenmaß sein. Gibt man einen Wert im Gradmaß ein, dann wandelt ihn der Rechner vorher erst ins Bogenmaß um. Wir berechnen einen Näherungswert für tan 0,5 und vergleichen ihn mit dem Knopfdruck-Wert des Rechners:

tan 0,5 ≈ 0,5462977	(Polynom vom Grad 9)
tan 0,5 = 0,5463024 …	(Knopfdruck-Wert)

Die Umkehrung des Tangens $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{tan}}$ heißt in der Mathematik arc tan (Arkus Tangens). Der Rechner bewältigt sie mit der Formel

$$\operatorname{arc}\tan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \ldots$$

Auch hier ist arc tan x ein Bogenmaß-Wert. Wir berechnen einen Näherungswert für arc tan 0,456 und vergleichen ihn mit dem Knopfdruck-Wert des Rechners:

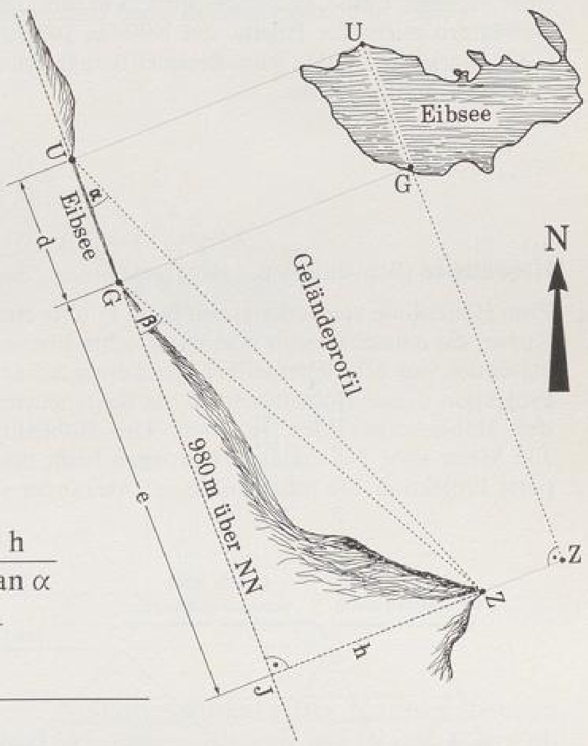
arc tan 0,456 ≈ 0,427846	(Polynom vom Grad 9)
arc tan 0,456 = 0,427832 …	(Knopfdruck-Wert)

Die letzte Formel klappt nur für x-Werte zwischen −1 und +1 und zwar um so besser, je näher der x-Wert bei null liegt.

Die Steilheit von Strecken gibt man mit der Steigung an, also dem Tangens des Neigungswinkels, in Prozent oder Promille. Die berühmt-berüchtigte Zirlerbergstraße hatte vor dem Umbau eine maximale Steigung von 24 %, als größten Neigungswinkel also 13,5°. Wegen der vielen Unfälle hat man sie entschärft und auf eine Höchststeigung von 17 % (9,6°) abgeflacht. Im Folgenden sehen wir eine Übersicht über die üblichen Höchstwerte von Steigungen:

Passstraße: 30 %
Nebenstraße: 20 %
Autobahn: 3 % (wegen langer Bremswege von Lastzügen bei Abwärtsfahrt)
Eisenbahn: 3 % für Personenverkehr, 1 % für Personen- und Güterverkehr
U-Bahn: 10 % (wegen Allradantrieb und wetterunabhängiger Schienenoberfläche)
Zahnradbahn: 25 %, Idealwert (Zugspitzbahn, Jungfrau-Bahn)
48 % Höchstwert auf der Pilatus-Bahn (Schweiz)
Kabelbahn: 20 % (San Francisco)
Standseilbahn: 90 % (Großglockner-Gletscher-Bahn)
Drahtseilbahn: 100 % und mehr

Ein Beispiel aus der Landvermessung zeigt, was der Tangens noch alles kann. Vom Punkt U am Ufer des Eibsees (980 m) über NN) sieht man einen Berggipfel unter einem Neigungswinkel $\alpha = 22{,}23°$. Vom gegenüberliegenden Uferpunkt G aus misst man den Neigungswinkel $\beta = 28{,}18°$. Wie hoch liegt der Gipfel über NN, wenn die Messpunkte eine Standlinie von $\overline{UG} = 1150$ m Länge festlegen? (NN ist die Abkürzung für Normalnull, das ist der Meeresspiegel.)



Lösung: $\tan\alpha = \dfrac{h}{e+d}$ also I $e + d = \dfrac{h}{\tan\alpha}$

$\tan\beta = \dfrac{h}{e}$ also II $e = \dfrac{h}{\tan\beta}$

I–II $d = \dfrac{h}{\tan\alpha} - \dfrac{h}{\tan\beta}$

$$h = \frac{d}{\dfrac{1}{\tan\alpha} - \dfrac{1}{\tan\beta}} = d\,\frac{\tan\alpha\ \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

Messwerte einsetzen:

$$h = 1150\,\text{m} \cdot \frac{\tan 22{,}23°\ \tan 28{,}18°}{\tan 28{,}18° - \tan 22{,}23°} = 1982\,\text{m}$$

Der Berggipfel liegt 1982 m + 980 m = 2962 m über Normalnull.

Für Wanderer und Reisende sind Landkarten das wichtigste Hilfsmittel, um sich in unbekannter Umgebung zurechtzufinden. So gibt es je nach Verwendungszweck Wanderkarten, Autokarten, Seekarten usw. Karten zeigen Landschaften im Grundriss. Alle Merkmale, die eine Landschaft prägen: Berge, Flüsse, Seen, Straßen und Ortschaften sollen gut erkennbar sein. Gewässer und Verkehrsnetze machen keine Schwierigkeiten: Weder dem Benutzer beim Studium der Karte noch dem Kartografen beim Entwerfen der

Karte, denn Flüsse, Küsten, Ufer, Straßen und Bahnlinien verlaufen im Wesentlichen zweidimensional, und zweidimensional ist ja der Grundriss, ist die Karte. Was der Grundriss aber nicht wiedergibt, das sind die Geländeformen: hoch oder tief, steil oder flach, Berg und Tal, also die Höhenunterschiede in der dritten Dimension. Die dritte Dimension auf dem ebenen Kartenblatt festzuhalten, dem Betrachter einen möglichst räumlichen, wirklichkeitsnahen Eindruck von Berg und Tal zu vermitteln, das war seit eh und je die größte Herausforderung an die Kartenzeichner. Erst im letzten Jahrhundert hat man diese Schwierigkeiten gemeistert. Heute verwenden die beiden wichtigsten Techniken Farben oder Höhenlinien zur Darstellung von Geländeformen.

Farben

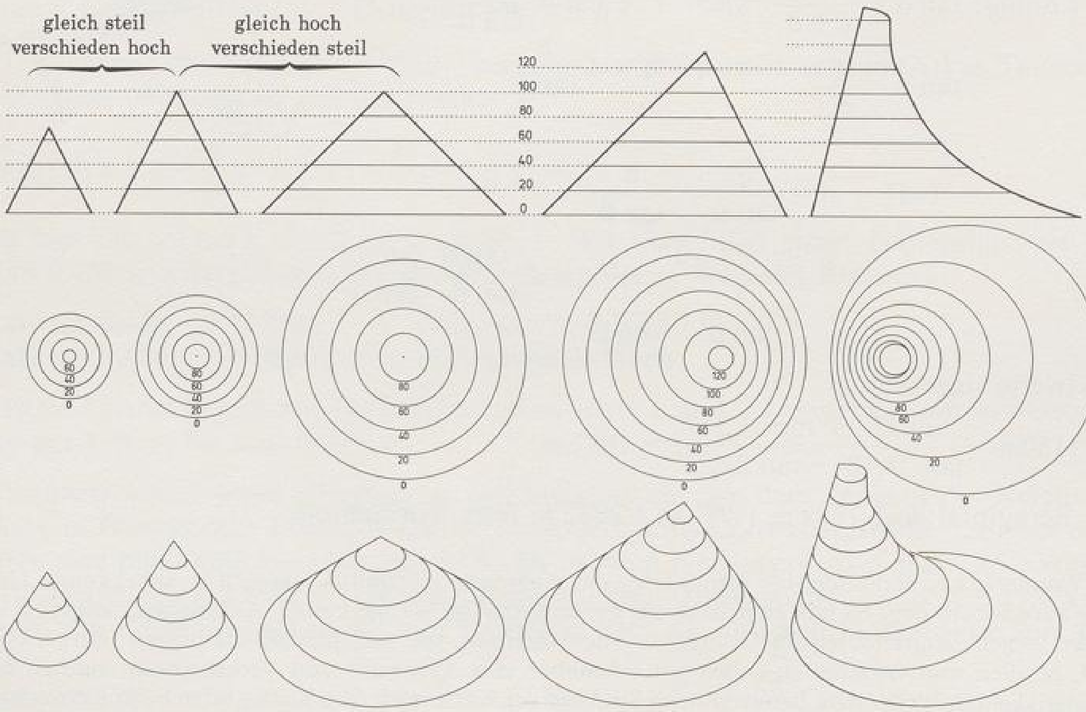
Das Gelände ist in Höhenschichten gegliedert. Jede Schicht ist mit einer eigenen Farbe gekennzeichnet. Für die Tiefenschichten in Gewässern reicht die Palette von hellblau (seicht) bis blauviolett (tief). Markante Punkte, zum Beispiel Berggipfel, sind mit Höhenzahlen (Koten) versehen.

Schicht (Meter)	Farbe
0– 100	Blaugrün
100– 200	Gelbgrün
200– 500	Gelb
500–1000	Hellbraun
1000–2000	Braun
2000–4000	Rotbraun
4000–...	Braunrot

(Zwischenstufen sind möglich)

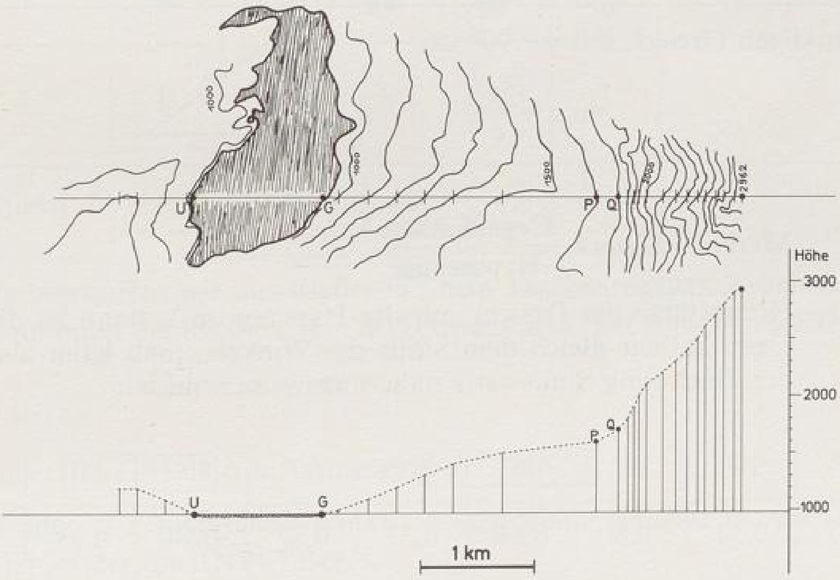
Höhenlinien (Schichtlinien, Isohypsen)

Eine Höhenlinie verbindet gleich hohe Punkte einer Geländefläche. Man kann sie sich auch vorstellen als Kurve, die entsteht, wenn eine waagrechte Ebene die Geländefläche schneidet. Die Höhenlinien sind die Schnittkurven der Geländefläche und einer Schar gleichabständiger, waagrechter Ebenen. Die senkrechte Projektion dieser Höhenlinien in die Kartenebene ergibt das Höhenlinienbild. Die Höhenlinien sind mit den Höhenlinienzahlen versehen. Die Höhenlinienzahl 200 beziehungsweise die Kote 200 bedeutet 200 Meter über Normalnull. Deswegen heißt die Höhenlinien-Darstellung in der Mathematik auch kotierte Projektion. Sie geht zurück auf Alexander von Humboldt, 1804.



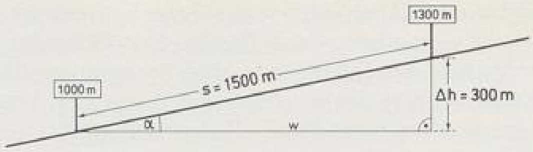
Aus der Dichte der Höhenlinien schließt der Kartenleser zurück auf die Gestalt der Geländefläche: je enger, desto steiler – je weiter, desto flacher. Das Höhenlinienbild erlaubt es, ein Geländeprofil zu zeichnen (das ist der Verlauf des Geländes in einer senkrechten **Ebene**, siehe Bild mit Eibsee und Zugspitze S. 101). Das Geländeprofil gibt die verschiedenen Neigungswinkel in wahrer Größe wieder, es zeigt auch, ob es überhaupt möglich ist, vom Punkt G den Berggipfel optisch anzupeilen, ob also kein andrer Gipfel die Sicht behindert.

Ein Geländeprofil konstruiert man so:
Durch die waagrechte Grundlinie UG geht eine zur Karte senkrechte Ebene S. S schneidet die Geländefläche in der Kurve p, diese Schnittkurve p heißt Geländeprofil. Man schneidet UG mit den Höhenlinien; über den Schnittpunkten trägt man senkrecht zu UG die Höhenunterschiede an. Die Linie, die die Endpunkte verbindet, beschreibt näherungsweise den Verlauf des Geländes in dieser Schnittfläche, also das Geländeprofil und zwar um so besser, je kleiner der Unterschied benachbarter Höhenlinien ist.



