UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

9. Kapitel Kegelschnitte

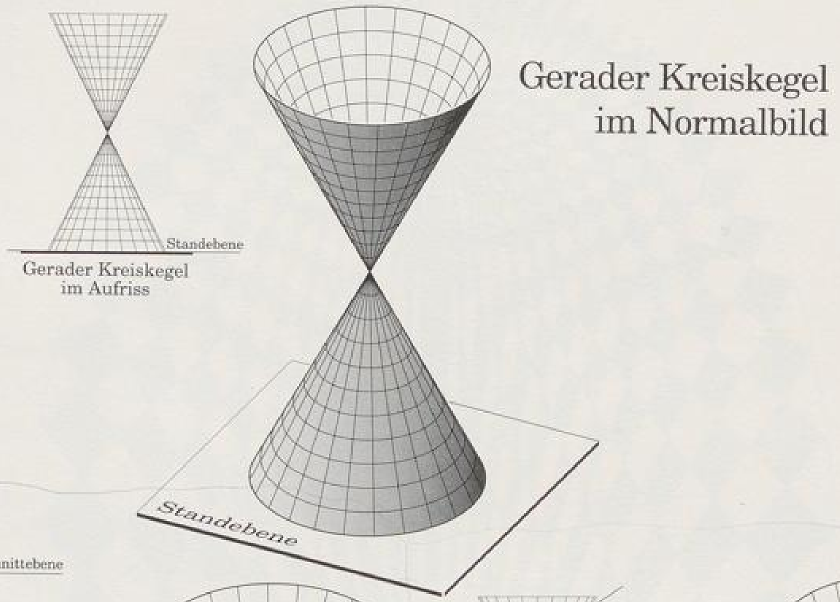
urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

