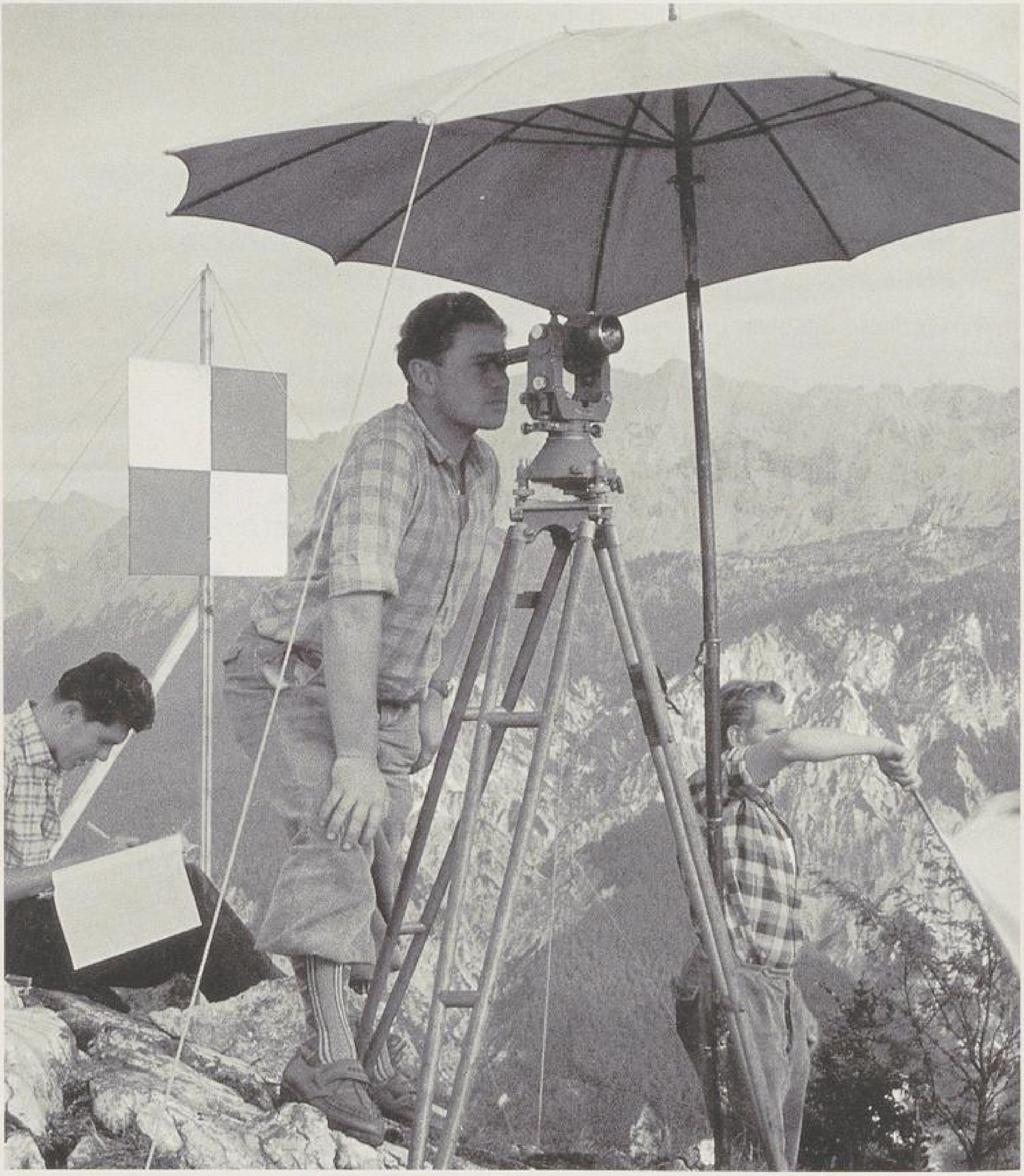
Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

6. Kapitel Trigometrie für beliebige Winkel

6. Kapitel
Trigonometrie für beliebige Winkel



Winkelmessung mit dem Theodolit im Gebirge

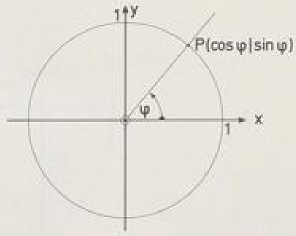
6.1 Trigonometrie am Einheitskreis

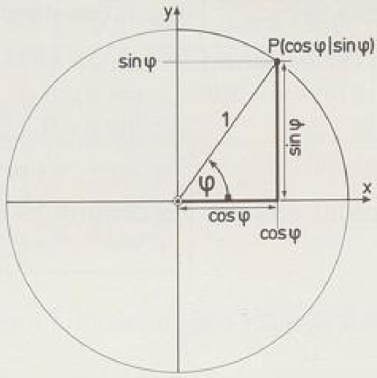
Trigonometrie treibt man nicht nur mit spitzen Winkeln. Weil man auch negative Winkelmaße und Winkel über 360° zulässt, arbeitet man mit dem Drehwinkel. Drehwinkel veranschaulicht man am Besten am Einheitskreis. Zur Erinnerung: Winkel zählen wir negativ bei Rechtsdrehung (Uhrzeigersinn!) und positiv bei Linksdrehung (Gegenuhrzeigersinn!). Wir werden sin, cos und tan neu definieren, freilich aber so, dass sich für spitze Winkel dasselbe ergibt wie bisher. Dazu brauchen wir den Einheitskreis um den Ursprung eines Koordinatensystems. Den Drehwinkel messen wir von der positiven x-Achse aus. Schneidet der zweite Schenkel von Winkel φ den Einheitskreis in Punkt P, dann definieren wir:

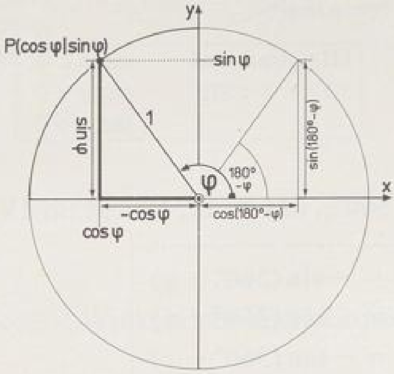
Definition

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{cos}\,\varphi \text{ ist der x-Wert von P} \\ \textbf{sin}\,\varphi \text{ ist der y-Wert von P}\end{array}\right\} \quad P(\cos\varphi|\sin\varphi)$$

tan φ ist der Quotient von y- und x-Wert, also $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.







I. Quadrant	
0° < φ < 90°	sin φ > 0
	cos φ > 0
	tan φ > 0

II. Quadrant	
90° < φ < 180°	sin φ > 0
	cos φ < 0
	tan φ < 0

Wir unterscheiden die Fälle:

0° < φ < 90°, das heißt, P liegt im I. Quadranten; die neue Definition liefert dasselbe wie die alte.

90° < φ < 180°, das heißt, P liegt im II. Quadranten; aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\varphi &= \sin(180° - \varphi)\\ \cos\varphi &= -\cos(180° - \varphi)\\ \tan\varphi &= -\tan(180° - \varphi)\end{aligned}}$$

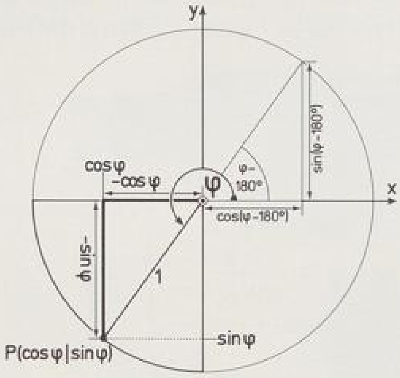
zum Beispiel sin 150° = sin(180° − 150°) = sin 30° = 0,5

Beachte: Streckenlängen (Maßpfeile!) sind positiv (zum Beispiel −cos φ > 0), Koordinaten dagegen können auch negativ sein (zum Beispiel cos φ < 0).

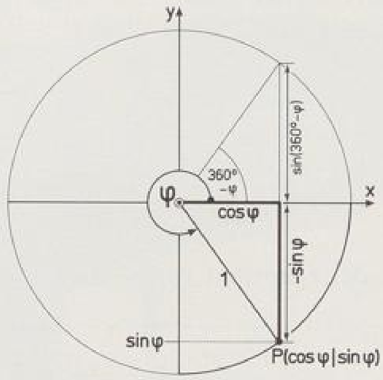
$180° < \varphi < 270°$, das heißt, P liegt im III. Quadranten; aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\varphi &= -\sin(\varphi - 180°) \\ \cos\varphi &= -\cos(\varphi - 180°) \\ \tan\varphi &= \tan(\varphi - 180°) \end{aligned}}$$

zum Beispiel $\cos 240° = -\cos(240° - 180°) = -\cos 60° = -0{,}5$



III. Quadrant	$\sin\varphi < 0$
$180° < \varphi < 270°$	$\cos\varphi < 0$
	$\tan\varphi > 0$



IV. Quadrant	$\sin\varphi < 0$
$270° < \varphi < 360°$	$\cos\varphi > 0$
	$\tan\varphi < 0$

$270° < \varphi < 360°$, das heißt, P liegt im IV. Quadranten; aus der Zeichnung lesen wir ab:

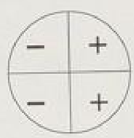
$$\boxed{\begin{aligned} \sin\varphi &= -\sin(360° - \varphi) \\ \cos\varphi &= \cos(360° - \varphi) \\ \tan\varphi &= -\tan(360° - \varphi) \end{aligned}}$$

zum Beispiel $\tan 315° = -\tan(360° - 315°) = -\tan 45° = -1$

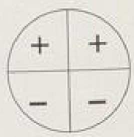
$\varphi \in \{0°, 90°, 180°, 270°, 360°\}$, das heißt, P liegt auf den Koordinatenachsen; an den vier Zeichnungen überlegen wir uns:

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	0	−1	0	1
$\tan\alpha$	0	nicht def.	0	nicht def.	0

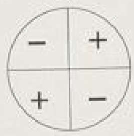
Kosinus



Sinus



Tangens



Die drei Kreise zeigen die Vorzeichen der Quadranten.