Mit dem Tangens können wir leicht den mittleren Neigungswinkel eines Hangs zwischen zwei Orten P und Q bestimmen. Die waagrechte Ankathete w messen wir in der Karte ab (Maßstab beachten!), zum Beispiel w = 190 m. Die senkrechte Kathete s ist der Höhenunterschied, ihn zählt man an den Höhenlinien ab, zum Beispiel s = 100 m. Der mittlere Neigungswinkel ist dann $\arctan \frac{s}{w}$ oder im Beispiel $\arctan \frac{100}{190} \approx 27{,}8°$.

5.2 Sinus



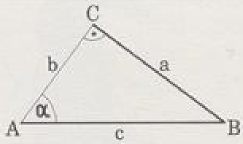
Pythagoras: $w = \sqrt{s^2 - \Delta h^2} = 1470\,\text{m}$; $\tan\alpha = \frac{\Delta h}{w} = 0{,}2041$

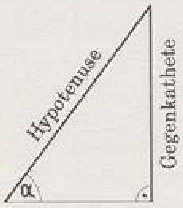
$\alpha \approx 11{,}5°$

An manchen Passstraßen zeigen Schilder die Höhe an. Hat man am Kilometerzähler die gefahrene Strecke s abgelesen, dann findet man auch mit diesen Werten den Neigungswinkel, siehe Bild. Will man den Neigungswinkel aus den gegebenen Werten direkt berechnen, dann braucht man einen Zusammenhang zwischen Winkel, Gegenkathete und Hypotenuse. Wir definieren:

Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ist:

$$\mathbf{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

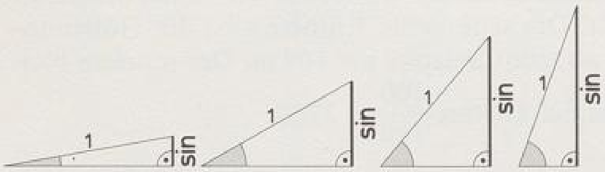


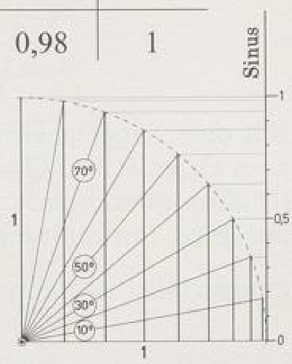


Merke: $\textbf{Sinus} = \dfrac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Hypotenuse}}$

Nimmt man ein Dreieck mit der Hypotenuse 1, dann ist die Länge der Gegenkathete gleich dem Sinus des Winkels; man kann also schon aus der Zeichnung Sinuswerte näherungsweise ermitteln:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin\alpha$	0,17	0,34	0,5	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1





Weil die Gegenkathete immer kleiner ist als 1, ist der Sinus nicht größer als 1. Schrumpft α und damit die Gegenkathete auf 0, so ergibt sich als Grenzfall $\sin 0° = 0$. Nähert sich α dem Wert 90°, dann nähert sich die Gegenkathete der Hypotenuse und ist im Grenzfall $\alpha = 90°$ so lang wie sie. Deshalb legt man fest $\sin 90° = 1$.

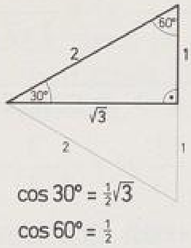
Von den drei Winkeln 30°, 45° und 60° finden wir leicht die exakten Sinuswerte:

Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck:

$$\mathbf{\sin 45°} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Halbes gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2:
die eine Kathete ist 1,
die andre Kathete ist nach Pythagoras $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$



$$\textbf{sin 30°} = \frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$\textbf{sin 60°} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Weil diese speziellen Sinuswerte oft vorkommen, merkt man sie sich:

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin α	**0**	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$	**1**
Eselsbrücke	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

Andere Werte beschaffen wir uns wieder mit dem Taschenrechner. Arbeiten wir mit dem Gradmaß, dann muss der Rechner im DEG-Modus sein. Die $\boxed{\text{sin}}$-Taste liefert den Sinuswert.

sin 37,8° ≈ 0,61

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{37.8}$ $\boxed{\text{sin}}$ Anzeige: $\boxed{0.612907053}$

Umgekehrt finden wir auch einen Winkel, dessen Sinus bekannt ist. Zuständig für die Umkehrung ist wieder die $\boxed{\text{INV}}$-Taste.

sin φ = 0,24; φ = ?

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{0{,}24}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{sin}}$ Anzeige: $\boxed{13.88654036}$

φ = 13,9°

Arbeiten wir im Bogenmaß, dann muss der Rechner im RAD-Modus sein.

sin 0,83 = 0,74

Tastenfolge: $\boxed{\text{RAD}}$ $\boxed{0.83}$ $\boxed{\text{sin}}$ Anzeige: $\boxed{0.737931371}$

und umgekehrt:

sin φ =0,51; φ = ?

Tastenfolge: $\boxed{\text{RAD}}$ $\boxed{0.51}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{sin}}$ Anzeige: $\boxed{0.53518479}$

φ = 0,54

Taschenrechner und Computer berechnen den Sinus und seine Umkehrung, den Arkus Sinus, mit Näherungspolynomen; x bzw. arc sin x ist der Winkel im Bodenmaß.

Beispiel:

$$\sin x = x - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}x^9 - \ldots \qquad (x \text{ beliebig})$$

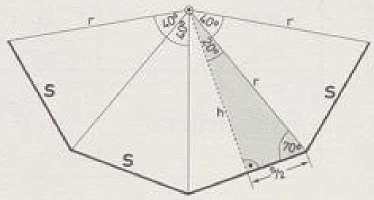
$$\operatorname{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}x^7 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9}x^9 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Mit dem Sinus lassen sich Umfang und Fläche eines regelmäßigen Vielecks berechnen. Gegeben ist ein regelmäßiges Neuneck, das einem Kreis mit Radius r einbeschrieben ist. Gesucht sind Umfang u und Flächeninhalt F in Abhängigkeit von r sowie die Verhältnisse Vieleckumfang : Kreisumfang und Vieleckfläche : Kreisfläche.

Lösung: Weil das halbe Bestimmungsdreieck rechtwinklig ist, gilt $\sin 20° = \frac{s/2}{r}$, also

$s = 2r \sin 20°$

der Umfang u ist dann $\mathbf{u = 9s = 18r \sin 20°}$.



Aus $\sin 70° = \frac{h}{r}$ folgt $h = r \sin 70°$,

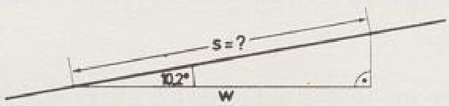
der Inhalt F ist dann

$$\mathbf{F} = 9\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot h = 9\cdot\frac{1}{2}\cdot 2r\sin 20°\cdot r\cdot\sin 70° = \mathbf{9r^2 \sin 20° \sin 70°}.$$

$$\textbf{Umfangsverhältnis} = \frac{18r\sin 20°}{2r\pi} = \frac{9\sin 20°}{\pi} \approx \mathbf{98\,\%}$$

$$\textbf{Flächenverhältnis} = \frac{9r^2\sin 20°\sin 70°}{r^2\pi} = \frac{9\sin 20°\sin 70°}{\pi} \approx \mathbf{92{,}1\,\%}$$

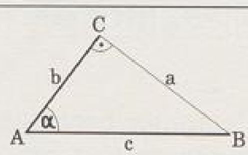
5.3 Kosinus

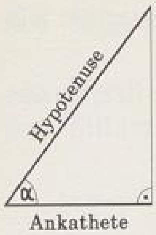


Eine Bergstraße hat laut Autokarte eine Steigung von 18 %, das heißt einen Neigungswinkel von 10,2°. Der Karte entnimmt man eine waagrechte Länge w von 4,8 km. Will man die wirkliche Streckenlänge s wissen, dann wäre es günstig, wenn man einen Zusammenhang zwischen Winkel, Ankathete und Hypotenuse hätte. Wir definieren ihn:

Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ist:

$$\mathbf{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

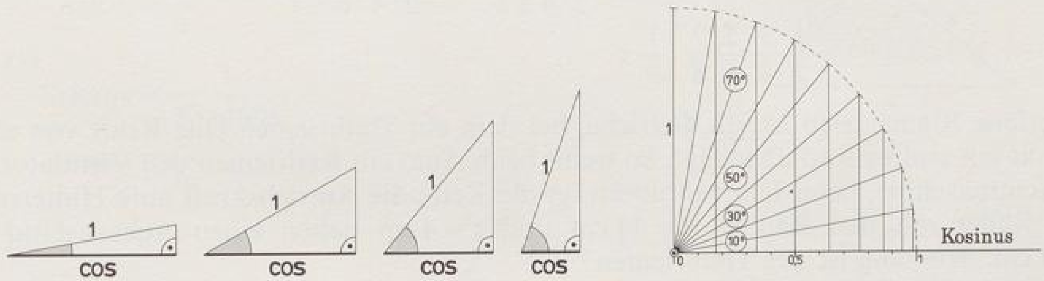




Merke: **Kosinus** $= \dfrac{\textbf{Ankathete}}{\textbf{Hypotenuse}}$

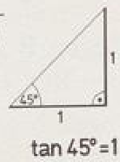
Nimmt man ein Dreieck mit der Hypotenuse 1, dann ist die Länge der Ankathete gleich dem Kosinus des Winkels; man kann also schon aus der Zeichnung Kosinuswerte näherungsweise ermitteln:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\cos\alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,5	0,34	0,17	0

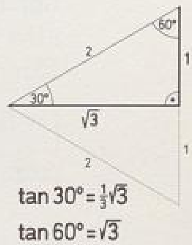


Weil die Ankathete immer kleiner ist als 1, ist der Kosinus nicht größer als 1. Wenn α immer kleiner wird, dann nähert sich die Ankathete der Hypotenuse und ist im Grenzfall $\alpha = 0°$ so lang wie sie. Deshalb legt man fest, $\cos 0° = 1$. Nähert sich α dem Wert 90°, dann schrumpft die Ankathete auf 0 und als Grenzfall ergibt sich $\cos 90° = 0$.
Von den drei Winkeln 30°, 45° und 60° finden wir leicht die exakten Kosinuswerte:

Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck: $\mathbf{\cos 45°} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$



Halbes gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2:
die eine Kathete ist 1,
die andere Kathete ist nach Pythagoras $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$



$\mathbf{\cos 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$ und $\mathbf{\cos 60° = \frac{1}{2}}$.

Weil diese speziellen Kosinuswerte oft vorkommen, merkt man sie sich:

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
$\mathbf{\cos\alpha}$	**1**	$\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	**0**
Eselsbrücke	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Andre Werte beschaffen wir uns wieder mit dem Taschenrechner. Das funktioniert so wie beim Sinus, bloß drückt man statt der $\boxed{\text{sin}}$-Taste jetzt die $\boxed{\text{cos}}$-Taste.
Taschenrechner und Computer berechnen den Kosinus und seine Umkehrung, den Arkus Kosinus, mit Näherungspolynomen; x bzw. arc cos x ist der Winkel im Bogenmaß.

Beispiel:

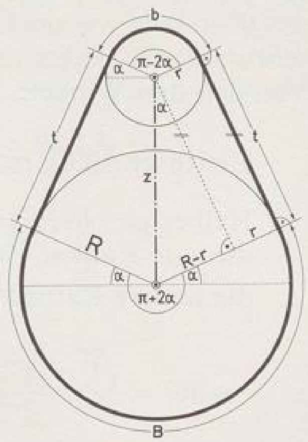
$$\cos x = 1 - \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^8 - \ldots \qquad (x \text{ beliebig})$$

$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}x^7 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9}x^9 - \ldots \qquad (|x|<1)$$

Der offene Riementrieb ist ein Getriebe, bei dem ein Treibriemen eine Kraft von einem Rad auf ein andres Rad überträgt. So treibt beim Auto ein Keilriemen den Ventilator und die Lichtmaschine, beim Fahrrad überträgt die Kette die Antriebskraft aufs Hinterrad. Zwei Räder mit den Radien R = 11 cm und r = 4 cm haben einen Achsabstand von z = 17 cm. Wie lang ist der Treibriemen?

Lösung: Die Riemenlänge l setzt sich zusammen aus einem großen Bogen B, einem kleinen Bogen b und zwei Tangentenstücken t: l = B + b + 2t.

Der Winkel α ergibt sich aus $\sin\alpha = \frac{R-r}{z}$.



Für ein Tangentenstück t gilt $\frac{t}{z} = \cos\alpha$, also $t = z\cos\alpha$.

Der Bogen B gehört zum Mittelpunktswinkel $\pi + 2\alpha$, also $B = R(\pi + 2\alpha)$,

der Bogen b gehört zum Mittelpunktswinkel $\pi - 2\alpha$, also $b = r(\pi - 2\alpha)$.

Der Riemen hat die Länge

$$l = B + b + 2t = \mathbf{R(\pi + 2\alpha) + r(\pi - 2\alpha) + 2z\cos\alpha},$$

setzen wir die gegebenen Werte ein, so ergibt sich

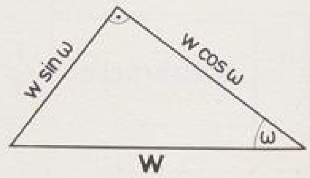
$$\sin\alpha = \frac{11-4}{17} = \frac{7}{17}, \quad \text{also} \quad \alpha = 0{,}4243\ldots \quad \text{(Bogenmaß!)}$$

$l = 43{,}89\ldots + 9{,}17\ldots + 30{,}98\ldots = \mathbf{84{,}04}\ldots$

Der Riemen ist etwa 84 cm lang.

Weil Hypotenuse und ein anliegender Winkel die Katheten festlegen, bietet sich die Merkregel an:

Gegenkathete = Hypotenuse mal Sinus
Ankathete = Hypotenuse mal Kosinus



5.4 Das trigonometrische Sextett

Mit den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks lassen sich sechs Seitenverhältnisse bilden. Drei kennen wir schon, nämlich:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

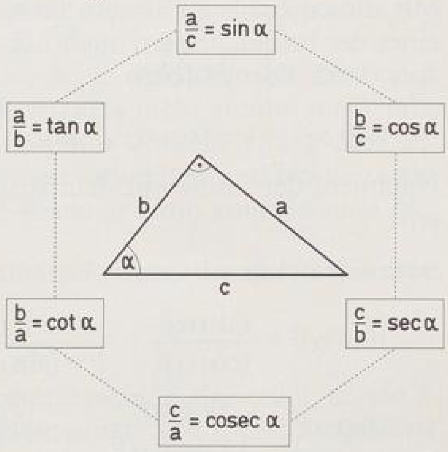
Die drei Neulinge sind davon die Kehrwerte:

$$\text{Kotangens} = \frac{1}{\text{Tangens}} \qquad \text{Kosekans} = \frac{1}{\text{Sinus}}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{Sekans} = \frac{1}{\text{Kosinus}}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}$$



Weil sich Kotangens, Kosekans und Sekans so einfach mit Tangens, Sinus und Kosinus ausdrücken lassen, verwendet man sie kaum. Auch wir werden künftig nur mit den drei wichtigen Verhältnissen Tangens, Sinus und Kosinus arbeiten; auch sie sind eng miteinander verwandt.

Zusammenhang zwischen Tangens, Sinus und Kosinus

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad 0° \leqq \alpha < 90°}$$

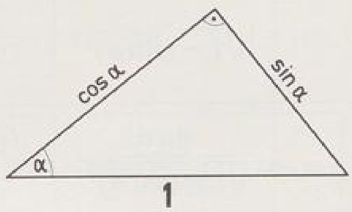
Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1}$$

Trigonometrischer Pythagoras



Die Schreibung $(\sin\alpha)^2$ bedeutet $(\sin\alpha)\cdot(\sin\alpha)$. Aus Bequemlichkeit verwendet man jedoch leider oft eine ›schnellere‹, aber leicht missverständliche Abkürzung und schreibt $(\sin\alpha)\cdot(\sin\alpha) = \sin^2\alpha$. Hält man sich aber an die Regeln, dann ist $\sin^2\alpha = \sin(\sin\alpha)$. Entsprechend ist $\sin^{-1}\alpha = \arcsin\alpha$; $\sin^{-1}$ ist also die Umkehrung von sin, aber nicht der

Kehrwert $\frac{1}{\sin}$! Der Taschenrechner liefert $\sin^{-1}\alpha$ entweder über eine eigene Taste $\boxed{\sin^{-1}}$ oder mit der Tastenfolge $\boxed{\mathrm{INV}}$ $\boxed{\sin}$. Für $(\sin\alpha)^{-1} = \frac{1}{\sin\alpha}$ verlangt der Taschenrechner die Tastenfolge $\boxed{\sin}$ $\boxed{1/x}$.

Mit diesen beiden Formeln lässt sich jedes der drei Verhältnisse tan, sin und cos durch eines der beiden andern ausdrücken, zum Beispiel der Sinus durch Kosinus oder Tangens. Aus der 2. Formel folgt

$$(\sin\alpha)^2 = 1 - (\cos\alpha)^2, \quad \text{also} \quad \boldsymbol{\sin\alpha = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2}} \qquad (\sin\alpha \geqq 0)$$

Nachdem der Sinus mit dem Kosinus beschrieben ist, drücken wir ihn mit dem Tangens aus:

erste Formel quadrieren:

$$(\tan\alpha)^2 = \frac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \frac{(\sin\alpha)^2}{1-(\sin\alpha)^2} \qquad (\alpha < 90°)$$

$$(\tan\alpha)^2 = \frac{(\sin\alpha)^2}{1-(\sin\alpha)^2} \qquad \text{nach } \sin\alpha \text{ auflösen}$$

$$(\tan\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2(\tan\alpha)^2 = (\sin\alpha)^2$$

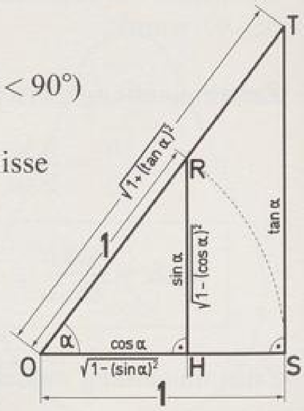
$$(\tan\alpha)^2 = (\sin\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2(\tan\alpha)^2$$

$$(\tan\alpha)^2 = (\sin\alpha)^2[1 + (\tan\alpha)^2]$$

$$\frac{(\tan\alpha)^2}{1+(\tan\alpha)^2} = (\sin\alpha)^2, \quad \text{also} \quad \boldsymbol{\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}} \qquad (0° \leqq \alpha < 90°)$$

Die Tabelle gibt einen Überblick über alle Verwandtschaftsverhältnisse von sin, cos und tan.

$0° \leqq \alpha < 90°$	**$\sin\alpha$**	**$\cos\alpha$**	**$\tan\alpha$**
$\sin\alpha$	☆	$\boldsymbol{\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}}$	$\boldsymbol{\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}}$
$\cos\alpha$	$\boldsymbol{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}}$	☆	$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}}$
$\tan\alpha$	$\boldsymbol{\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}}{\cos\alpha}}$	☆



$$\Delta OHR \sim \Delta OST$$

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}$$

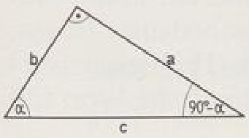
$$\left.\begin{array}{c}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}} \\ \frac{\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}}{\cos\alpha}\end{array}\right\} = \frac{\tan\alpha}{1}$$

Diese sechs Beziehungen findet man auch mit einem Blick auf eine passende Figur. Die drei Wurzeln liefert uns Pythagoras, den Rest die Ähnlichkeit.
Mit diesen Formeln kann man zum Beispiel $\tan\alpha$ und $\sin\alpha$ exakt aus $\cos\alpha$ berechnen, ohne sich um den Winkel α zu kümmern:

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}; \quad \text{es gilt} \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad \text{und} \quad \tan\alpha = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}.$$

Es gibt einige Winkel, deren sin-, cos- und tan-Werte rational sind, zum Beispiel $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\tan 45° = 1$. Manchmal sind die Werte zwar irrational, aber wenigstens mit Wurzeln darstellbar, zum Beispiel $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$. Wählt man aber einen Winkel auf gut Glück, so wird sein sin-, cos- und tan-Wert im Normalfall eine transzendente Zahl sein (wie π), also nicht einmal mehr mit Wurzeln darstellbar sein. Der Taschenrechner arbeitet mit nur endlich vielen Stellen, kennt also keine irrationalen Zahlen, kann also nicht zwischen rationalen und irrationalen (oder sogar transzendenten) Werten unterscheiden. Unser Rechner kann zum Beispiel die transzendente Zahl $\sin 25° = \boxed{0{,}422618261}$ nicht mehr unterscheiden von der rationalen Zahl $\frac{9604}{22725} = \boxed{0{,}422618261}$.

Ist γ im Dreieck ein rechter Winkel, dann sind α und β komplementär, das heißt, α und β ergänzen sich zu 90°, also $\alpha + \beta = 90°$. α ist der Komplementwinkel von β und umgekehrt ist β der Komplementwinkel von α. Für Komplementwinkel gelten die **Komplementformeln**:



$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{b}{c} \\ \sin(90° - \alpha) &= \frac{b}{c} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \boxed{\mathbf{\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha}}$$

$$\cos 37° = \sin(90° - 37°) = \sin 53°$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos(90° - \alpha) &= \frac{a}{c} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \boxed{\mathbf{\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha}}$$

$$\sin 22° = \cos(90° - 22°) = \sin 68°$$

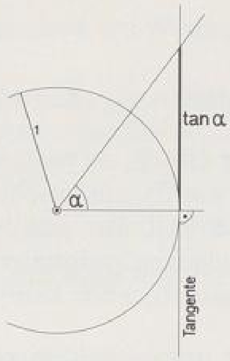
$$\left.\begin{aligned} \cot\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a} \\ \tan(90° - \alpha) &= \frac{1}{\cot(90° - \alpha)} = \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \boxed{\mathbf{\tan(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha}}$$

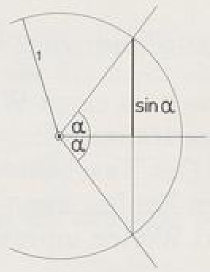
$$\frac{1}{\tan 73°} = \tan(90° - 73°) = \tan 17°$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{a}{b} \\ \cot(90° - \alpha) &= \frac{1}{\tan(90° - \alpha)} = \frac{a}{b} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \boxed{\mathbf{\cot(90° - \alpha) = \frac{1}{\cot\alpha} = \tan\alpha}}$$

Die Komplementformeln erklären auch die Vorsilbe »Ko« bei Kosinus, Kotangens und Kosekans, denn: Der Ko-Sinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des Ko-Winkels. Entsprechendes gilt bei Tangens und Sekans.

Die Bezeichnungen Tangens und Sinus stammen aus dem Lateinischen.
Am Einfachsten ist die Erklärung von Tangens. Die Schenkel des Winkels α schneiden aus der Tangente am Einheitskreis eine Strecke der Länge $\tan\alpha$ aus.





Der Sinus ist auf abenteuerliche Weise zu seinem Namen gekommen. Der indische Astronom und Mathematiker ARYABHATA bezeichnete die halbe Sehne des doppelten Winkels im Einheitskreis – also den Sinus des Winkels – mit *ardhajiva* oder auch kurz *jiva* (gesprochen dschiva). Die Araber, die einen Großteil ihrer Mathematik von den Indern gelernt haben, übernahmen das Sanskritwort *jiva* als Fremdwort ins Arabische. Weil die arabischen Buchstaben nur Konsonanten sind, besteht dieses Wort nur aus den beiden Buchstaben dsch und b: *dschb* (gesprochen dschiba). Doch es gibt auch ein arabisches Wort, das man genauso schreibt, aber anders spricht: dschaib und das bedeutet Busen. Bei der Übersetzung vom Arabischen ins Lateinische hielt man *dschiba* (Halbsehnenverhältnis) für *dschaib* (Busen) und übersetzte es mit *sinus*, *sinus* ist das lateinische Wort für Busen.

Aufgaben zu 5.1

1. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Gradmaß!)

	15°	1°	1′	89,9°					
$\tan\alpha$					$\sqrt{2}-1$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

2. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Bogenmaß!)

x	1	0,1	0,0123	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$			
tan x							1,55741	2	1990

3. Berechne Näherungswerte für tan x mit dem Näherungspolynom von Seite 100 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\tan}$-Wert des Taschenrechners.

a) $x = 0{,}1$ **b)** $x = 1{,}1$ **c)** $x = 0{,}785$ **d)** $x = 30°$

4. Berechne Näherungswerte für x mit dem Näherungspolynom von Seite 100 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\tan}$-Wert des Taschenrechners.

a) $\tan x = 0{,}546$ **b)** $\tan x = 0{,}1$
c) $\tan x = 3$ **d)** $\tan x = \pi$

5. Bestimme mit dem Taschenrechner.

a) $\tan 20° + \tan 30° - \tan(20° + 30°)$

b) $\tan 2° + \tan 3° - \tan(2° + 3°)$

c) $\tan 0{,}2° + \tan 0{,}3° - \tan(0{,}2° + 0{,}3°)$

d) $\dfrac{\tan 20° + \tan 30°}{\tan(20° + 30°)}$ **e)** $\dfrac{\tan 2° + \tan 3°}{\tan(2° + 3°)}$

f) $\dfrac{\tan 0{,}2° + \tan 0{,}3°}{\tan(0{,}2° + 0{,}3°)}$

6. Berechne ohne Taschenrechner.

a) $\tan 30° + \tan 30° - \tan(30° + 30°)$

b) $\tan 45° + \tan 45° - \tan(45° + 45°)$

c) $\dfrac{2 \cdot \tan 30°}{\tan(2 \cdot 30°)}$

7. Bestimme α mit dem Taschenrechner.

a) $\tan\alpha - \sqrt{3} = 2$ **b)** $3\tan\alpha = \dfrac{178}{257}$ **c)** $\dfrac{92}{\tan\alpha} = 369$

d) $\dfrac{1}{3}\tan 3\alpha = \dfrac{33}{38}$ **e)** $2\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{352}{353}$ **f)** $\dfrac{177}{\tan\dfrac{\alpha}{2}} = 23^2$

8. Löse auf nach $\tan\alpha$ und berechne α ohne Taschenrechner.

a) $1 - \tan\alpha = 0$ **b)** $3\tan\alpha - \sqrt{3} = 0$ **c)** $\sqrt{3}\tan\alpha - 3 = 0$

d) $(\sqrt{3} - \tan\alpha)\tan\alpha = 0$ **e)** $(\tan\alpha)^2 = \tan\alpha$

f) $\sqrt{3}\tan\alpha = (\tan\alpha)^2$ **g)** $3(\tan\alpha)^2 + 3 = \sqrt{48}\tan\alpha$

h) $(\tan\alpha)^2 + \sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})\tan\alpha$