Die Fülle der Formeln ist halb so wild! Im Ernstfall geht man so vor:

- **Der Quadrant liefert das Vorzeichen.**
- **Als neuen (spitzen) Winkel $\hat{\varphi}$ nehmen wir den Unterschied zwischen φ und 180° bzw. zwischen φ und 360°.**

Beispiel: $\cos 243° = ?$ III. Quadrant, also Vorzeichen »–«
243° liegt näher bei 180° als bei 360°, also ist $\hat{\varphi} = 63°$ der Unterschied zwischen 243° und 180°

$$\cos 243° = -\cos 63°$$

Weil zusätzliche Volldrehungen – linksrum oder rechtsrum – zum selben Bild führen, gilt:
$\sin 1470° = \sin(1470° - 4 \cdot 360°) = \sin 30° = 0{,}5$

$$\boxed{\begin{array}{rll} \sin\varphi = & \sin(\varphi - z\cdot 360°) & \\ \cos\varphi = & -\cos(\varphi - z\cdot 360°) & \\ \tan\varphi = & -\tan(\varphi - z\cdot 360°) & \quad z \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

Jetzt werden wir auch mit negativen Winkeln fertig:

$$\cos(-30°) = \cos(-30° + 360°) = \cos 330° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Wir kombinieren diese Formeln:

$$\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= \sin(-\varphi + 360°) = \sin(360° - \varphi) = -\sin\varphi \\ \cos(-\varphi) &= \cos(-\varphi + 360°) = \cos(360° - \varphi) = \cos\varphi \\ \tan(-\varphi) &= \tan(-\varphi + 360°) = \tan(360° - \varphi) = -\tan\varphi \end{aligned}$$

zusammengefasst

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= -\sin\varphi \\ \cos(-\varphi) &= \cos\varphi \\ \tan(-\varphi) &= -\tan\varphi \end{aligned}}$$

Die bisherigen Überlegungen zeigen, dass verschiedene Winkel denselben Sinuswert haben können:

$$\sin 60° = \sin 120° = \sin 420° = \sin 480° = \sin(-240°) = \sin(-300°) = \sin(-600°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Also hat die Gleichung $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ unendlich viele Lösungen:

$\ldots, -600°, -300°, -240°, 60°, 120°, 420°, 480°, \ldots$

Übersichtlich geordnet sind das die beiden Serien

$60° + z \cdot 360°$ und $120° + z \cdot 360°$, wobei $z \in \mathbb{Z}$

Es genügt also, die Lösungen im Intervall $[0°; 360°[$ zu suchen, denn hier liegen die entscheidenden Winkel. Die restlichen Winkel ergeben sich durch Addition ganzer Vielfacher von 36°. Der Summand $z \cdot 360°$ bringt nichts wesentlich Neues.

Die Gleichung $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ lösen wir so:

$\cos\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$\hat{\alpha} = 45°$ ist der zugehörige spitze Winkel

Welche beiden Quadranten nun in Frage kommen, hängt vom Vorzeichen ab; weil der gegebene Kosinus negativ ist, sind es der II. und III. Quadrant.

II. Quadrant: $\alpha_1 = 180° - \hat{\alpha} = 135°$
III. Quadrant: $\alpha_2 = 180° + \hat{\alpha} = 225°$

Die vollständige Lösung lautet:

$$\alpha_{1Z} = 135° + z \cdot 360°, \quad \alpha_{2Z} = 225° + z \cdot 360°, \quad z \in \mathbb{Z}$$

Der Taschenrechner gibt höchstens eine Lösung an. Sie liegt beim Kosinus im I. oder II. Quadranten $0 \leqq \alpha \leqq 180°$), beim Sinus und Tangens im I. oder »−I.« Quadranten ($-90° \leqq \alpha \leqq 90°$).

Beispiel: $\tan\alpha = -0{,}7$
$\alpha^* = -35{,}0°$ (gerundeter Wert des Taschenrechners)
$\hat{\alpha} = 35{,}0°$
Der Tangens ist negativ im II. und IV. Quadranten
II. Quadrant: $\alpha_1 = 180° - \hat{\alpha} = 145{,}0°$
IV. Quadrant: $\alpha_2 = 360° - \hat{\alpha} = 325{,}0°$

Die vollständige Lösung lautet:

$$\alpha_{1Z} = 145° + z \cdot 360°, \quad \alpha_{2z} = 325° + z \cdot 360°, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Am Schluss des vorigen Kapitels haben wir Formeln zusammengestellt, die die Zusammenhänge zwischen sin, cos und tan eines Winkels im ersten Quadranten wiedergeben. Bis aufs Vorzeichen gelten diese Formeln in allen Quadranten. Der Quadrant legt das Vorzeichen fest. Kennt man den Quadranten nicht, muss man Fallunterscheidungen machen. Beispiele:

1. Quadrant bekannt $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$ und α im II. Quadranten

dann ist $\sin\alpha$ positiv und es gilt $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + (\tan\alpha)^2}} = \dfrac{3}{5}$

dann ist $\cos\alpha$ negativ und es gilt $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + (\tan\alpha)^2}} = -\dfrac{4}{5}$

2. Quadrant unbekannt $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$

dann liegt α im II. oder III. Quadranten.

Liegt α im II. Quadranten, dann gilt $\sin\alpha = +\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = \dfrac{4}{5}$

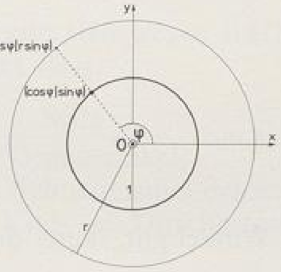
und $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2}}{\cos\alpha} = -\dfrac{4}{3}$

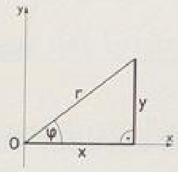
Liegt α im III. Quadranten, dann gilt $\sin\alpha = -\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = -\dfrac{4}{5}$

und $\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2}}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$

Polarkoordinaten

Wir haben cos φ und sin φ kennen gelernt als die x- und y-Werte des Punkts auf dem Einheitskreis in Richtung φ. Durch eine zentrische Streckung mit Zentrum O und Streckfaktor r erreichen wir jeden Punkt in Richtung φ. Ein Punkt P in Richtung φ, der von O die Entfernung r hat, hat demnach die Koordinaten $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$. r und φ legen seine Lage genauso eindeutig fest wie x und y. Man kann also auch r und φ als Koordinaten verwenden. Sie heißen **Polarkoordinaten** des Punkts. Der Punkt O, von dem aus man die Entfernung misst, heißt **Pol**; die Achse, gegen die man die Richtung misst, heißt **Polarachse**, das ist bei uns die positive x-Achse. Zwischen den Polarkoordinaten und den kartesischen Koordinaten bestehen folgende Zusammenhänge:





$$\mathbf{x = r \cdot \cos\varphi} \qquad \mathbf{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

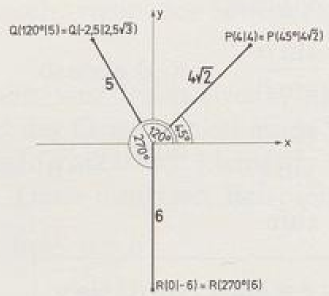
$$\mathbf{y = r \cdot \sin\varphi} \quad (r \geqq 0,\ 0° \leqq \varphi < 360°) \qquad \mathbf{\tan\varphi = \frac{y}{x}} \quad (x \neq 0)$$

Sind r und φ gegeben, dann ergeben sich x und y sofort eindeutig. Sind aber x und y gegeben, dann muss man aus den Vorzeigen zuerst auf den Quadranten schließen, um φ eindeutig festzulegen; r ergibt sich immer eindeutig. Beim Pol O(0|0) ist φ beliebig. Ist $x = 0$ und y positiv, dann ist $\varphi = 90°$. Ist $x = 0$ und y negativ, dann ist $\varphi = 270°$.
Beispiele:

$P(4|4) = P(45°|4\sqrt{2})$,

$Q(120°|5) = Q(-2{,}5|2{,}5\sqrt{3})$,

$R(0|-6) = R(270°|6)$.



Manchmal sind Polarkoordinaten zweckmäßiger als die kartesischen Koordinaten. Zum Beispiel beim Wandern nach Kompass: »Geh vom Tümpel 3 km in Richtung SSW, dann bist du bei der Polizei.«

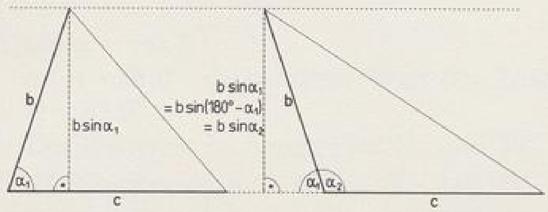
6.2 Berechnungen am allgemeinen Dreieck

Trigonometrie heißt Dreieckmessung, sie beschränkt sich nicht auf rechtwinklige Dreiecke. So, wie man ein Dreieck aus drei gegebenen Stücken konstruiert, so berechnet man die restlichen Stücke trigonometrisch. Zuerst leiten wir eine neue Flächenformel her.

Wegen $h_c = b \cdot \sin\alpha$ beziehungsweise

$h_c = b \cdot \sin(180° - \alpha) = b \cdot \sin\alpha$ gilt für den

Flächeninhalt $F = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$



Weil Entsprechendes auch für die andern beiden Winkel gilt, lautet die Flächenformel

$$\boxed{F_\triangle = \frac{1}{2}\, bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\, ac \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin\gamma}$$

In Worten: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des Zwischenwinkels.

Dividiert man durch gemeinsame Faktoren, so ergibt sich zum Beispiel:

$$\frac{1}{2} ac \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{und ebenso}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

zusammengefasst zum

Sinussatz $\boxed{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma}$

In Worten: Im Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinuswerte der Gegenwinkel.

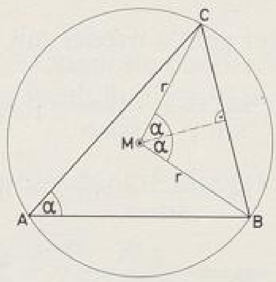
anders formuliert

Sinussatz $\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$

In Worten: Im Dreieck ist der Quotient von Seite und Sinus des Gegenwinkels konstant.