9. Berechne die Neigungswinkel der Strecken, deren Steigungen auf Seite 101 angegeben sind.

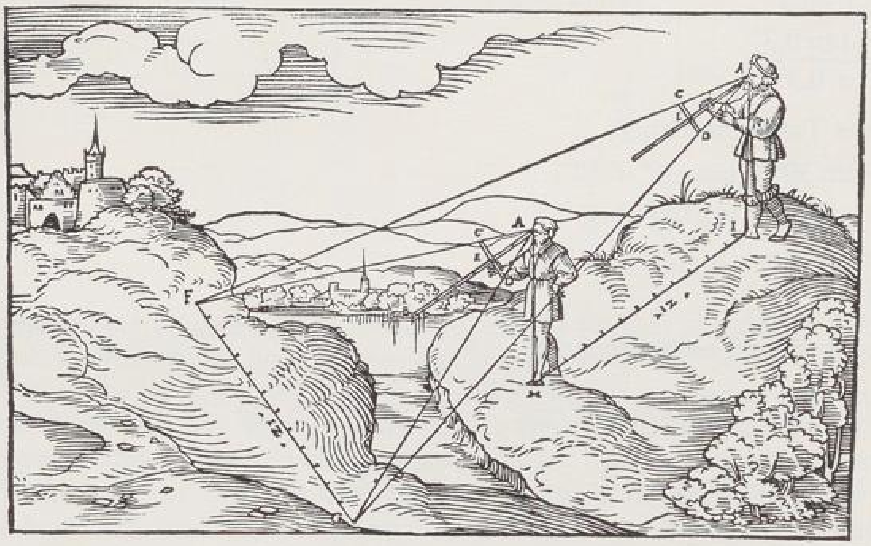
10. Berechne die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $\gamma = 90°$

α	15°	60°			89°	1°						
a	15		3	4	1	1	93	373	9	146	3542	294 269
b		1	4	3			373	93	4	65	1577	131 017

11. Eine Treppe soll einen Neigungswinkel von 32° bekommen. Die Stufen sind 15 cm hoch. Berechne die Stufenbreite.

12. JAKOBSTAB
Der Jakobstab ist ein einfaches Gerät zum Messen von Winkeln. Er ist um 1300 erfunden worden und war im Mittelalter ein viel gebrauchter Winkelmesser in Astronomie, Seefahrt und Landvermessung. Er besteht aus einem Längsstab mit Skala;

auf diesem lässt sich ein dazu senkrechter Querstab bekannter Länge verschieben. Man peilt das Ziel von einem Ende des Längsstabs aus so an, dass es genau zwischen den Enden des Querstabs liegt.
Beschreibe, wie man damit die Größe eines Winkels findet, und wende die Methoden an auf die Messwerte: Länge des Querstabs 30 cm, Abstand des Querstabs vom Auge 1,42 m.



13. Eine Fichte wirft einen 30 m langen Schatten; die Sonnenstrahlen sind 35° gegen die Waagrechte geneigt. Wie hoch ist die Fichte?

14. Unter **Mittagshöhe μ der Sonne** versteht man den größten Neigungswinkel der Sonnenstrahlen an einem Tag. Die Mittagshöhe erreicht ihren größten Wert zur Sonnenwende am 21. Juni mit $113{,}5° - \varphi$ und ihren kleinsten Wert zur Sonnenwende am 22. Dezember mit $66{,}5° - \varphi$; der Winkel φ ist die geografische Breite des betreffenden Orts.
Schlage φ deines Wohnorts nach und berechne die kleinste und größte Länge eines Schattens, den ein 1,80 m langer Mensch mittags in deinem Wohnort wirft. In welcher geografischen Breite wirft man am 21. Juni mittags keinen Schatten?

15. Unter welchem Neigungswinkel treffen Sonnenstrahlen auf, wenn ein senkrechter Pfahl einen Schatten wirft, der

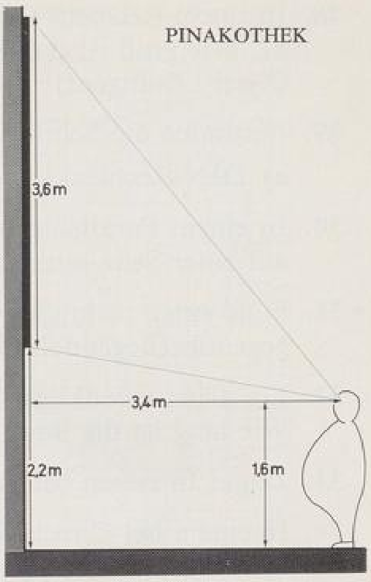
a) doppelt so lang
b) halb so lang
wie der Pfahl ist?

16. Die Höhe h der unteren Grenze einer Wolke über einem Flughafen kann man so finden: Ein Scheinwerfer strahlt sein Licht senkrecht nach oben. In der Entfernung d vom Scheinwerfer sieht man den Lichtfleck unterm Neigungswinkel α.
Drücke h allgemein aus mit d und α.

17. PINAKOTHEK

a) Unter welchem Blickwinkel β_1 schaut Pummel aufs Bild?

b) Unter welchem Blickwinkel β_2 betrachtet Pummel das Gemälde, wenn der untere Bildrand nur 1 m überm Boden ist?



18. Den höchsten deutschen Kirchenturm (162 m) hat das Ulmer Münster. In welcher Entfernung erscheint die Turmspitze unter einem Höhenwinkel von 13°?

19. LEONARDOS Mona Lisa
sitzt auf dem Schiefen Turm zu Pisa.
Sie staunt und schweigt,
der Turm ist ja um 4,6° geneigt,
sie schaut aus 55 m Höh herunter
und lächelt nicht gerade munter,
während sie darüber nachdenkt,
wie weit sie von der Vertikale weghängt.
So lächelt sie ewig und findet nicht,
weils ihr an GEO 10 gebricht.

20. 5 mm dicke Regentropfen fallen mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 8 m/s. Unter welchem Winkel klatschen sie auf die Fensterscheiben eines mit 79,2 km/h fahrenden Zugs?
(Der Klatschwinkel ist 0°, wenn der Zug steht.)

21. In einer Karte (1 : 25 000) liegen die Höhenlinien mit den Koten 700 und 800 im Abstand von 9 mm. Welchen Neigungswinkel hat der Hang?

22. Ein Hang hat einen Neigungswinkel von 8,5°. Welchen Abstand haben die Höhenlinien mit den Koten 500 und 600 in einer Karte mit dem Maßstab 1 : 10 000?

23. In einem rechtwinkligen Dreieck haben die Katheten die Längen a = 12 und b = 5. Berechne den Winkel, den die Seitenhalbierende

a) s_a mit der Seite a **b)** s_b mit der Seite b

c) s_c mit der Seite c einschließt.

24. In einem rechtwinkligen Dreieck haben die Katheten die Längen 5 und 12. Berechne die Teilwinkel, in die die Höhe den rechten Winkel zerlegt.

25. Die Diagonalen einer Raute haben die Längen 178 und 771.
Bestimme die Winkel der Raute.

26. Eine Raute mit einem Winkel von 10° hat einen Flächeninhalt von 102. Wie lang sind die Diagonalen?

27. Ein 3,5 m hoher Bahndamm hat ein achsensymmetrisches Trapez als Querschnitt. Der Damm ist mit 10 m oben halb so breit wie unten. Bestimme den Böschungswinkel.

28. In einem Rechteck schneiden sich die Diagonalen unter 52°, eine Seite hat die Länge 82. Wie groß ist der Flächeninhalt?
(Zwei Lösungen!)

29. Bestimme die Schnittwinkel der Diagonalen eines

a) DIN-Rechtecks **b)** Goldenen Rechtecks.

30. In einem Parallelogramm misst ein Winkel 18°, eine Diagonale der Länge 13 steht auf einer Seite senkrecht. Bestimme die Fläche.

• **31.** Falte einen rechteckigen Papierstreifen mit den Seitenlängen 3 und 17 so, dass sich gegenüberliegende Ecken decken. Welchen Winkel bilden Knick und Seite?

32. Ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Spitzenwinkel 64° hat den Flächeninhalt 40. Wie lang ist die Basis?

33. Zeige: In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1$.

34. In einem bei C rechtwinkligen Dreieck sind p und q die Hypotenusenabschnitte.

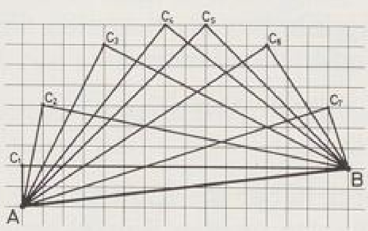
Zeige: $\tan\alpha = \sqrt{\frac{p}{q}}$

• **35.** **a)** Ein regelmäßiges n-Eck habe den Inkreisradius 1. Drücke Umfang und Flächeninhalt mit dem Tangens des Mittelpunktswinkels aus und berechne die Verhältnisse Umfang(n-Eck)/Umfang(Inkreis) und Fläche(n-Eck)/(Inkreis).
$n \in \{3, 5, 8\}$

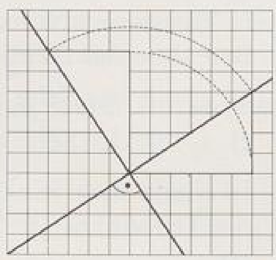
b) Ein regelmäßiges n-Eck habe den Inkreisradius 1. Drücke Umfang und Flächeninhalt allgemein mit dem Tangens des Mittelpunktswinkels aus und berechne mit dem Taschenrechner näherungsweise die Verhältnisse Umfang(n-Eck)/Umfang(Inkreis) und Fläche(n-Eck)/Fläche(Inkreis) für $n \in \{45, 90, 180, 360\}$.

36. THALES
[AB] ist die gemeinsame Seite von sieben rechtwinkligen Dreiecken. Bestimme die Winkel α_1 bis α_7.

THALES



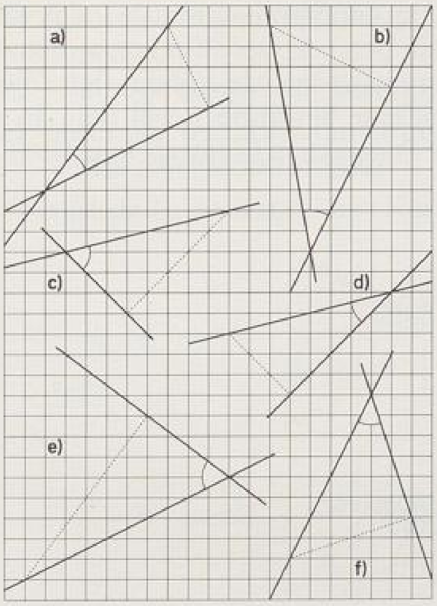
RECHTE WINKEL IM GITTER



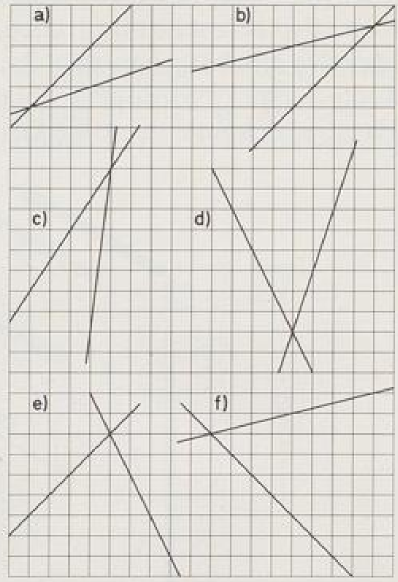
37. RECHTE WINKEL IM GITTER
Wie kannst du zu einer Gerade, die durch Gitterpunkte geht, allein mit dem Lineal ein Lot zeichnen?

38. SCHNITTWINKEL I
Alle Strecken gehen durch Gitterpunkte und schneiden sich in Gitterpunkten. Berechne die Schnittwinkel einmal als Kombination zweier Neigungswinkel und einmal direkt mit der gestrichelten Hilfsstrecke (Lot).

SCHNITTWINKEL I



SCHNITTWINKEL II



39. SCHNITTWINKEL II
Alle Strecken gehen durch Gitterpunkte und schneiden sich in Gitterpunkten. Berechne die Schnittwinkel.

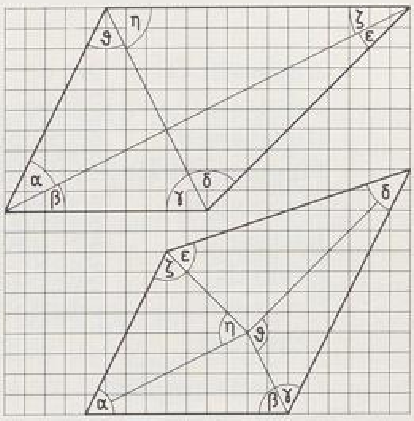
40. Bestimme die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, bei dem eine Kathete

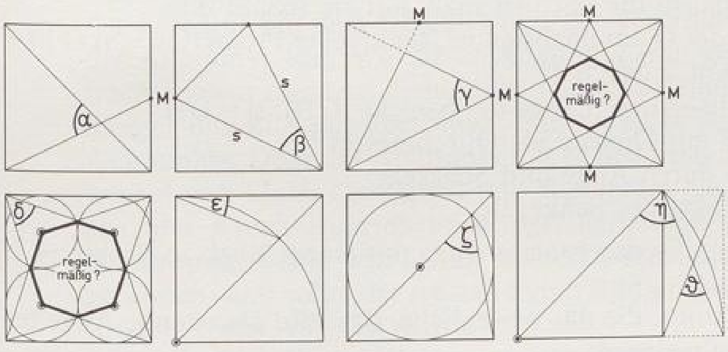
a) das arithmetische Mittel

b) das geometrische Mittel der beiden andern Seiten ist.

41. TRAPEZWINKEL
Bestimme die Winkel α bis ϑ. (Rechte Winkel!)

TRAPEZWINKEL

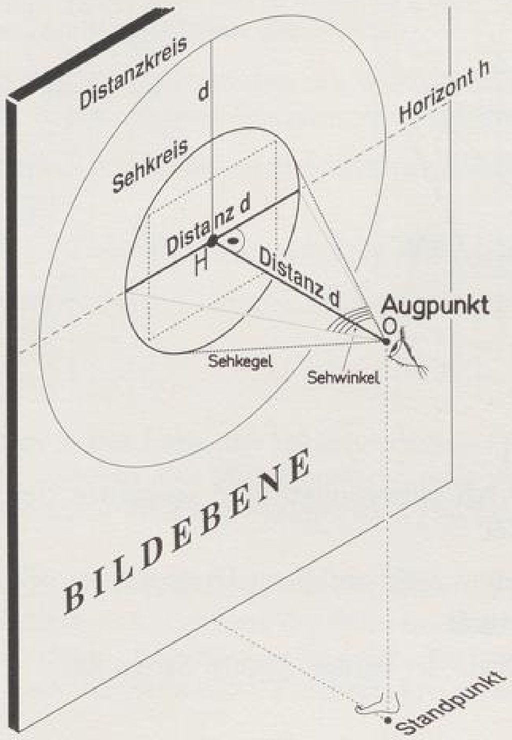




42. QUADRATWINKEL
In jeder Aufgabe ist ein Quadrat der Seitenlänge a die Ausgangsfigur – fürs Nachzeichnen sind 6 cm ratsam. Bestimme die Winkel α bis ϑ. (Rechte Winkel im Gitter lassen grüßen!)

43. SEHWINKEL

Will man eine Ansicht zeichnen oder malen, in der Strecken und Winkel vorkommen, also Häuser und Straßen, so wird man ein perspektives Bild konstruieren. Perspektive Bilder geben den Raum so naturgetreu wieder wie Fotografien (das sind auch perspektive Bilder), solang man sich an eine bewährte Regel hält. In dieser Faustregel kommen einige Grundbegriffe der Perspektive (Zentralprojektion) vor:



Augpunkt O:	Ort des Maler- oder Betrachterauges oder Kameraobjektivs
Sehstrahl:	Gerade durch O
Bildebene π:	Zeichenebene; in ihr zeichnet man, auf sie schaut man
Hauptpunkt H:	Punkt in π, der O am nächsten ist, senkrechte Projektion von O in π
Horizont h:	Waagrechte in π durch H
Distanz d:	Abstand Bild–Auge, Länge der Strecke [OH]: $d = \overline{OH}$
Sehkreis:	Kreis um H mit Distanz als Durchmesser
Sehkegel:	Sehstrahlen durch Auge und Sehkreis
Sehwinkel:	Öffnungswinkel des Sehkegels

Im Sehkegel liegen die Dinge, die das (starre) Auge mit einem Blick in Richtung H noch wahrnimmt.
Im Distanzkegel liegen die Dinge, die das bewegliche, das Bild abtastende Auge bei starrer Kopfhaltung noch wahrnimmt.

Faustregel: Der Bildinhalt soll im Sehkreis liegen.
Die Distanz soll mindestens 25 cm sein.

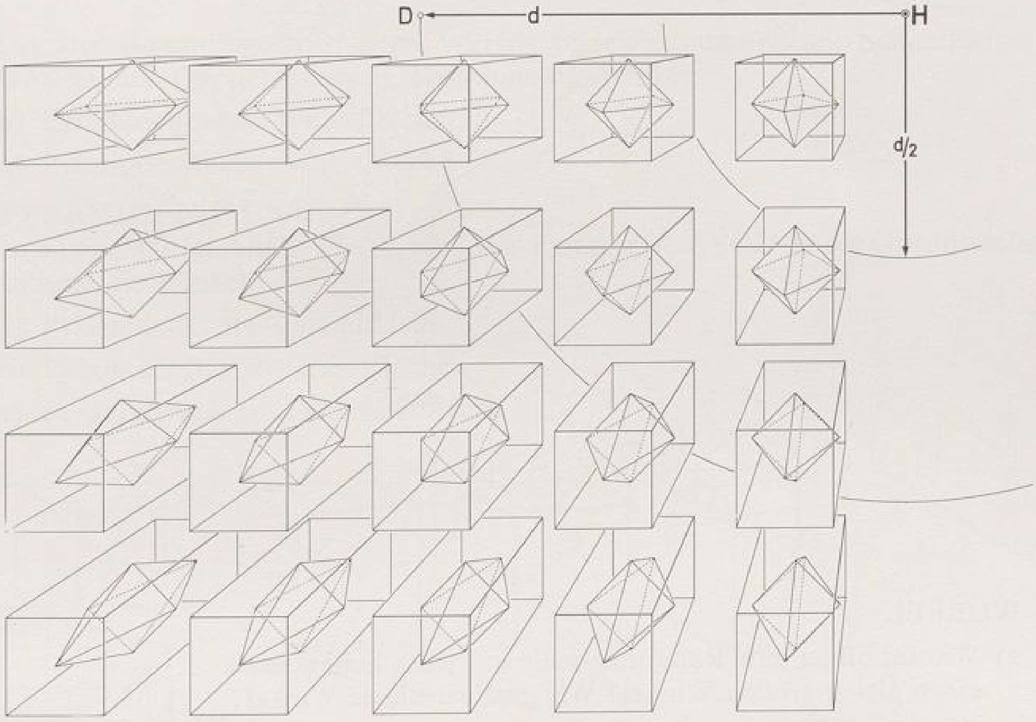
Beim Fotografieren bedeutet die Distanz d die Brennweite f des Objektivs und der Sehwinkel den Aufnahmewinkel des Objektivs.

a) Bestimme den Sehwinkel im Bild Seite 118.

b) Bestimme den Aufnahmewinkel für Kleinbildkameras (24 × 36) mit den Brennweiten
35 mm (Weitwinkelobjektiv), 50 mm (Normalobjektiv), 300 mm (Teleobjektiv)

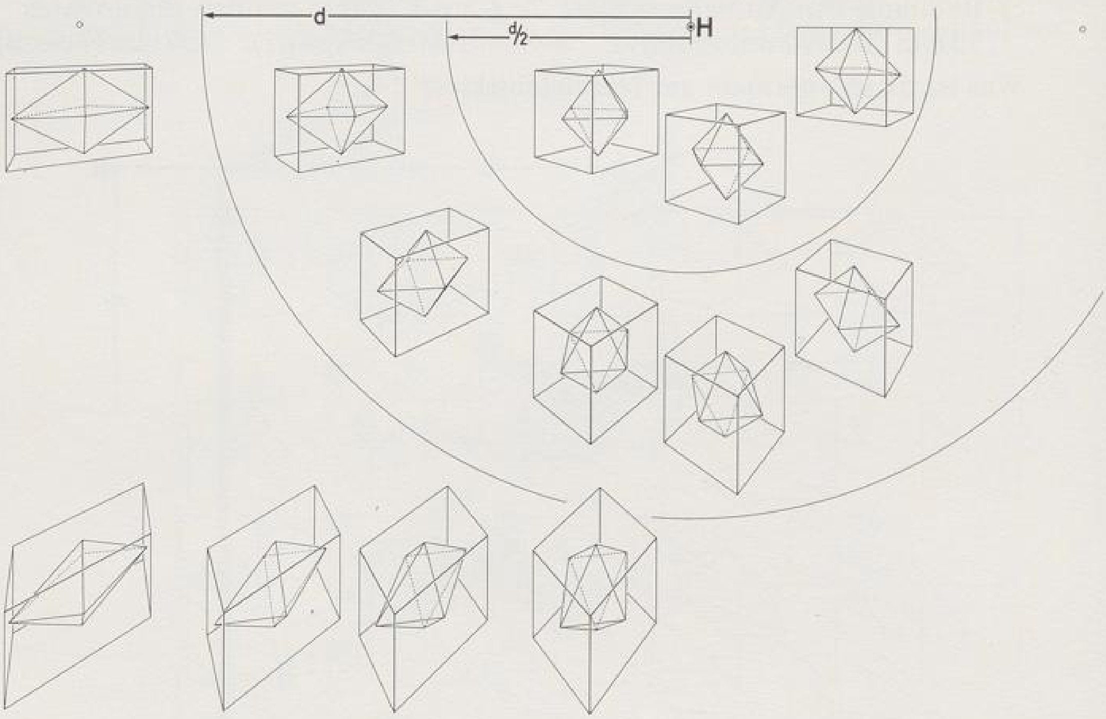
c) Bestimme den Aufnahmewinkel für 6 × 6-Kameras mit den Brennweiten
50 mm (Weitwinkelobjektiv), 80 mm (Normalobjektiv), 500 mm (Teleobjektiv)

Was ist da so »normal« am Normalobjektiv?

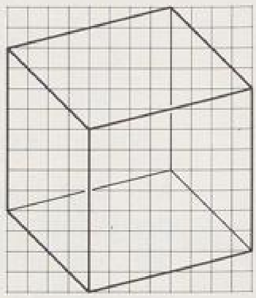


Mit dem Hauptpunkt H und der Distanz d legt der Zeichner die Perspektive fest, der Fotograf mit dem Objektiv und der Vergrößerung. Damit liegt in beiden Fällen der Augpunkt fest. Wo dieser Augpunkt nun genau **vorm** Bild liegt, weiß der Betrachter zwar meistens nicht, doch rein gefühlsmäßig sucht er sich einen Standort so, dass er das Bild gut überblickt, unbewusst bringt er so sein Auge in die Nähe des Augpunkts. Denn im Augpunkt hat er den besten Blick aufs Bild, hier sind die Sehwinkel von Maler (Fotograf) und Betrachter gleich. Wenn das Bild nach den »Regeln der Kunst«, sprich Faustregel hergestellt worden ist: Kein Bildteil ist vom Hauptpunkt weiter weg als die halbe Distanz, dann ist der richtige Standort schnell gefunden; und sollte der Abstand vom Bild größer sein, wirds kaum als störend empfunden – das Auge ist geduldig.

Aber die Geduld des Auges hat ihre Grenzen – und die liegen außerhalb des Distanzkreises: Je weiter Bildteile übern Sehkreis hinausragen, je mehr also der Seh- bzw. Aufnahmewinkel die 50°-Grenze überschreitet, desto weniger natürlich, desto verzerrter wirken sie. Das liegt daran, dass der Betrachter von seiner Sehgewohnheit nicht abgeht und seinen Blickwinkel von 50° beibehält. Weitwinkelaufnahmen wirken um so verzerrter, je kleiner die Brennweite ist. Doch keine Weitwinkelaufnahme ist verzerrt, kein perspektives Bild ist je verzerrt: Sobald nämlich der Betrachter das Auge im Augpunkt hat, muss er es zwar rollen, um alles zu erfassen, aber was er dann sieht, ist nicht verzerrt.



44. WÜRFEL



a) Warum bildet jede Raumdiagonale mit jeder Seitenfläche einen gleich großen Winkel? Wie groß ist dieser Winkel?

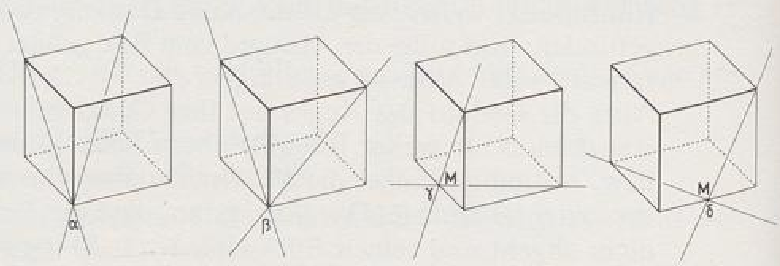
b) Warum schneidet jede Raumdiagonale eine andere in einem gleich großen Winkel? Wie groß ist dieser Winkel?

45. Welchen Winkel bilden die Seitenflächen eines regelmäßigen

a) Tetraeders

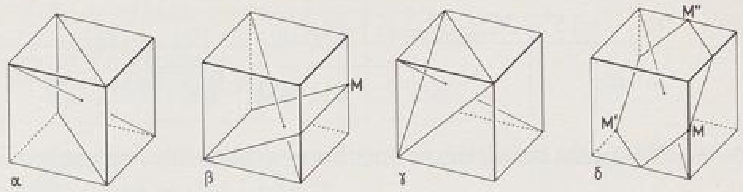
b) Oktaeders?

46. WINKEL IM WÜRFEL I
Bestimme die Winkel α bis δ.



:47. WINKEL IM WÜRFEL II

Bestimme die Winkel α bis δ (zwischen der Raumdiagonale und der Fläche im Würfel).



48. Die vier Raumdiagonalen eines Würfels bilden zusammen mit Seitenflächen des Würfels eine Doppelpyramide. Bestimme die Winkel

a) Pyramidenkante–Würfelfläche

b) Pyramidenfläche–Würfelfläche.