Diese Konstante hängt vom Dreieck ab und hat sogar eine einfache geometrische Bedeutung. Machen wir uns das an einem Dreieck und seinem Umkreis klar! Der Mittelpunktswinkel BMC ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel BAC. Deshalb lesen wir ab

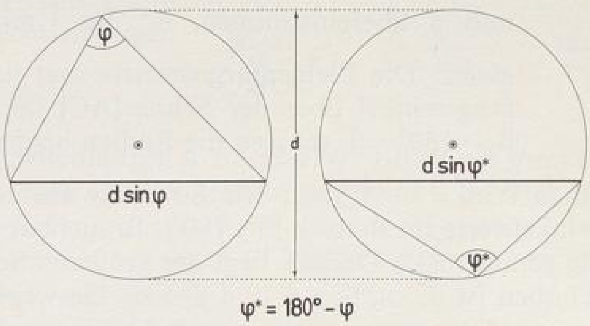
$$\sin\alpha = \frac{a/2}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2r$$



Diese Beziehung ergibt sich wegen $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ auch, wenn der Mittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegt.

Die Konstante $\dfrac{\text{Seite}}{\sin\,(\text{Gegenwinkel})}$ hat sich als Durchmesser des Umkreises entpuppt. Das kann man auch als Sehnenformel deuten:
Ist s eine Sehne im Kreis mit Durchmesser d und φ ein zugehöriger Umfangswinkel, dann gilt

Sehnenformel $\boxed{\mathbf{s = d \sin\varphi}}$



Wegen $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$ gilt diese Formel auch, wenn der Scheitel des Umfangswinkels auf dem kürzeren Kreisbogen liegt.

Mit dem Sinussatz lassen sich Dreiecke berechnen, von denen zwei Winkel und eine Seite (**WWS, WSW**) beziehungsweise zwei Seiten und der Gegenwinkel einer Seite (**SsW, sSW**) bekannt sind. Ist der gegebene Winkel der Gegenwinkel der kleineren Seite, so ergeben sich (wie bei der Konstruktion) zwei Lösungen. Dazu nun zwei Beispiele:

1. Beispiel: Im Dreieck ABC ist $\alpha = 25°$, $a = 4$ und $b = 6$.
Wie groß sind, c, β und γ?

Aus $\dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{a}$ folgt $\sin\beta = \dfrac{b}{a} \cdot \sin\alpha$,

Werte eingesetzt: $\sin\alpha = 0{,}633\,92\ldots$

Der Taschenrechner liefert $\hat{\beta} = 39{,}3°$.

Sinnvolle Werte sind

$\beta_1 = \mathbf{39{,}3°}$ und $\beta_2 = 180° - 39{,}3° = \mathbf{140{,}7°}$

(Dreieckwinkel sind kleiner als 180°.)

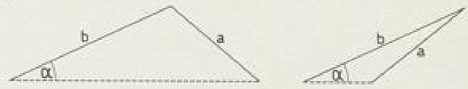
Aus der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich

$$\gamma_1 = 180° - 39{,}3° - 25° = \mathbf{115{,}7°}$$

und $\gamma_2 = 180° - 140{,}7° - 25° = \mathbf{14{,}3°}$.

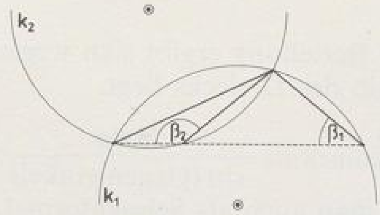
Weiter geht's wieder mit dem Sinussatz.

aus $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ folgt $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma$;



$$\mathbf{c_1} = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma_1 = \mathbf{8{,}5}$$

$$\mathbf{c_2} = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma_2 = \mathbf{2{,}3}.$$



Im Bild sehen wir die beiden Lösungsdreiecke. Weil die Lösungsdreiecke in α und a übereinstimmen, ist der Umkreisdurchmesser $d = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ jedesmal gleich. Die Elementargeometrie sagt uns auch warum: β_1 und β_2 sind Umfangswinkel über der Sehne [AC] im Kreis k_1 beziehungsweise k_2. Wegen $\beta_2 = 180° - \beta_1$ müssen die Radien beider Kreise gleich sein.

Wenn man Winkel ($\neq 90°$) mit dem Sinussatz ausrechnet, so ergeben sich zunächst immer zwei Winkelwerte im Bereich $[0°; 180°[$. Brauchbar sind aber nur Ergebnisse, die der Bedingung genügen: Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber. Im Beispiel oben ist $b > a$, $\beta_1 > \alpha$ und $\beta_2 > \alpha$. Deswegen sind beide Ergebnisse auch Lösungen.

Jetzt vertauschen wir die Längen von a und b.

2. Beispiel: Im Dreieck ABC ist $\alpha = 25°$, $a = 6$ und $b = 4$.
Wie groß sind c, β und γ?

Aus $\dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{a}$ folgt $\sin\beta = \dfrac{b}{a}\cdot\sin\alpha$, Werte eingesetzt: $\sin\beta = 0{,}281\,74\ldots$

Der Taschenrechner liefert $\hat{\beta} = 16{,}4°$.

Mögliche Werte sind $\beta_1 = 16{,}4°$ und $\beta_2 = 180° - 16{,}4° = 163{,}6°$.

Wegen $b < a$ muss aber $\beta < \alpha$ sein, und das ist nur für β_1 der Fall! (Dies sieht man auch durch Kontrolle der Innenwinkelsumme.)

Also gibt es nur die Lösung $\beta_1 = \beta = \mathbf{16{,}4°}$.

Aus der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich $\gamma = 180° - 16{,}4° - 25° = \mathbf{138{,}6°}$

Aus $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ folgt $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma = \mathbf{9{,}4}$.

Wenn von einem Dreieck die drei Seiten (**SSS**) oder zwei Seiten und der Zwischenwinkel (**SWS**) bekannt sind, dann findet man die restlichen Stücke mit dem Sinussatz nur mit großem Aufwand. In solchen Fällen springt der Kosinussatz ein.

Kosinussatz

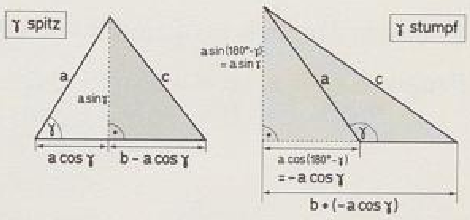
$$\boxed{\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{aligned}}$$

In Worten: Das Quadrat einer Seite ist so groß wie die Quadrate der beiden andern Seiten zusammen – vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten und des Kosinus ihres Zwischenwinkels.

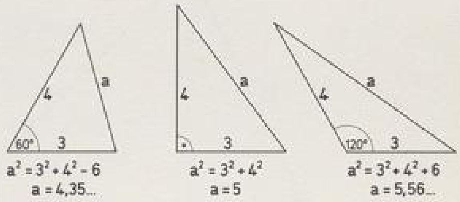
Beweis: Der Satz von PYTHAGORAS ergibt jeweils für das dunkle Dreieck

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \cdot \sin\gamma)^2 + (b - a \cdot \cos\gamma)^2 \\ &= a^2 (\sin\gamma)^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2 (\cos\gamma)^2 \\ &= a^2 \underbrace{[(\sin\gamma)^2 + (\cos\gamma)^2]}_{1} + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

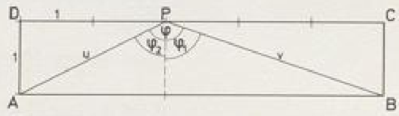
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$



Der Kosinussatz ist eng verwandt mit dem Satz von PYTHAGORAS, er ist der »Pythagoras für allgemeine Dreiecke«. Für $\gamma = 90°$ ersteht Pythagoras in alter Pracht! Für $\gamma \neq 90°$ korrigiert der Summand $-2ab\cos\gamma$ den Unterschied zum rechtwinkligen Dreieck.



Beispiel: Im Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $a = 5$ und $b = 1$ liegt ein Punkt P auf Seite [CD] im Abstand 2 von Ecke D. Wie groß ist der Winkel $\varphi = \sphericalangle APB$?



Wir lesen ab: $\tan\varphi_1 = 3$, also $\varphi_1 \approx 71{,}6°$
$\tan\varphi_2 = 2$, also $\varphi_2 \approx 63{,}4°$
$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \approx 135°$

Ist φ exakt 135°?
Entlocken wir dem Taschenrechner mehr Dezimalen

$\varphi_1 = 71{,}565\,051\,177\ldots°$
$\varphi_2 = 63{,}434\,948\,822\ldots°$, so ergibt sich
$\varphi = 134{,}999\,999\,999\ldots°$

Mit einem Rechner finden wir die Antwort nicht – auch nicht mit einem Großrechner! Wir wissen nämlich nicht, was nach der letzten angezeigten Dezimale noch kommt.
Da hilft nur noch der Kosinussatz.

Nach Pythagoras ist $u = \sqrt{5}$ und $v = \sqrt{10}$.
Im Dreieck ABP gilt $5^2 \ldots u^2 + v^2 - 2uv\cos\varphi$, also

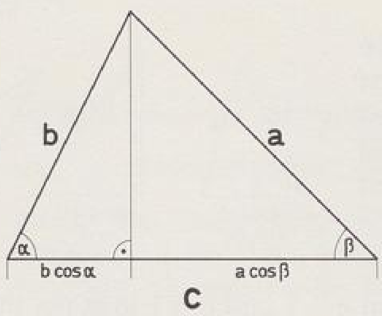
$$\cos\varphi = \frac{5 + 10 - 25}{2\sqrt{5}\,\sqrt{10}} = \frac{-10}{2 \cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

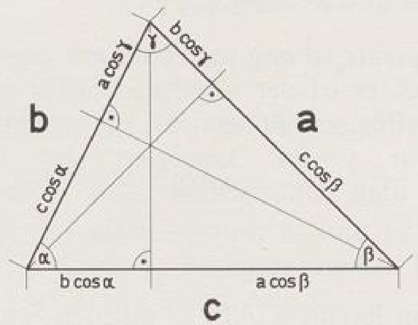
$\hat{\varphi} = 45°$, φ ist exakt gleich 135°.