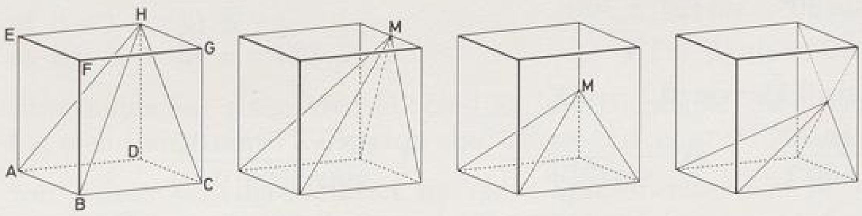
•49. PYRAMIDEN IM WÜRFEL

In einem Würfel ABCDEFGH sind vier Pyramiden. ABCD ist die Grundfläche. Bestimme die Winkel

a) Pyramidenkante–Grundfläche

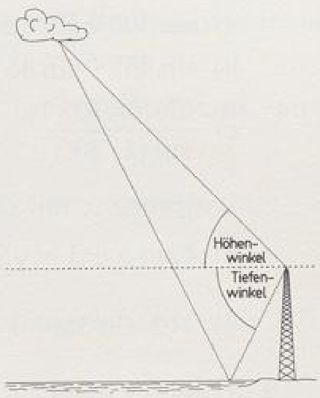
b) Pyramidenfläche–Grundfläche

c) Pyramidenfläche–Pyramidenfläche



•50. WOLKENHÖHE

Von einem 70 m hohen Turm sieht man eine Wolke unter dem Höhenwinkel 45° und ihr Spiegelbild im See unter dem Tiefenwinkel von 50°. Wie hoch schwebt die Wolke überm See?



Aufgaben zu 5.2

1. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Gradmaß!)

α	15°	37°	1°	1′	89,9				
$\sin\alpha$						$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{10-4\sqrt{5}}$

2. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Bogenmaß!)

x	1	0,1	0,0123	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$			
sin x							$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$

3. Berechne Näherungswerte für sin x mit dem Näherungspolynom von Seite 106 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\text{sin}}$-Wert des Taschenrechners.

   a) $x = 0{,}1$ **b)** $x = 1{,}1$ **c)** $x = 0{,}785$ **d)** $x = 30°$

4. Berechne Näherungswerte für x mit dem Näherungspolynom von Seite 106 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{sin}}$-Wert des Taschenrechners.

   a) $\sin x = 0{,}546$
   b) $\sin x = 0{,}1$
   c) $\sin x = 0{,}3$

5. Bestimme mit dem Taschenrechner.

   a) $\sin 20° + \sin 30° - \sin(20° + 30°)$
   b) $\sin 2° + \sin 3° - \sin(2° + 3°)$
   c) $\sin 0{,}2° + \sin 0{,}3° - \sin(0{,}2° + 0{,}3°)$
   d) $\dfrac{\sin 20° + \sin 30°}{\sin(20° + 30°)}$ **e)** $\dfrac{\sin 2° + \sin 3°}{\sin(2° + 3°)}$ **f)** $\dfrac{\sin 0{,}2° + \sin 0{,}3°}{\sin(0{,}2° + 0{,}3°)}$

6. Berechne ohne Taschenrechner.

   a) $\sin 30° + \sin 30° - \sin(30° + 30°)$
   b) $\sin 45° + \sin 45° - \sin(45° + 45°)$
   c) $\dfrac{2 \cdot \sin 30°}{\sin(2 \cdot 30°)}$

7. Bestimme α mit dem Taschenrechner.

   a) $4\sin\alpha + 1 = \sqrt{5}$ **b)** $4\sin 2\alpha - 1 = \sqrt{5}$
   c) $2\sqrt{2}\sin 3\alpha - 1 = \sqrt{3}$ **d)** $\dfrac{1 - \sqrt{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{6}$

8. Löse auf nach $\sin\alpha$ und berechne α ohne Taschenrechner.

   a) $1 - 2\sin\alpha = 0$ **b)** $2\sin\alpha - \sqrt{3} = 0$
   c) $\sqrt{2}\sin\alpha - 1 = 0$ **d)** $(\sqrt{2} - \sin\alpha)\sin\alpha = 0$
   e) $(\sin\alpha)^2 = \sin\alpha$ **f)** $2(\sin\alpha)^2 = \sin\alpha$
   g) $2(\sin\alpha)^2 + 1 = 3\sin\alpha$ **h)** $(2\sin\alpha)^2 + \sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})\sin\alpha$

9. Berechne die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $\gamma = 90°$

α	15°	60°		1°	89°				
a	15		3	1	1	239	191	489 061	560 123
c		1	5			638	1001	564 719	579 882

10. Das obere Ende einer 5 m langen Leiter erreicht an einer Hauswand eine Höhe von 4,5 m. Wie groß ist der Neigungswinkel der Leiter?

11. Eine Leiter bildet mit einer Hauswand einen Winkel von 20°, das untere Ende der Leiter ist 20 dm von der Hauswand entfernt. Wie lang ist die Leiter?

12. Im Deutschen Museum hängt ein 60 m langes Pendel. Jeden Tag wird es 140 cm waagrecht ausgelenkt. Berechne den Auslenkwinkel und die maximale Hubhöhe des Schwerpunkts.

• **13.** Zeige: In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC gilt

a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{2c}}$ **b)** $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{2c}}$.

14. Ein regelmäßiges n-Eck habe den Umkreisradius 1. Drücke Umfang und Flächeninhalt mit dem Sinus des Mittelpunktwinkels aus und berechne die Verhältnisse Umfang(n-Eck)/Umfang(Kreis) und Fläche(n-Eck)/Fläche(Kreis).

a) $n = 3$ **b)** $n = 5$
c) $n = 8$ **d)** $n = 180$

15. Eine Raute hat einen Winkel von 100°, die Diagonale, die diesen Winkel halbiert, hat eine Länge von 7. Wie groß sind Inkreisradius und Flächeninhalt der Raute?

16. Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Spitzenwinkel von 30° und einen Umfang von 30. Wie groß sind Basis und Flächeninhalt?

17. In einem Kreis mit Radius 8 misst der zu einer Sehne gehörende Mittelpunktswinkel 144°. Wie lang ist die Sehne?

18. Der Einheitskreis sei Inkreis eines achsensymmetrischen Tangententrapezes, eine Basis habe die Länge 1.

a) Wie groß ist ein Basiswinkel?

b) Wie lang sind die Schenkel?

c) Wie lang ist die andre Basis?

19. In einem Rechteck haben die Diagonalen die Länge 25 und schneiden sich unter 50°. Wie lang sind die Seiten?

20. Ein Kreissektor mit Mittelpunktswinkel μ und Radius m wird zum Mantel eines Kreiskegels gebogen.

a) Berechne den Öffnungswinkel ω des Kegels für $\mu \in \{90°, 180°, 270°\}$.

b) Welchen Mittelpunktswinkel μ muss der Sektor haben, wenn der Öffnungswinkel ω Größen aus $\{60°, 90°, 120°\}$ annehmen soll?

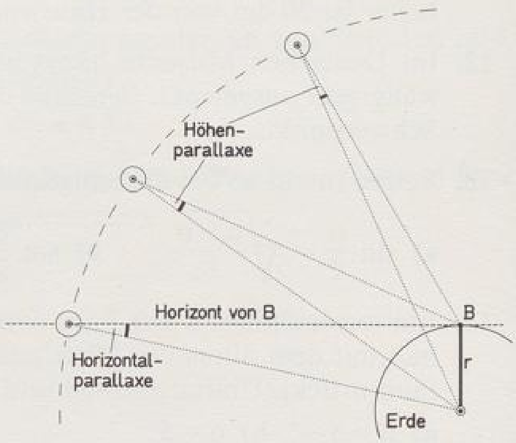
21. Vor dir liegen eine Kugel und eine Kreisscheibe, beide vom Durchmesser 1 m. Die Entfernung Auge–Mittelpunkt ist jeweils 1 m.

a) Unter welchem Sehwinkel erscheint die Kugel?

b) Unter welchem Sehwinkel erscheint die Scheibe, wenn du senkrecht draufschaust?

22. Ein Tischtennisball von 4cm Durchmesser rollt in einen Trichter mit einem Öffnungswinkel von 50°. Wie weit sind Trichterspitze und Ballmitte voneinander entfernt?

23. Unter **Höhen-Parallaxe** eines Himmelskörpers versteht man den Winkel φ, unter dem der Erdradius R (= 6370 km) vom Zentrum Z des Körpers aus erscheint. Sie ist null, wenn der Körper genau überm Beobachter B »im Zenit von B« steht, und hat ihren größten Wert, wenn der Körper im Horizont des Beobachters ist; deswegen heißt der Maximalwert der Höhen-Parallaxe **Horizontalparallaxe**. Die Horizontalparallaxe ist ein Maß für die Entfernung Erde–Gestirn, sie ist um so kleiner, je größer die Entfernung ist. Der Mond hat 57′, die Sonne 8,80″ Horizontalparallaxe.
Bestimme die Entfernungen Erde–Mond und Erde–Sonne. Die Entfernung Erde–Sonne ist eine astronomische Längeneinheit, abgekürzt 1 AE.

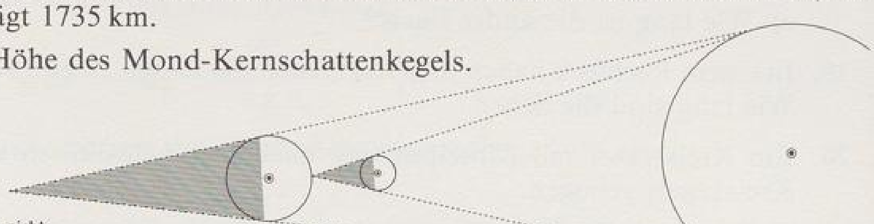


• 24. KERNSCHATTEN
Unter Abstand zweier Himmelskörper vesteht man die Entfernung der Mittelpunkte. Die Sonne hat einen Radius von 696 000 km, der Abstand Erde–Sonne beträgt ungefähr 149 Millionen Kilometer. Der Erdradius ist 6370 km. Die Erde wirft einen Kernschatten, der weit ins Weltall reicht. Der Kernschatten der Erde ist das Gebiet, in das kein Sonnenlicht dringt.

a) Berechne Öffnungswinkel und Höhe des Kernschattenkegels der Erde.

Auch der Mond wirft einen Kernschatten. Wo der Kernschatten des Monds die Erde trifft, ist eine totale Sonnenfinsternis. Mond und Erde haben 384 000 km Abstand, der Mondradius beträgt 1735 km.

b) Berechne die Höhe des Mond-Kernschattenkegels.



25. Welchen Winkel bildet die Höhe in einem regelmäßigen Tetraeder

a) mit einer Seitenfläche **b)** mit einer Kante?

Aufgaben zu 5.3

1. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Gradmaß!)

α	15°	37°	1°	1′	89,9°				
$\cos\alpha$						$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{10-4\sqrt{5}}$

2. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Bogenmaß!)

x	1	0,1	0,0123	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$			
cos x							$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$

3. Berechne Näherungswerte für cos x mit dem Näherungspolynom von Seite 108 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\text{cos}}$-Wert des Taschenrechners.

a) $x = 0{,}1$ **b)** $x = 1{,}1$ **c)** $x = 0{,}785$ **d)** $x = 30°$

4. Berechne Näherungswerte für x mit dem Näherungspolynom von Seite 108 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{cos}}$-Wert des Taschenrechners.

a) $\cos x = 0{,}546$ **b)** $\cos x = 0{,}1$ **c)** $\cos x = 0{,}3$

5. Bestimme mit dem Taschenrechner

a) $\cos 20° + \cos 30° - \cos(20° + 30°)$

b) $\cos 2° + \cos 3° - \cos(2° + 3°)$

c) $\cos 0{,}2° + \cos 0{,}3° - \cos(0{,}2° + 0{,}3°)$

d) $\dfrac{\cos 20° + \cos 30°}{\cos(20° + 30°)}$ **e)** $\dfrac{\cos 2° + \cos 3°}{\cos(2° + 3°)}$

f) $\dfrac{\cos 0{,}2° + \cos 0{,}3°}{\cos(0{,}2° + 0{,}3°}$

6. Berechne ohne Taschenrechner

a) $\cos 30° + \cos 30° - \cos(30° + 30°)$

b) $\cos 45° + \cos 45° - \cos(45° + 45°)$

c) $\dfrac{2 \cdot \cos 30°}{\cos(21 \cdot 30°)}$

7. Bestimme α mit dem Taschenrechner.

a) $4\cos\alpha + 1 = \sqrt{5}$ **b)** $4\cos 2\alpha - 1 = \sqrt{5}$

c) $2\sqrt{2}\cos 3\alpha - 1 = \sqrt{3}$ **d)** $\dfrac{1 - \sqrt{2}\cos\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{6}$

8. Löse auf nach $\cos\alpha$ und berechne α ohne Taschenrechner.

a) $1 - 2\cos\alpha = 0$ **b)** $2\cos\alpha - \sqrt{3} = 0$

c) $\sqrt{2}\cos\alpha - 1 = 0$ **d)** $(\sqrt{2} - \cos\alpha)\cos\alpha = 0$

e) $(\cos\alpha)^2 = \cos\alpha$ **f)** $2(\cos\alpha)^2 = \cos\alpha$

g) $2(\cos\alpha)^2 + 1 = 3\cos\alpha$ **h)** $(2\cos\alpha)^2 + \sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})\cos\alpha$

9. Berechne die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $\gamma = 90°$

α	15°	60°		1°	89°				
b	15		3	1	1	239	191	489 061	560 123
c		1	5			638	1001	564 719	579 882

• **10.** Zeige: In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC gilt

a) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c+b}{2c}}$ **b)** $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{c+a}{2c}}$

11. In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC ist $b = 2\sqrt{13}$ und der zugehörige Hypotenusenabschnitt $q = 4$. Berechne der Reihe nach α, a und p.

12. Zeige: Im spitzwinkligen Dreieck ABC hat das Höhenfußpunkt-Dreieck die Seitenlängen $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$ und $c\cos\gamma$.

13. Mainz liegt auf dem 50. Breitengrad. Wie viel Prozent des Erdumfangs muss man zurücklegen, wenn man auf diesem Breitenkreis die Erde umrundet? (Erdradius 6370 km)

• **14.** Neapel und New York liegen ziemlich genau auf dem 41. Breitengrad. Neapel hat etwa die geografische Länge 14° Ost, New York 74° West. Wie weit ist es von Neapel nach New York

a) auf dem Breitenkreis

b) durch einen geraden Tunnel

c) auf dem Großkreis?

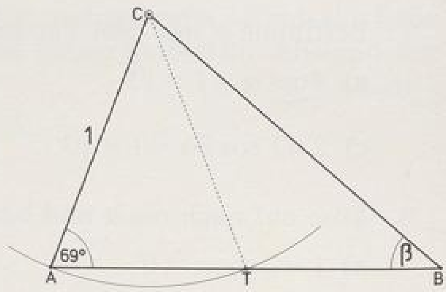
15. Ein Haus mit gleichschenkligem Satteldach ist 10 m breit (von Dachrinne zu Dachrinne) und 20 m lang. Wie groß ist die Dachfläche bei einer Neigung von 50°?

16. PROJEKTIONSSATZ
Zeige: In einem beliebigen Dreieck ist $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.
Wie lauten die entsprechenden Ausdrücke für die andern Seiten?

17. ABSCHNITT

a) Berechne Basis und Fläche des Dreiecks ATC.

b) Wie groß muss β sein, damit CT die Dreieckfläche halbiert?



⁝ **18.** GEKREUZTER RIEMENTRIEB
Kreuzt man den Riemen, so laufen die Räder gegensinnig. Berechne die Riemenlänge für die Räder im Beispiel auf Seite 108.

• 19. PROJEKTIONSSATZ IM RAUM

Bei der senkrechten Projektion einer Strecke auf eine Gerade multipliziert sich die Länge mit dem Kosinus des Neigungswinkels.

Ein entsprechender Satz gilt im Raum:

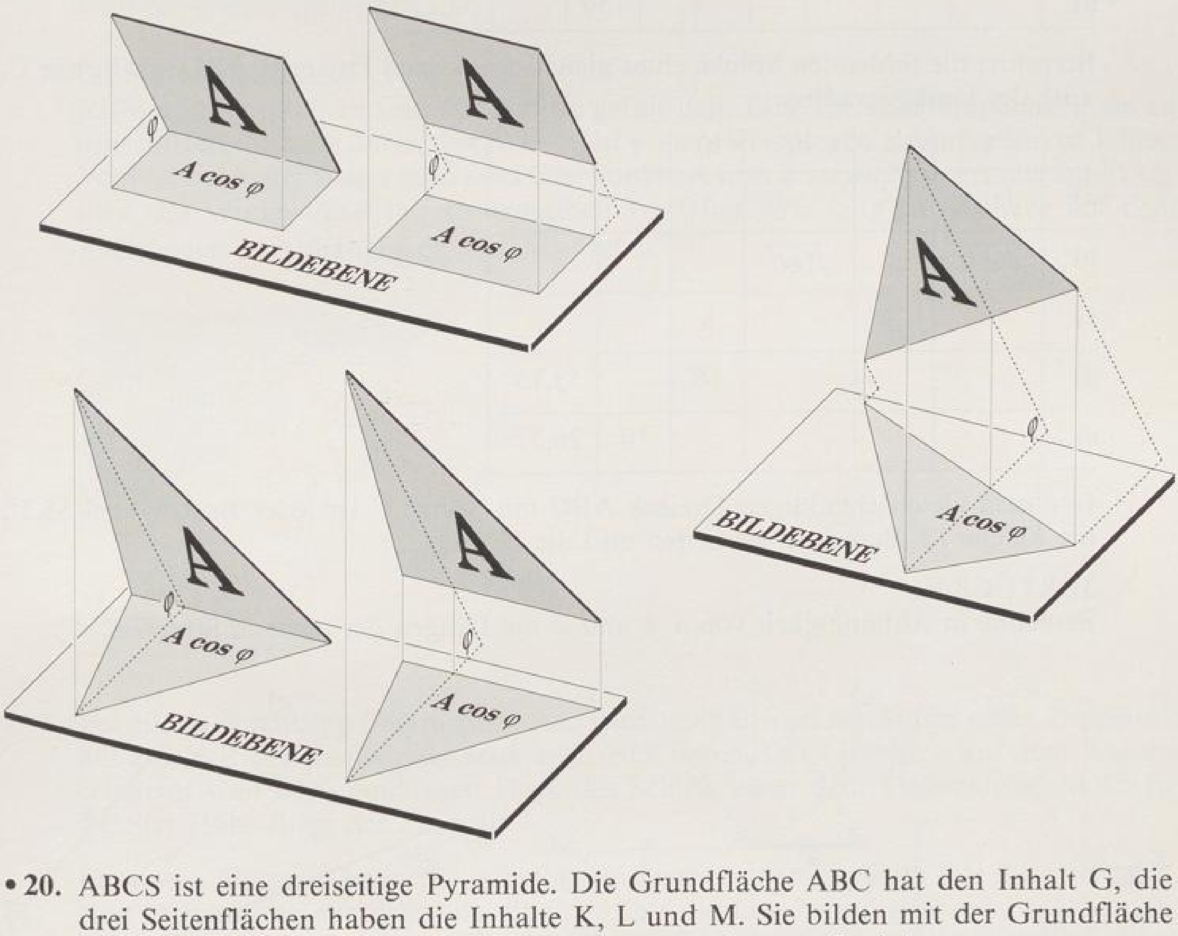
Bei der senkrechten Projektion eines Dreiecks auf eine Ebene (Bildebene) multipliziert sich der Flächeninhalt mit dem Kosinus des Winkels φ zwischen der Bildebene und der Dreieckebene.

Zeige das in drei Schritten:

a) Bei einem Rechteck vom Flächeninhalt A ist eine Seite parallel zur Bildebene; eine andere Seite ist unter φ gegen die Bildebene geneigt. Dann gilt für den Flächeninhalt A' der senkrechten Projektion: $A' = A\cos\varphi$.

b) Bei einem Dreieck vom Flächeninhalt A ist eine Seite parallel zur Bildebene; die zugehörige Höhe ist unter φ gegen die Bildebene geneigt. Dann gilt für den Flächeninhalt A' der senkrechten Projektion: $A' = A\cos\varphi$.

c) Beweise den oben formulierten Projektionssatz.



• 20. ABCS ist eine dreiseitige Pyramide. Die Grundfläche ABC hat den Inhalt G, die drei Seitenflächen haben die Inhalte K, L und M. Sie bilden mit der Grundfläche die Winkel κ, λ und μ. Diese Winkel können auch stumpf sein!

Zeige: $G = K\cos\kappa + L\cos\lambda + M\cos\mu$

Verwende den Projektionssatz von Aufgabe **19**. Denk dran, dass die Projektion der Spitze nicht in der Grundfläche liegen muss.

Aufgaben zu 5.1/2/3

1. Berechne die fehlenden Stücke des bei C rechtwinkligen Dreiecks

	a	b	c	h	p	q	F	α	β
a)	12	5							
b)		1,05	1,37						
c)	$\sqrt{13}$			3					
d)		$\sqrt{5}$				2			
e)	2,5				2				
• f)					9		15		
g)	24							9,5°	
• h)							150		53,13°

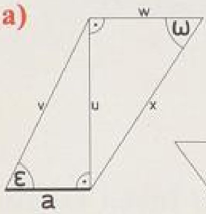
2. Berechne die fehlenden Stücke eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit Spitze C. r ist der Umkreisradius.

	a	c	h_a	h_c	r	α
a)	$\sqrt{468}$	24				
b)	$\sqrt{200}$		$\sqrt{160}$			
c)		24		8		
d)				16		53,13°
e)					10	26,57°

3. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit Spitze C ist jeder Basiswinkel 58,5°, die Fläche 12. Berechne die Seiten und die Höhen.

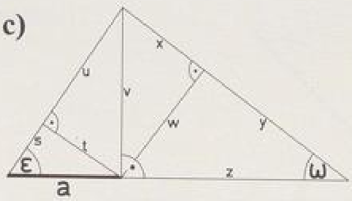
4. 3EXTÜCKE
Berechne in Abhängigkeit von a, ε und ω die Längen der übrigen Strecken.

a)

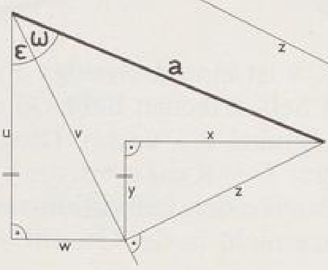


b)

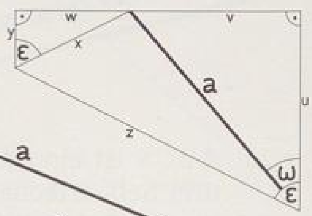
c)



d)

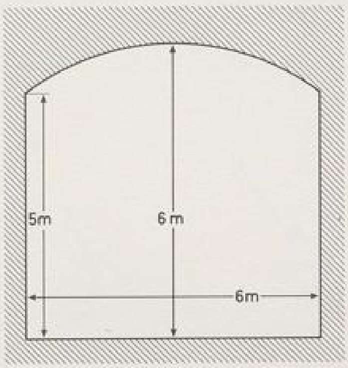


e)

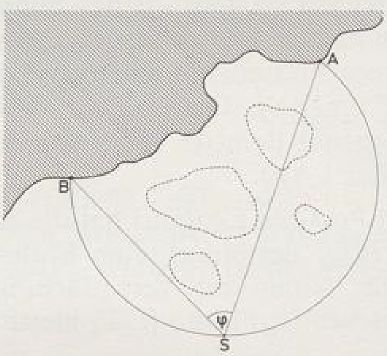


5. Bei einer Raute ist der Inkreisradius 10 und eine Diagonale 40. Berechne ihren Umfang und ihre Winkel.

6. GEWÖLBE
Die Decke eines Raums von 6 m Breite und 10 m Tiefe ist zylindrisch gewölbt. Berechne ihren Flächeninhalt.



7. GEFAHRENKREIS
Riffe und Sandbänke sind für Schiffe gefährlich. Eine einfache Möglichkeit sie zu umschiffen, besteht darin das Schiff auf einem Kreisbogen drumherum zu leiten: Vom Schiff S aus visiert man zwei Uferpunkte A und B an und steuert das Schiff so, dass der Winkel ASB immer denselben Wert hat. Wie lang ist der Weg auf dem Kreisbogen in Abhängigkeit von $\overline{AB}$ und φ?



8. Bei einem Nachtflug überm Bodensee leuchtet man von der Spitze eines Zeppelins mit einem Richtscheinwerfer senkrecht nach unten. Der Lichtfleck auf dem Wasser erscheint vom 80 m entfernten Heck des Schiffs unter dem Tiefenwinkel 81,4°. In welcher Höhe fliegt der Zeppelin?

9. Bei einem Flugzeug ist in 10 km Höhe das Triebwerk ausgefallen. Der Pilot versucht eine Notlandung aus dem Gleitflug. Er liest die Geschwindigkeiten ab: 200 km/h gegen Grund und 8 m/s im Sinken. Wie groß ist der Gleitwinkel? Welche Entfernung über Grund legt die Maschine zurück?

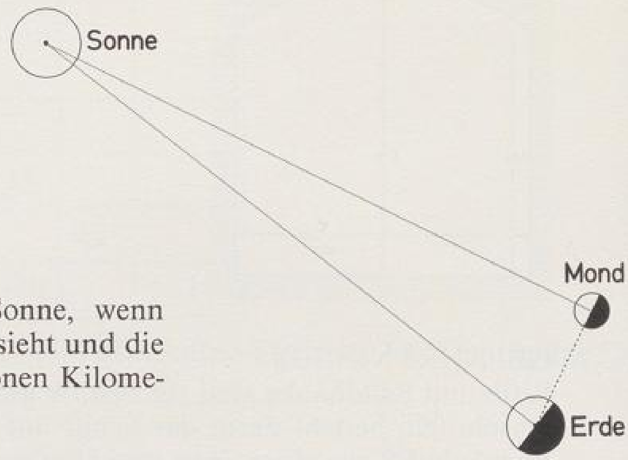
• **10.** Das Auflösungsvermögen des Auges entspricht einem Blickwinkel von etwa 1′ unter Normalbedingungen (Sonnenschein und klare Luft).

a) In welcher Entfernung erkennt man gerade noch einen 1 cm großen Gegenstand?

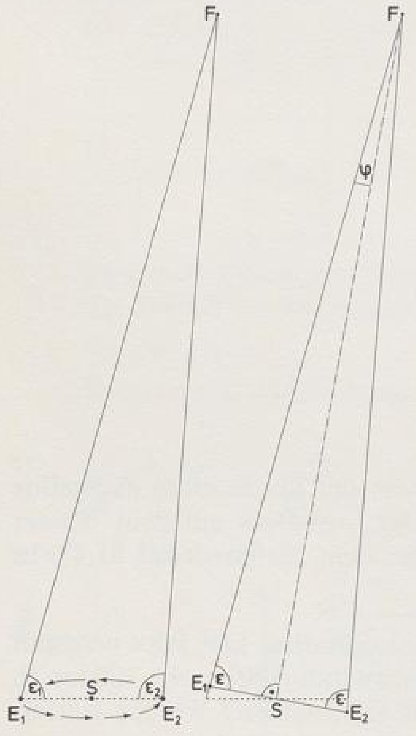
b) Wie groß muss ein Gegenstand mindestens sein, damit man ihn in 100 m Entfernung gerade noch sieht?

c) In welcher Entfernung treffen sich scheinbar die Schienen (Abstand 1435 mm) eines geraden Gleises?