Der Kosinus taucht immer dann auf, wenns um die senkrechte Projektion von Strecken geht. Bilden eine Gerade (oder Ebene) und eine Strecke s den Winkel φ, dann hat die senkrechte Projektion von s auf die Gerade die Länge $s \cos \varphi$.

In einem Dreieck projizieren wir zwei Seiten senkrecht auf die dritte; es ergibt sich der

Projektionssatz $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$
$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$
$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$





Der Projektionssatz gilt auch, wenn die Höhe außerhalb des Dreiecks liegt.
Mit dem Projektionssatz ist der Kosinussatz im Nu hergeleitet:

$$\begin{array}{lll|l}
c = a\cos\beta + b\cos\alpha \;\|\cdot(-c) & \Rightarrow -c^2 = & \quad\quad\quad\quad - ac\cos\beta - bc\cos\alpha & \\
b = a\cos\gamma + c\cos\alpha \;\|\cdot(-b) & \Rightarrow -b^2 = & -ab\cos\gamma \quad\quad\quad - bc\cos\alpha & \\
a = b\cos\gamma + c\cos\beta \;\|\cdot a & \Rightarrow \quad a^2 = & \;\; ab\cos\gamma + ac\cos\beta & + \\
\hline
 & a^2 - b^2 - c^2 = & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad - 2bc\cos\alpha & \\
 & \mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} & &
\end{array}$$

Mit $c \cos \alpha = b_c$ (Projektion von c auf b) geht der Kosinussatz über in $a^2 = b^2 + c^2 - 2bb_c$, das ist der verallgemeinerte Pythagoras – vielleicht hast du ihn in der 9. Klasse kennen gelernt.

Aufgaben zu 6.1

1. Was kannst du über die Lage der Punkte $P(r\cos\varphi \mid r\sin\varphi)$ sagen?

2. Der Punkt P liegt auf dem Einheitskreis. Bestimme die fehlende Koordinate.

a) $P\left(\frac{1}{2}\middle| y\right)$ **b)** $P\left(x\middle| -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ **c)** $P\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\middle| y\right)$

d) $P(\cos 90° \mid y)$ **e)** $P(x \mid \sin 135°)$ **f)** $P\left(x\middle| -\frac{1}{2}\right)$

g) $P(\cos 135° \mid y)$ **h)** $P(x \mid -1)$

3. Berechne durch Zurückführung auf spitze Winkel:

a) $\sin 120°$ **b)** $\cos 150°$ **c)** $\tan 135°$
d) $\sin 315°$ **d)** $\cos 360°$ **f)** $\tan 330°$
g) $\sin 240°$ **h)** $\cos 225°$ **i)** $\tan 210°$
j) $\sin 330°$ **k)** $\cos 300°$ **l)** $\tan 360°$
m) $\sin 225°$ **n)** $\tan 315°$ **o)** $\cos 240°$

4. Berechne durch Zurückführung auf spitze Winkel:

a) $\sin 1110°$ **b)** $\cos 1110°$ **c)** $\tan 1110°$
d) $\sin 36045°$ **e)** $\cos 36045°$ **f)** $\tan 36045°$
g) $\sin 100\pi$ **h)** $\cos 100\pi$ **i)** $\tan 100\pi$
j) $\sin\left(-\frac{201}{4}\pi\right)$ **k)** $\cos\left(-\frac{201}{4}\pi\right)$ **l)** $\tan\left(-\frac{201}{4}\pi\right)$

5. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für $\varphi \in \mathbb{R}$ im Grad- und Bogenmaß:

a) $\sin\varphi = -1$ **b)** $\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **c)** $\tan\varphi = 1$

d) $\sin\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **e)** $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ **f)** $\tan\varphi = -\sqrt{3}$

g) $\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **h)** $\cos\varphi = 1$ **i)** $\tan\varphi = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

j) $\cos\varphi = -1$ **k)** $\cos\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **l)** $\tan\varphi = -1$

6. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für $\varphi \in [0; 2\pi[$:

a) $\sin\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **b)** $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ **c)** $\tan\varphi = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

d) $\sin\varphi = 1$ **e)** $\cos\varphi = -1$ **f)** $\tan\varphi = 1$

g) $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$ **h)** $\cos\varphi = \frac{1}{1}\sqrt{2}$ **i)** $\tan\varphi = -\sqrt{3}$

j) $\sin(-\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **k)** $\cos(\pi - \varphi) = \frac{1}{1}\sqrt{3}$ **l)** $\tan(-\varphi) = \frac{1}{1}\sqrt{3}$

7. Berechne $\varphi \in [0°; 360°]$ auf 0,1° genau:

a) $\sin\varphi = 0{,}8$ **b)** $\cos\varphi = -0{,}95$ **c)** $\tan\varphi = 4$

d) $\sin\varphi = -0{,}2$ **e)** $\cos\varphi = 0{,}6$ **c)** $\tan\varphi = -1{,}7$

8. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für $\varphi \in [0; 2\pi[$:

a) $6(\sin\varphi)^2 + \sin\varphi = 4\sin\varphi$

b) $(\sin\varphi - \sqrt{3})(2\cdot\cos\varphi - \sqrt{2}) = 0$

c) $2(\sin\varphi)^2 = 3 + 3\cos\varphi$

d) $(\tan\varphi)^2 = 3$

e) $(\sin\varphi - 1)\tan\varphi = -\frac{1}{4}\cos\varphi$

9. Berechne $\tan\varphi$, wenn

a) $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ und φ spitz ist

b) $\cos\varphi = -\frac{5}{13}$ und $\varphi \in [90°; 180°]$ ist.

10. Berechne $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, wenn $\tan\varphi = \frac{3}{4}$ und φ spitz ist.

11. Berechne für den spitzen Winkel φ, den $\cos\varphi$ und $\tan\varphi$, wenn gilt

a) $\sin\varphi = \frac{40}{41}$ **b)** $\sin\varphi = \frac{3}{5}$.

12. α, β und γ sind die Innenwinkel eines Dreiecks. Vereinfache:

a) $\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

b) $\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2$

c) $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta+\gamma}{2}$

d) $\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 + \tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$

13. α, β, γ und δ sind die Innenwinkel einer Raute. Vereinfache:

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta$

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta$

14. Berechne (Fallunterscheidung) für $z \in \mathbb{Z}$:

a) $\sin\left(z\frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $\cos(z\pi)$ **c)** $\tan\left(z\frac{\pi}{3}\right)$

15. Bestimme die fehlenden Werte (Fallunterscheidungen!)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin\alpha$	0,6	$-\frac{1}{2}$		$-\sqrt{0,5}$			
$\cos\alpha$			$\frac{5}{12}$		$-\sqrt{0,75}$		
$\tan\alpha$						$-1,827$	$2+\sqrt{3}$

16. Auf Seite 110 siehst du eine Tabelle, in der die Verwandtschaftsverhältnisse von sin, cos und tan für einen Winkel des I. Quadranten dargestellt sind. Mache die analoge Tabelle für einen Winkel des

a) II. Quadranten **b)** III. Quadranten **c)** IV. Quadranten

17. Berechne die kartesischen Koordinaten

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
r	6	0,6	10	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$	0
φ	30°	135°	240°	π	$0,75\,\pi$	$\frac{1}{2}$	1

18. Berechne die Polarkoordinaten

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
x	3	12	-15	-7	1	$\sqrt{3}$	0
y	4	-5	8	-24	1	-1	1

19. Berechne die Polarkoordinaten der Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks im Einheitskreis mit Startecke $(1|0)$ für

a) $n=3$ **b)** $n=4$ **c)** $n=6$ **d)** $n=17$.

20. Zeichne punktweise die Kurve, deren Punkte der Gleichung genügen

a) $r=5$ **b)** $\varphi=210°$ **c)** $r=\varphi$ **d)** $r=5\sin\varphi$ **e)** $r=\dfrac{5}{\sin\varphi}$.

Aufgaben zu 6.2

Berechnungen

1. Berechne die fehlenden Winkel und Seitenlängen im Dreieck ABC

a) $c=6,\quad \alpha=50°,\quad \beta=65°$ **b)** $c=9,\quad a=7,\quad \gamma=110°$

c) $a=5,\quad b=8,\quad \alpha=30°$ **d)** $c=6,\quad b=3\sqrt{3},\quad \beta=60°$

2. Berechne die fehlenden Winkel und Seitenlängen im Dreieck ABC.

a) $c = 10, \quad b = 6, \quad \alpha = 40°$ **b)** $c = 8, \quad b = 5, \quad a = 6$

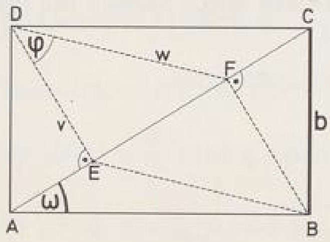
c) $a = 16{,}5, \quad b = 22, \quad c = 27{,}5$ **d)** $a = 8, \quad b = 4\sqrt{2}, \quad \beta = 45°$

3. Berechne die restlichen Stücke und den Flächeninhalt vom Dreieck ABC.

a) $r = 8, \quad \beta = 73°, \quad \alpha = 44°$ (r ist Umkreisradius)

b) $c = 6, \quad h_a = 5, \quad \gamma = 73°$

4. RECHTECK
Vom Rechteck ABCD sind b und ω bekannt.



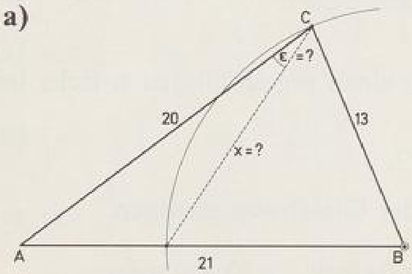
a) Drücke den Flächeninhalt des Rechtecks mit b und ω aus.

b) Drücke die Seiten und den Flächeninhalt des Parallelogramms EBFD mit b und ω aus.

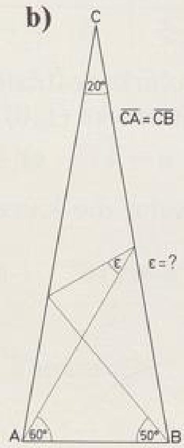
c) Berechne φ, falls $\omega = 31{,}75°$ ist.

d) Bei welchem Seitenverhältnis $b : a$ des Rechtecks ist $\varphi = 45°$? (Tip: Ersetze sin und cos durch Seitenverhältnisse.)

5. a)



b)



6. Wie lautet der Sinussatz für

a) ein bei C rechtwinkliges Dreieck?

b) ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze C?

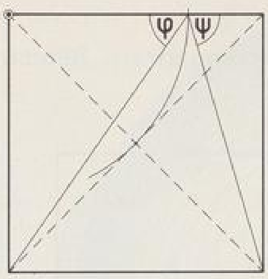
7. In einem Parallelogramm ABCD ist $a = 7$, $d = 4$ und $\alpha = 55°$. Wie lang sind die Diagonalen?

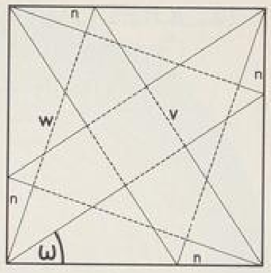
8. In einem Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ ist $a = 10$, $b = 5$, $c = 4$ und $d = 6$. Wie groß sind die Innenwinkel?

9. QUADRATE
Beide Quadrate haben die Seitenlänge 1.

a) Berechne φ und ψ.

b) Gegeben ist ω.

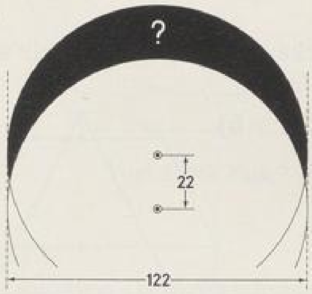
a) 

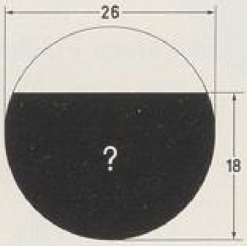
b) 

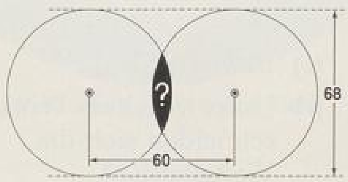
α) Berechne v und w in Abhängigkeit von ω.

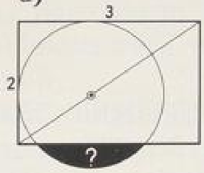
β) Warum sind die gestrichelten Figuren Quadrate?

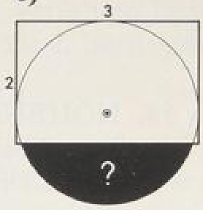
γ) Wie groß ist ω, wenn die gestrichelten Quadrate flächengleich sind?

10. a) 

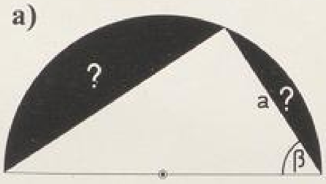
b) 

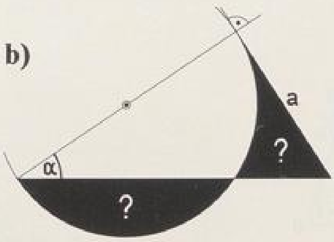
c) 

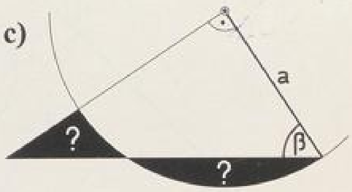
d) 

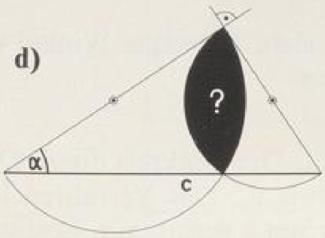
e) 

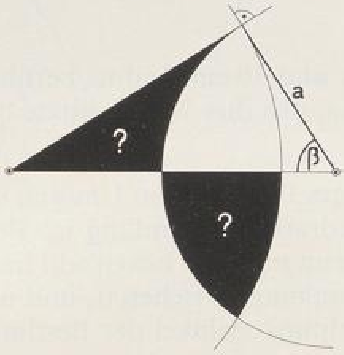
11. KREIS & DREIECK
Berechne die Inhalte der schwarzen Flächenstücke aus den angegebenen Seiten und Winkeln.

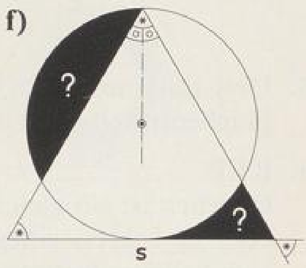
a) 

b) 

c) 

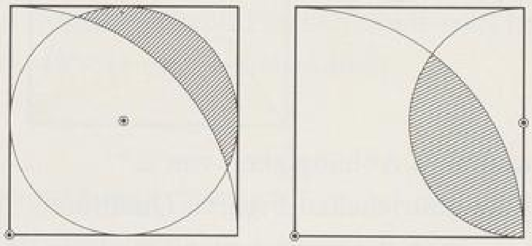
d) 



f) 

12. KREIS & QUADRAT

Gegeben sind die Einheitsquadrate. Berechne Inhalt und Umfang der schraffierten Flächenstücke.

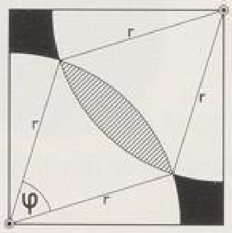


13. FLÄCHENGLEICH

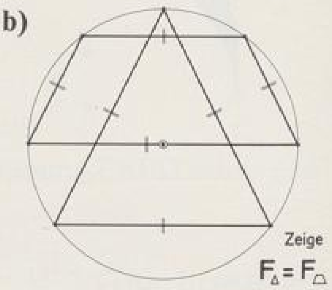
a) Im Quadrat sind die beiden schwarzen Flächenstücke zusammen so groß wie das schraffierte Linsenstück,

α) Bestimme φ.

β) Unter welchem Winkel σ schneiden sich die Viertelkreise?

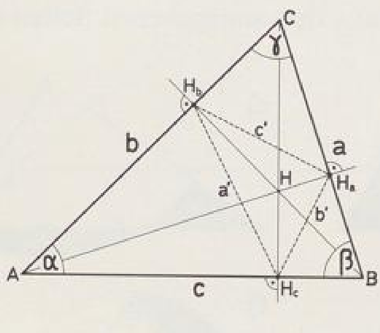


b)



14. HÖHENFUSSPUNKT-DREIECK

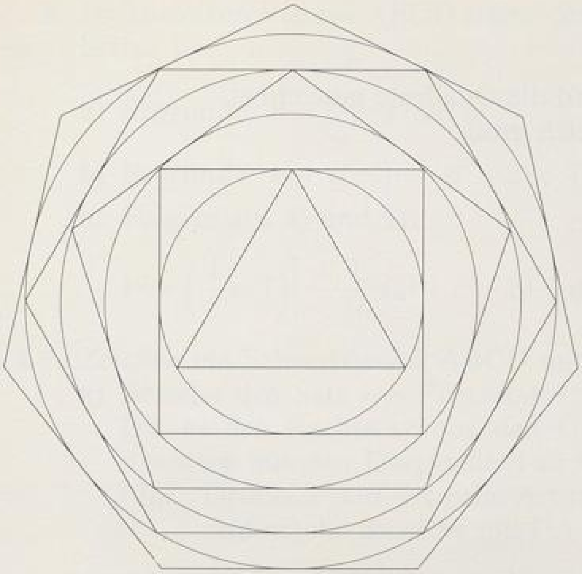
Berechne die Seitenlängen, Winkelmaße und den Flächeninhalt des Höhenfußpunkt-Dreiecks aus a, b, c, α, β und γ.



15. Drei Bälle mit 6 cm, 8 cm und 10 cm Radius berühren sich. Berechne Winkel und Flächeninhalt des Dreiecks, das ihre Mittelpunkte bilden.

16. KEP

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck vom Umfang $u_3 = 1$. Der Umkreis dieses Dreiecks ist Inkreis eines Quadrats vom Umfang u_4. Berechne u_4. Das Verfahren lässt sich beliebig fortsetzen, wenn man die Eckenzahl immer um 1 vergrößert. Bestimme den allgemeinen Zusammenhang zwischen u_n und u_{n+1}.
(Tip: Verwende den Mittelpunktswinkel des Bestimmungsdreiecks.)



Vom 3-Eck zum 7-Eck

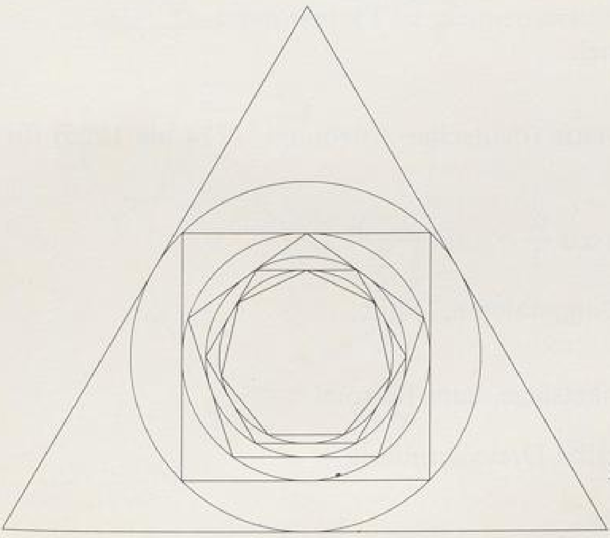
Vom 3-Eck zum 100 000-Eck

17. LER

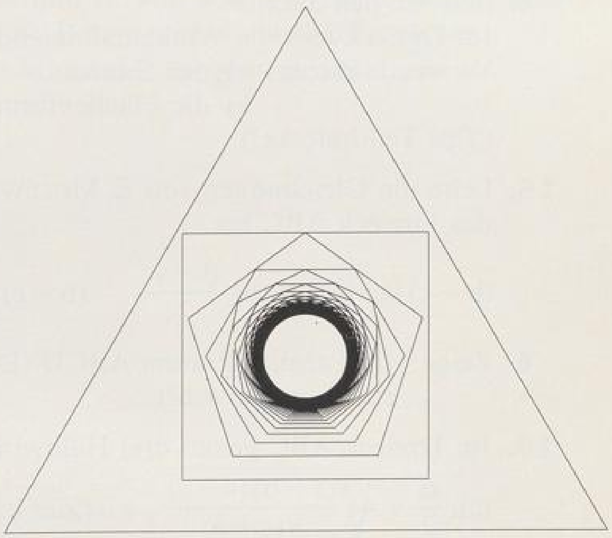
Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck vom Umfang $u_3 = 1$. Der Inkreis dieses Dreiecks ist Umkreis eines Quadrats vom Umfang u_4. Berechne u_4. Das Verfahren lässt sich beliebig fortsetzen, wenn man die Eckenzahl immer um 1 vergrößert. Bestimme den allgemeinen Zusammenhang zwischen u_n und u_{n+1}.