11. HALBMOND
Zum Zeitpunkt des Halbmonds misst jemand den Winkel Mond – Erde – Sonne 89,85°. Welche Entfernung haben Sonne und Erde, wenn der Abstand Erde – Mond 384 400 km beträgt?



12. Berechne den Durchmesser der Sonne, wenn man ihn von der Erde aus unter 31′ sieht und die Entfernung Sonne – Erde 150 Millionen Kilometer beträgt?



13. FIXSTERNENTFERNUNG
Man misst den Winkel Fixstern – Erde – Sonne (ε_1) und nach einem halben Jahr wieder (ε_2). Als **Jahresparallaxe** φ des Fixsterns bezeichnet man den Winkel $0{,}5\,(180° - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Der Erdbahnradius beträgt 150 Millionen Kilometer (1 Astronomische Einheit, abgekürzt 1 AE).

a) Der Fixstern Proxima Centauri hat die Jahresparallaxe 0,765″. Bestimme seine Entfernung von der Erde. Nimm zur Vereinfachung an, dass die Strecken $[E_1F]$ und $[E_2F]$ gleich lang sind.

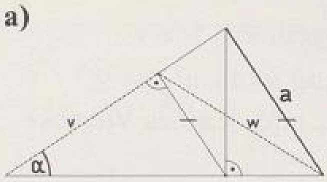
b) Wie weit kann man so trigonometrisch messen, wenn die mittleren Fehler der Sternparallaxen 0,016″ betragen? (Mess- und Fehlerstrecken sind dann gleich lang.)

c) 1 parsec (Parallaxensekunde) ist eine weitere astronomische Längeneinheit. Sie gehört zur Jahresparallaxe von 1″. Wie viel Kilometer misst ein 1 parsec?

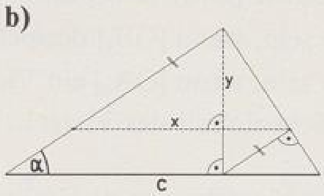
14. DREIECKSTRECKEN

Gegeben sind die dick gezeichneten Stücke. Berechne die gestrichelten Strecken.

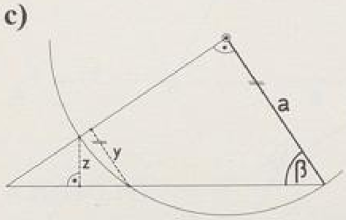
a)



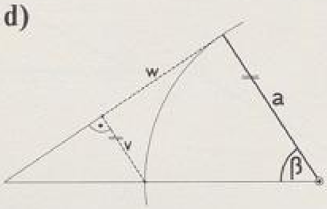
b)



c)

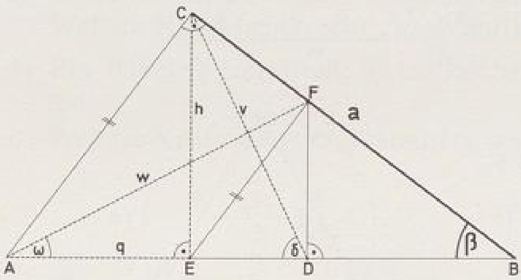


d)



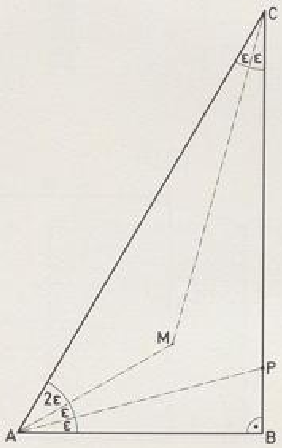
15. DREIECKMESSUNG

Gegeben $\beta = 37°$ und $a = 10$. Berechne h, q, v und w sowie die Winkel ω, δ und den Schnittwinkel von v und w.



⁝ **16.** WINKELTEILUNG

Die Strecke [AB] hat die Länge l. Berechne die Längen der Strecken [AM], [SM] und [MP]. Wie groß ist der Winkel CMP?



17. WINKELSCHNECKE

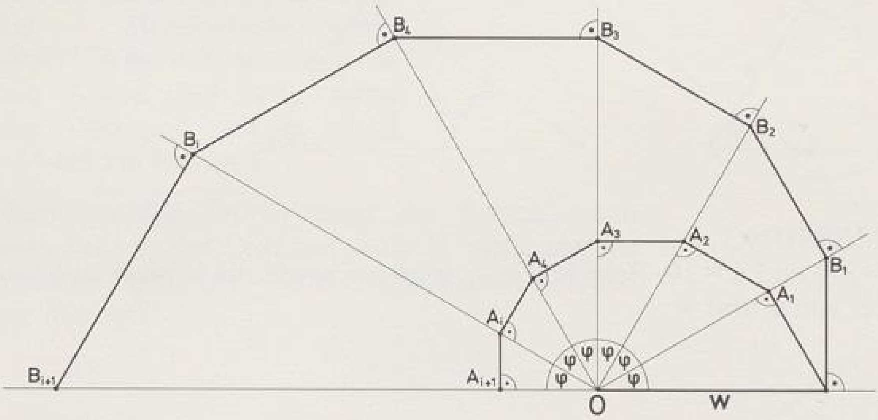
a) Berechne allgemein in Abhängigkeit von w und φ die Längen der Strecken $[OA_1]$, $[OA_2]$ und $[OA_i]$ sowie $[OB_1]$, $[OB_2]$ und $[OB_i]$.

b) Wie groß muss φ sein, wenn $[OB_4]$ doppelt so lang sein soll wie w?

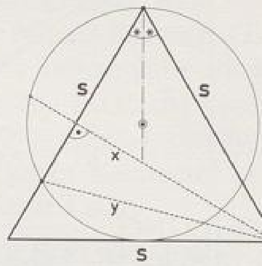
c) Wie groß muss φ sein, wenn $[OA_4]$ ein Viertel so lang sein soll wie w?

d) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $A_1B_1B_2A_2$ und den des Vierecks $A_iB_iB_{i+1}A_{i+1}$.

e) Warum haben die Vierecke von **d)** Umkreise, wie groß sind die Radien?

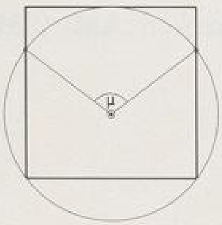


18. GLEICHSEITIG
Berechne x und y in Abhängigkeit von s.

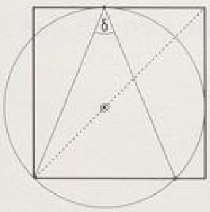


19. KREIS & QUADRAT
Berechne den bezeichneten Winkel.

a)



b)

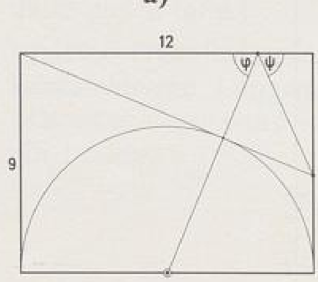


20. HALBKREISLICH

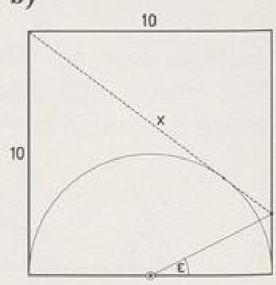
a) Berechne φ und ψ im Rechteck.

b) Berechne x und ε im Quadrat.

a)

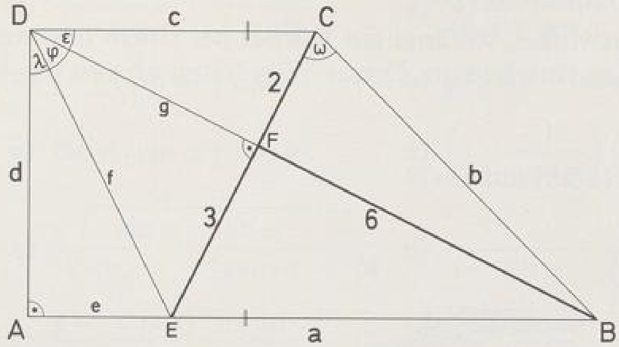


b)



21. TRAPEZLICH

Berechne die bezeichneten Strecken und Winkel.



22. KRÄFTIG

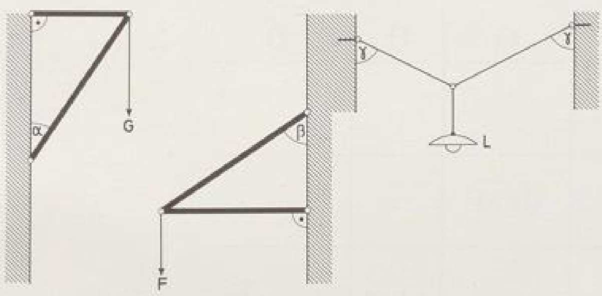
a) Berechne Druck- und Zugkraft in den beiden Stangen in Abhängigkeit von G und α.

b) Berechne Druck- und Zugkraft in den beiden Stangen in Abhängigkeit von F und β.

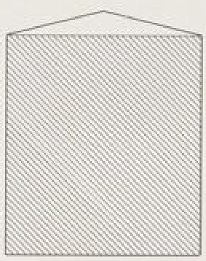
c) Berechne die Seilkräfte in Abhängigkeit von γ und vom Lampengewicht L. Welche Kraft (senkrecht zur Wand) zieht an den Halterungen?

d) Ein Paket (80 cm breit, 90 cm hoch) wird an einem 342 cm langen Spagat gehalten. Welche Kraft muss er aushalten, wenn das Paket 10 kg Masse hat?

a) **b)** **c)**



d)

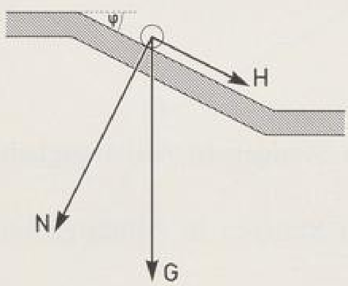


23. SCHIEFEBENE

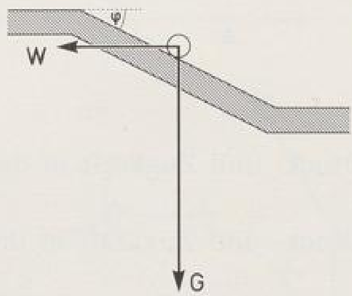
a) Berechne Hangabtrieb H und Normalkraft N in Abhängigkeit von φ und G.

b) Welche waagrechte Kraft W hält die Kugel?

c) Vergrößert man den Neigungswinkel, so fängt ein Körper bei einem bestimmten Winkelwert φ_0 zu rollen oder zu rutschen an. Dieser Wert hängt ab von der Haftreibungszahl μ.
Zeige: $\mu = \tan \varphi_0$
Wie groß ist φ_0 für $\mu = 0{,}027$ (Stahl auf Eis)?



b)



24. Im Deutschen Museum hängt ein 60 m langes Pendel von 40 kg Masse. Welche Kraft (waagrecht) braucht man um es 140 cm waagrecht auszulenken?

Aufgaben zu 5.4

1. Bestimme die fehlenden Werte

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin \alpha$	0,6	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{0{,}5}$			
$\cos \alpha$			$\frac{5}{12}$		$\sqrt{0{,}75}$		
$\tan \alpha$						1,827	$2 + \sqrt{3}$

Vereinfache

2. **a)** $\tan \alpha \cdot \cos \alpha$ **b)** $\dfrac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$ **c)** $\dfrac{1}{(\cos \alpha)^2} - 1$

d) $\dfrac{(\sin \alpha)^2}{1 - \cos \alpha}$ **e)** $\dfrac{1}{\sin \alpha + 1} - \dfrac{1}{\sin \alpha - 1}$

f) $\dfrac{\tan \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ **g)** $\dfrac{1 + \tan \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

3. a) $\sqrt{1+\cos\alpha}\,\sqrt{1-\cos\alpha}$ b) $\sqrt{\sin\alpha+1}\,\sqrt{\sin\alpha-1}$ (!)

c) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ d) $\sqrt{\frac{8}{1+\cos\alpha}+\frac{8}{1-\cos\alpha}}$

4. a) $[1+(\tan\alpha)^2]\cos\alpha$ b) $(\sin\alpha)^4-(\cos\alpha)^4$

c) $\tan\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha$ d) $\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$

5. a) $\sqrt{\frac{\sin\alpha-\tan\alpha}{(\cos\alpha-1)\sin\alpha}}$ b) $\frac{1}{1-\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2}$

c) $\frac{(1-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2}$ d) $\frac{1-[(\sin\alpha)^4+(\cos\alpha)^4]}{(\cos\alpha)^4}$

6. a) $2(1+\cos\alpha)-(\sin\alpha)^2$ b) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

c) $\sin\alpha\cdot(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^3$ d) $(2\cos\alpha)^2+12\sin\alpha-13$

7. Forme so um, dass im Ergebnis nicht $90°-\alpha$ vorkommt.

a) $\tan\alpha\cdot\tan(90°-\alpha)$ b) $\frac{1}{\tan(90°-\alpha)}+\tan\alpha$

c) $\sqrt{1+[\tan(90°-\alpha)]^2}$ d) $\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\tan(90°-\alpha)$

e) $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}$