(*Tip*: Verwende den Mittelpunktswinkel des Bestimmungsdreiecks.)

Der deutsche Mathematiker und Astronom Johannes KEPLER (Weil der Stadt 1571 bis 1630 Regensburg) versuchte mit einer solchen Konstruktion die Verhältnisse der Radien der Planetenbahnen auf regelmäßige Vielecke zurückzuführen. Sein Versuch ist gescheitert.



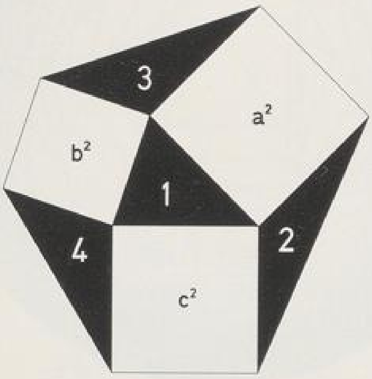
3-Eck zum 7-Eck



3-Eck zum 100 000-Eck

Beweise

1. FLÄCHENGLEICH
Über den Seiten eines Dreiecks ABC sind die Quadrate gezeichnet.
Zeige: Die numerierten Flächen sind gleich groß.



2. Beweise die Formeln für das Dreieck ABC mit Umkreisradius r.
a) $h_c = 2r \sin\alpha \sin\beta$
b) $F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ **c)** $F = \dfrac{abc}{4r}$

⁝ 3. Beweise den **Tangenssatz:**
Die Differenz zweier Dreieckseiten verhält sich zur Summe (dieser Seiten) wie der Tangens der halben Differenz der Gegenwinkel (dieser Seiten) zum Tangens der halben Summe dieser Winkel.

4. Beweise den Satz:
Im Dreieck teilt die Winkelhalbierende eine Seite im Verhältnis der beiden andern.
Verwende dazu: **a)** den Sinussatz
b) die Flächenformel.
(*Tip*: Teildreiecke!)

⁝ 5. Leite die Gleichungen von E. MOLLWEIDE (deutscher Astronom, 1774 bis 1825) für das Dreieck ABC her.

$$(b+c)\sin\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \qquad (b-c)\cos\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

6. Zeige: Im Parallelogramm ABCD (Diagonalen e, f) gilt:
$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

⁝ 7. Im Dreieck ABC gelten drei Halbwinkelsätze, zum Beispiel
$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, s ist der halbe Dreieckumfang.
a) Wie lauten die beiden andern Sätze?
b) Beweise den obigen Satz.

8. Im konvexen Viereck ABCD schneiden sich die Diagonalen e und f unter dem Winkel φ.

a) Begründe: $F = \frac{1}{2} e \cdot f \cdot \sin\varphi$

b) Begründe: $a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos\varphi$

c) Folgere aus **a)** und **b)**:

$$F^2 = \left(\frac{1}{2} e \cdot f\right)^2 - \frac{1}{16}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2$$

⁚9. Zeichne ein Sehnenviereck ABCD mit den Diagonalen e und f.

a) Beweise den Satz von PTOLEMAIOS:
Die beiden Rechtecke aus den Gegenseiten sind zusammen so groß wie das Rechteck aus den Diagonalen: $ac + bd = ef$.
(*Tip*: Drücke e^2 auf doppelte Art mit dem Kosinussatz aus und eliminiere $\cos\beta$ und mache dasselbe mit f^2.)

b) Beweise: $\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$

10. a) Beweise die Formel für den Inkreisradius ϱ im Dreieck ABC

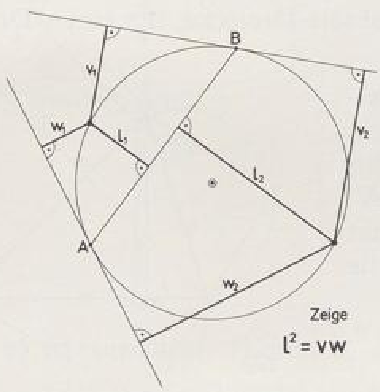
$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

s ist der halbe Dreiecksumfang. (*Tip*: Halbwinkelsatz!)

b) Begründe mit **a)** die Formel von HERON für die Dreieckfläche F

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

⁝11. GEOMETRISCHES MITTEL
Zwei Geraden berühren einen Kreis in A und B. Von einem Kreispunkt fällt man das Lot l auf die Berührsehne [AB] und die Lote v und w auf die Tangenten.
Zeige: Das Sehnenlot l ist geometrisches Mittel der Tangentenlote $l = \sqrt{vw}$.

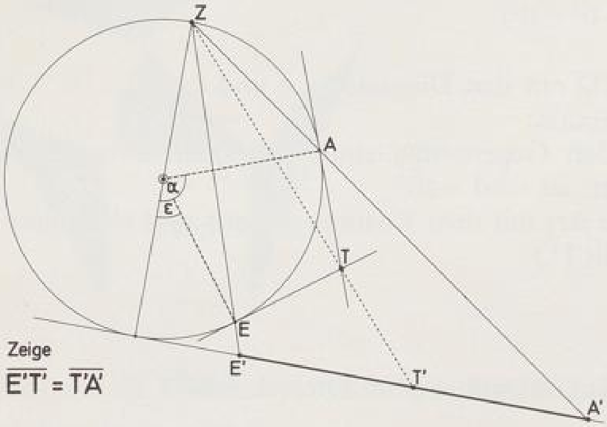


12. PROJEKTION

Vom Endpunkt Z eines Kreisdurchmessers ($d = 2$) aus projiziert man zwei Kreispunkte A und E auf die Gerade, die den Kreis im andern Endpunkt des Durchmessers berührt: Die Projektionen sind A′ und E′. Die Kreistangenten durch A und E schneiden sich in T.

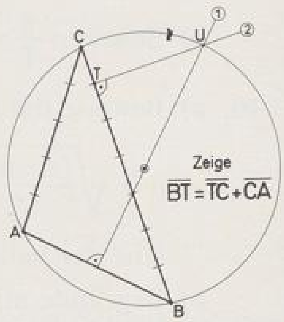
a) Berechne die Länge von [A′E′] in Abhängigkeit von α und ε.

b) Zeige: Die Projektion T′ von T auf die Tangente halbiert die Strecke [A′E′].



13. BERUNI

Die Mittelsenkrechte m_{AB} einer Dreieckseite schneidet den zugehörigen längeren Umkreisbogen in U; das Lot durch U auf der Dreieckseite a hat den Lotfußpunkt T.



Beweise den Satz von Abu-r-Raihan Mohammed ibn al-Beruni (persischer Astrologe, Mathematiker, Geograf, Mineraloge, Religionswissenschaftler, 973 bis nach 1050):

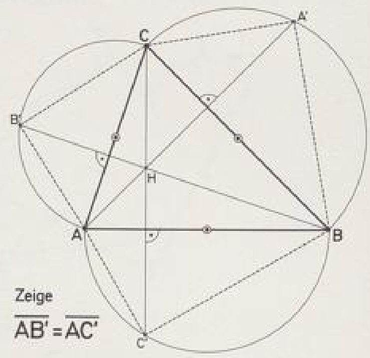
T halbiert den Streckenzug [ABC].

14. PYRAMIDE

a) Zeige: Zwei (gestrichelte) Katheten der Thaleskreis-Dreiecke, die einen Dreieckpunkt gemeinsam haben, sind gleich lang.

b) Wegen **a)** bilden die drei rechtwinkligen Dreiecke zusammen mit dem Dreieck ABC das Netz einer Pyramide ABCS: Klappt man die rechtwinkligen Dreiecke hoch, dann treffen sich A′, B′ und C′ in der Spitze S. Der Höhenfußpunkt H ist dann die senkrechte Projektion von S in die Dreieckebene.

Berechne die Höhe dieser Pyramide aus a, b, c, α, β und γ des Grundflächendreiecks.



Näherungen

Bei einigen Konstruktionsaufgaben waren sich die Geometer lange Zeit nicht im Klaren, ob die Ausführung allein mit Zirkel und Lineal, die klassische Konstruktion also, möglich sei. In die Geschichte eingegangen sind die berühmten Probleme:

Würfelverdopplung:
Wie konstruiert man zu einem gegebenen Würfel die Kantenlänge eines andern Würfels, der doppelten Rauminhalt hat?

Winkeldrittlung:
Wie konstruiert man den dritten Teil eines Winkels?

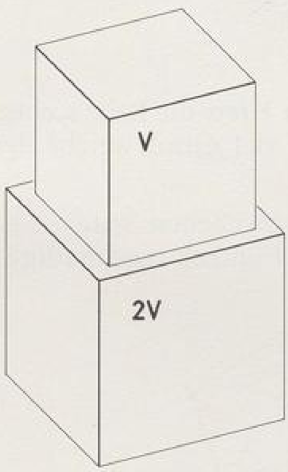
Rektifikation des Kreises:
Wie konstruiert man eine Strecke, die so lang ist wie ein gegebener Kreis?
Wie konstruiert man eine Strecke, die so lang ist wie ein gegebener Kreisbogen?

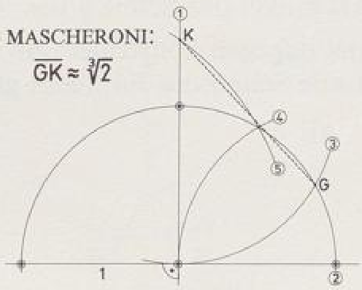
Quadratur des Kreises
Wie konstruiert man ein Quadrat, das einem gegebenen Kreis flächengleich ist?

Wir wissen heute, dass diese Probleme allgemein klassisch nicht lösbar sind. Alle Konstruktionen zu diesem Thema sind zwar keine Lösungen im geometrischen Sinn, sie verkennen nämlich die Lösungsidee, wohl aber sind sie Lösungen für den Praktiker, den Baumeister, den Ingenieur. Man nennt sie deshalb Näherungskonstruktionen. Mit ihnen erreicht man oft eine Genauigkeit, die die Zeichnung von der angestrebten Figur fürs Auge ununterscheidbar macht.

1. WÜRFELVERDOPPLUNG
   Von den beiden Würfeln hat der untere doppelt so großes Volumen wie der obere. Der obere Würfel hat die Kantenlänge 1.

   a) Berechne die Kantenlänge des unteren Würfels.

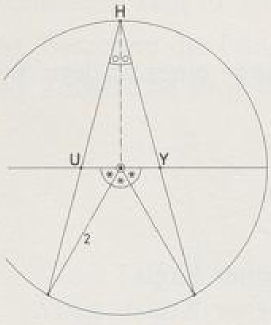




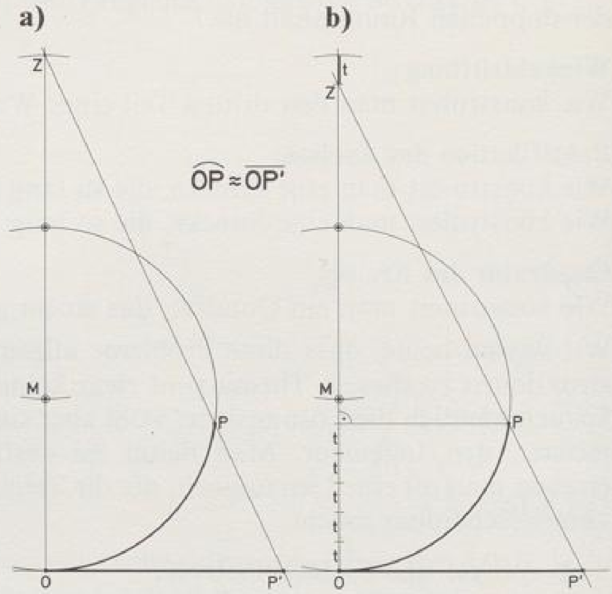
   b) MASCHERONI (Lorenzo, italienischer Mathematiker und Lyriker, Castagnetto 1750 bis 1800 Paris) hat eine Konstruktion angegeben, die den Wert $\sqrt[3]{2}$ sehr gut annähert.
   Berechne die Länge von [GK]. Um wie viel Prozent weicht sie vom exakten Wert ab?

2. π

Huygens (Christiaan, niederländischer Physiker und Mathematiker, Den Haag 1629 bis 1695 Den Haag) hat eine Näherungskonstruktion für π angegeben. Berechne die Länge des Streckenzugs [HUY]. Um wie viel Prozent weicht sie von π ab?



$\overline{HU} + \overline{UY} \approx \pi$



• 3. ABWICKLUNG

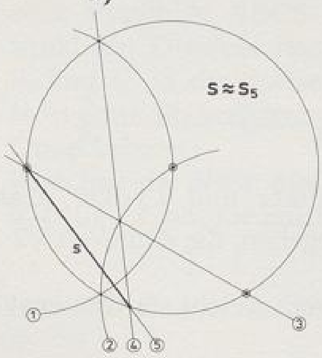
Nikolaus von Kues (deutscher Philosoph und Theologe, Kues an der Mosel 1401 bis 1464 Todi) und Lambert (Johann Heinrich, deutscher Philosoph, Mathematiker und Physiker, Mülhausen [Elsass] 1728 bis 1777 Berlin) haben eine Strecke konstruiert, die etwa genau so lang ist wie ein gegebener Kreisbogen (Einheitskreis).
Wie lang ist der Kreisbogen OP, wenn der zugehörige Mittelpunktswinkel OMP 30°, 60°, 90° ist? Um wie viel Prozent weicht jeweils die Länge von [OP'] von der des entsprechenden Bogens ab? (Additionstheorem nötig!)

• 4. FÜNFECK

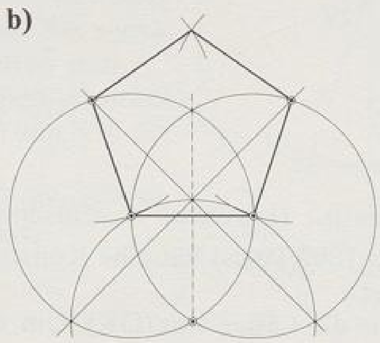
a) Leonardo da Vinci konstruiert in einen gegebenen Kreis die Seite s eines fast regelmäßigen Fünfecks in fünf Schritten. Um wie viel Grad weicht der Mittelpunktswinkel der Sehne s von 72° ab?

b) Dürer dagegen konstruiert ein Fünfeck aus einer gegebenen Seite.
Sind alle Seiten des Fünfecks gleich lang? Ist das Fünfeck regelmäßig?

a)



b)

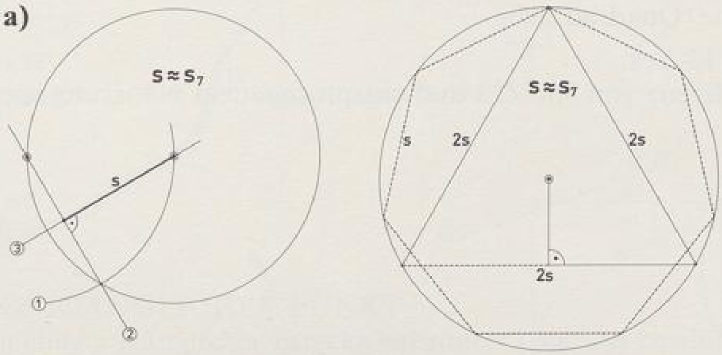


• 5. SIEBENECK

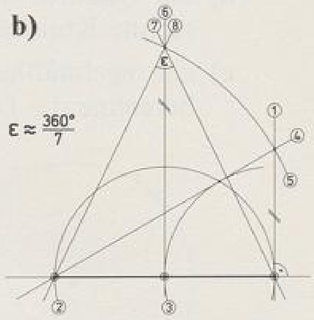
a) LEONARDO DA VINCI konstruiert in einen gegebenen Kreis die Seite s eines fast regelmäßigen Siebenecks in drei Schritten. Um wie viel Grad weicht der Mittelpunktswinkel der Sehne s von 360°/7 ab?

b) Berechne den Unterschied von 360°/7 und ε.

a)



b)

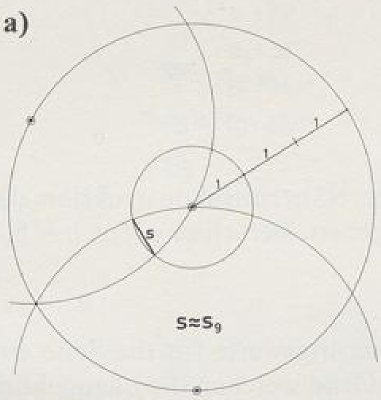


• 6. NEUNECK

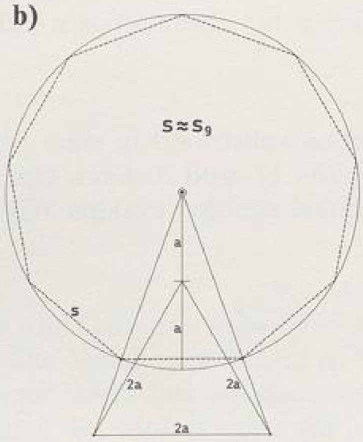
a) DÜRER konstruiert in einen Kreis mit r = 1 die Seite s eines regelmäßigen Neunecks. Um wie viel Grad weicht der Mittelpunktswinkel der Sehne s von 40° ab?

b) Um wie viel Grad weicht der zu s gehörige Mittelpunktswinkel von 40° ab?

a)



b)



• 7. ELFECK

DÜRER nimmt 9/32 des Kreisdurchmessers als Näherungswert für ein diesem Kreis einbeschriebenes regelmäßiges Elfeck. Um wie viel Grad weicht der zu dieser Seite gehörige Mittelpunktswinkel von 360°/11 ab?

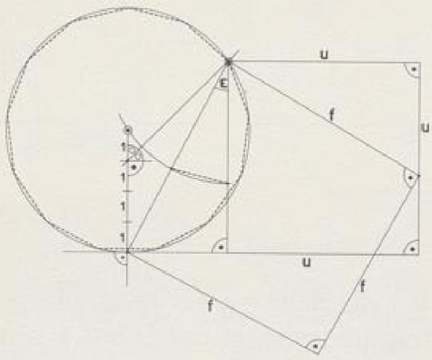
• **8.** WILLI

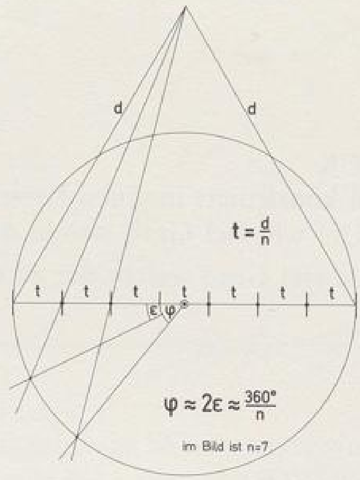
Von Ernst WILLI (Schweizer Bildhauer, geboren 1900) stammt eine dreifältige Näherungskonstruktion für

a) ein Quadrat (Seitenlänge u), das einem gegebenen Kreis umfanggleich ist, berechne Kreisumfang : Quadratumfang

b) ein Quadrat (Seitenlänge f), das einem gegebenen Kreis flächengleich ist, berechne Kreisfläche : Quadratfläche

c) ein regelmäßiges 13-Eck, berechne die Differenz von 360°/13 und entsprechendem Näherungswert ε.



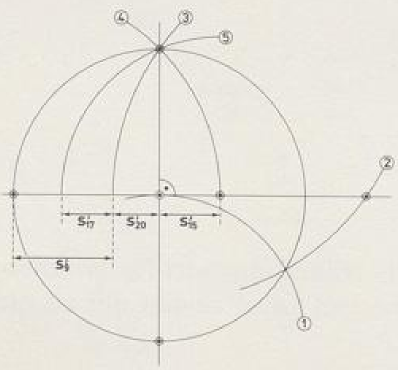


9. RENALDINI

RENALDINI (1615 bis 1698) hat eine allgemeine Näherungskonstruktion der Mittelpunktswinkel φ für regelmäßige n-Ecke angegeben. Berechne φ für n = 5, 7, 9 und 11.

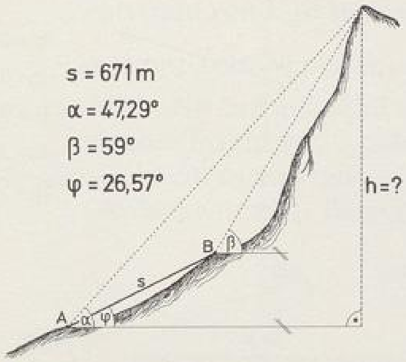
10. POSTULA

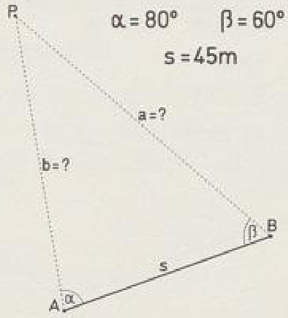
Henri POSTULA konstruiert in einer Figur Näherungswerte für die Seite eines regelmäßigen 9-, 15-, 17- und 20-Ecks. Um wie viel Grad weichen die dazugehörigen Mittelpunktswinkel von den exakten Winkeln ab?



Vermessung

1. HÖHENMESSUNG



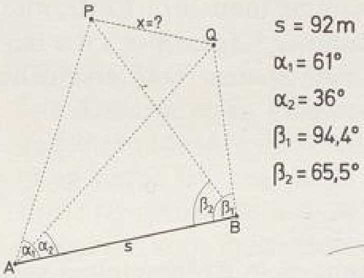


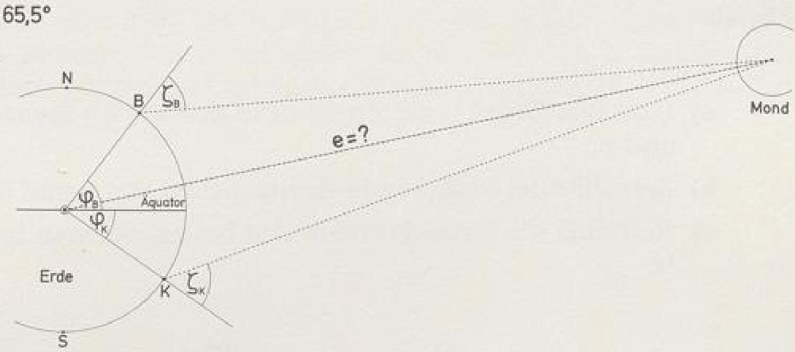
2. UNZUGÄNGLICHER PUNKT

Von einer zugänglichen Strecke bekannter Lage aus bestimmt man die Entfernungen eines unzugänglichen Punkts P.

3. UNZUGÄNGLICHE STRECKE

Von einer zugänglichen Strecke bekannter Lage aus bestimmt man die Länge einer unzugänglichen Strecke.





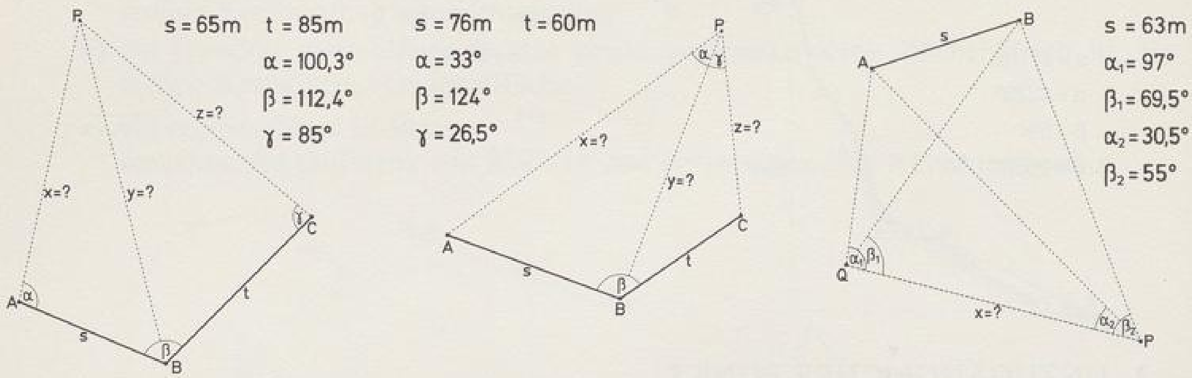
• 4. MONDENTFERNUNG

Die französischen Astronomen LALANDE und LACAILLE haben 1771 trigonometrisch die Entfernung e Mond–Erde ermittelt. Die Messungen fanden in Berlin und Kapstadt gleichzeitig statt. Berlin und Kapstadt liegen fast auf demselben Längenkreis. Gemessen wurde jeweils die Zenitdistanz ζ des Monds. ζ ist der Winkel zwischen Lot und Verbindungsstrecke Mond–Beobachter. Bestimme aus den Messwerten das Verhältnis Mondentfernung : Erdradius.

Berlin: $\varphi_B = 52°31'13''$ $\zeta_B = 41°15'44''$
Kapstadt: $\varphi_K = -33°55'15''$ $\zeta_K = 46°33'37''$
Erdradius: $r = 6370$ km

VORWÄRTSEINSCHNEIDEN

5. Von drei zugänglichen Punkten bekannter Lage aus bestimmt man die Entfernungen eines unzugänglichen Punkts P.



6. RÜCKWÄRTSEINSCHNEIDEN (Aufgabe von Snellius [1617] und Pothenot [1692])
Vom zugänglichen Punkt P aus bestimmt man die Entfernungen zu drei unzugänglichen Punkten A, B und C bekannter Lage.

7. Snellius–Hansen
Von zwei zugänglichen Punkten P und Q aus bestimmt man ihre Entfernung mit Hilfe der beiden zugänglichen Punkte A und B bekannter Lage. (Snellius hat diese Aufgabe gelöst in einem Buch, das 1627, ein Jahr nach seinem Tod, erschienen ist; Hansen hat die Aufgabe 1841 gelöst.)

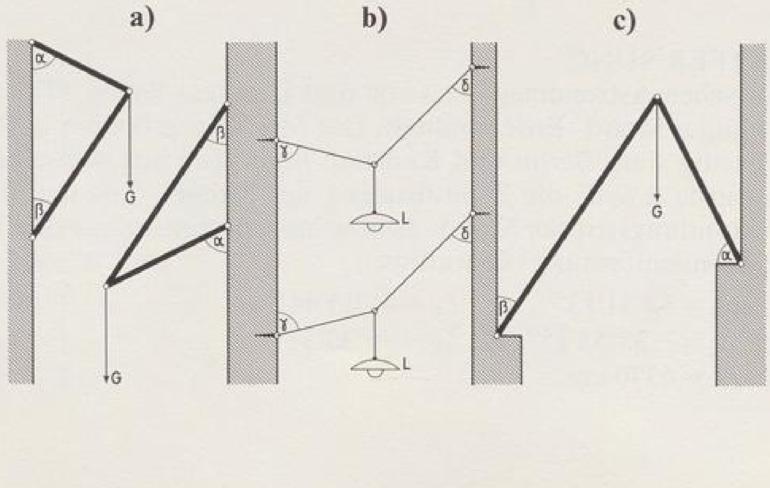
Physik

1. KRÄFTIG

a) Berechne Druck- und Zugkraft in den beiden Stangen in Abhängigkeit von G, α und β.

b) Berechne die Seilkräfte in Abhängigkeit von γ und δ und vom Lampengewicht L.

c) Berechne die Druckkräfte in den beiden Stangen in Abhängigkeit von G, α und β.

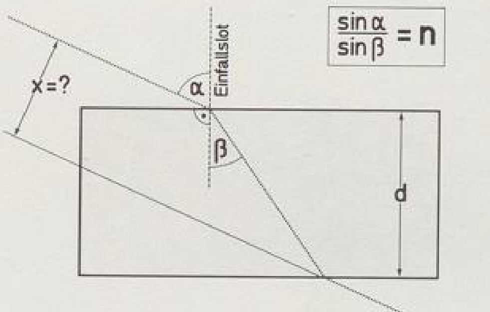


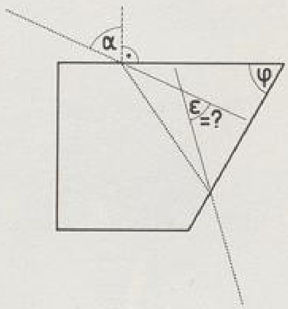
2. BRECHUNG

Snellius (Willebrord, niederländischer Mathematiker und Physiker, Leiden 1580 bis 1626 Leiden) hat das nach ihm benannte Brechungsgesetz gefunden. Wenn ein Lichtstrahl von Luft in einen Körper übergeht, gilt: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$; n heißt Brechzahl, sie hängt nur vom Material des Körpers ab.

a) Geht ein Lichtstrahl durch eine planparallele Glasplatte, so sind ein- und ausfallender Strahl um x parallel versetzt. Berechne x für $d = 30$ mm.

b) Geht ein Lichtstrahl durch ein Prisma, so bilden ein- und ausfallender Strahl den Ablenkwinkel ε. Berechne ε.





im Bild ist n=1,6 α=66° φ=60°

3. TONARM

Der Tonarm eines Plattenspielers ist dazu da, die Diamantspitze so in der Tonrille zu führen, dass beim Abtasten möglichst wenig Verzerrungen entstehen. Eine Bedingung dafür ist, dass Arm und Rille am Anfang (Außenradius $R = 15$ cm) und am Ende (Innenradius $r = 10$ cm) einen gleich großen Winkel ε bilden. In welcher Entfernung x vom Plattenloch muss ein 25 cm langer Tonarm seinen Drehpunkt haben?