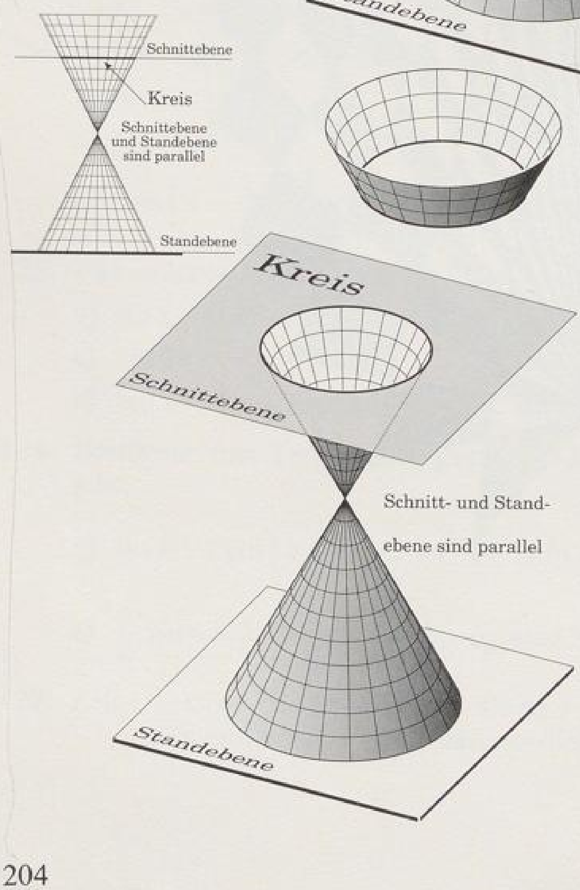
Visual Library

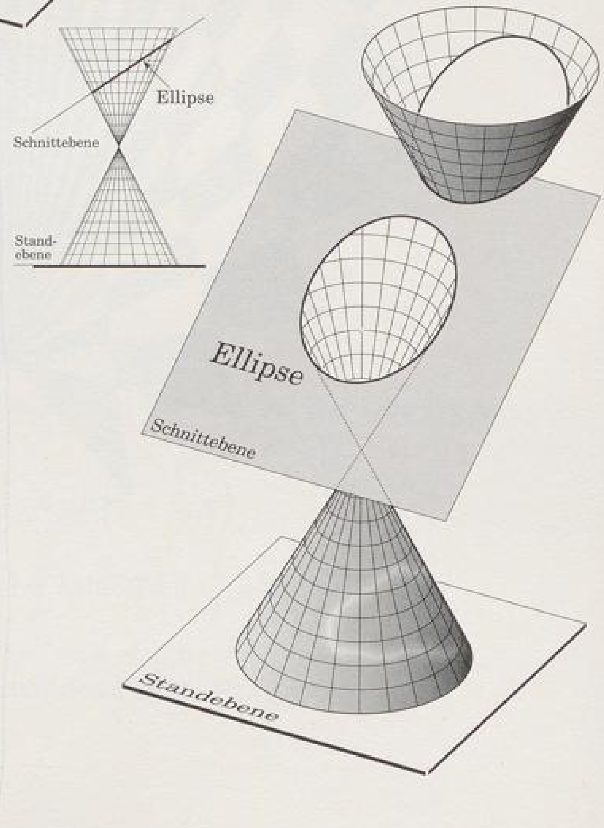
9. Kapitel
Kegelschnitte

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Schneidet man einen geraden Kreiskegel mit einer Ebene, so ergibt sich eine ebene Schnittkurve. Je nach Schnittrichtung entsteht
- eine geschlossene Kurve
- eine offene Kurve, die sich ins Unendliche erstreckt
- eine Kurve aus zwei Teilen, die sich ins Unendliche erstrecken.





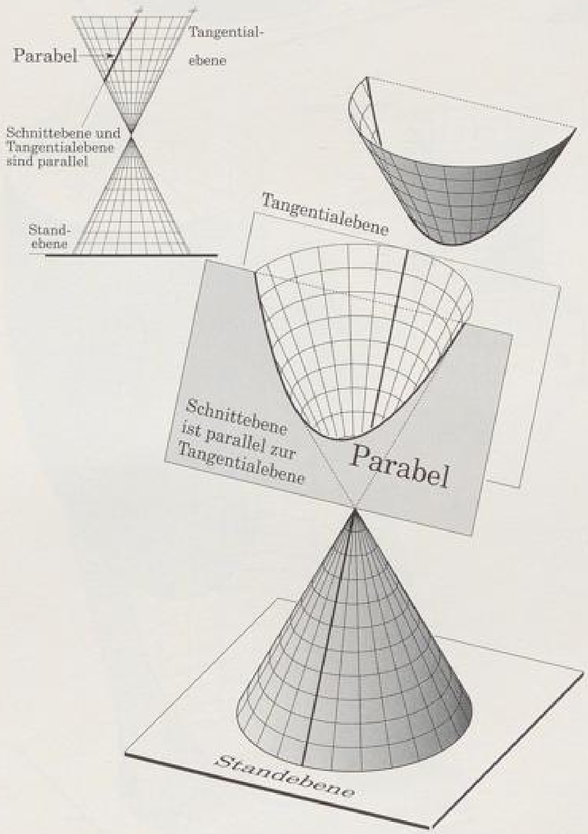


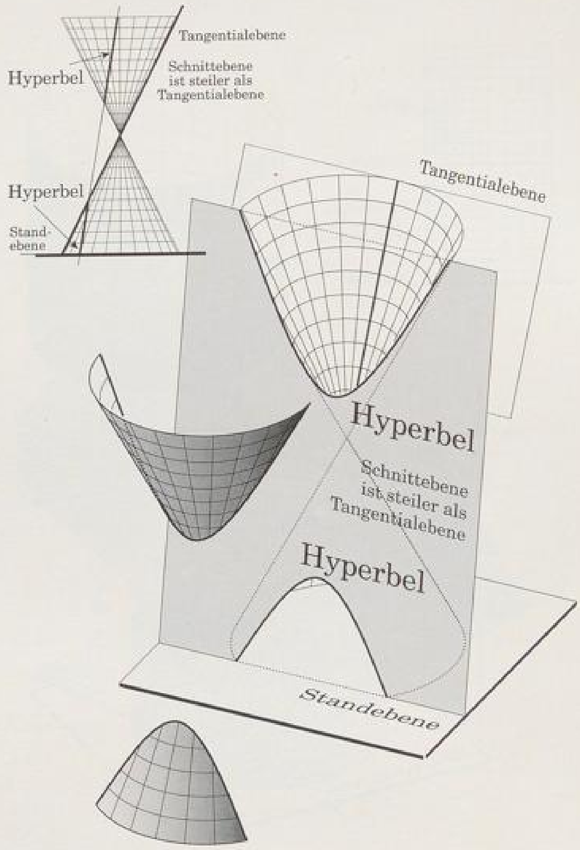
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Geschlossene Kurven sind **Ellipsen**, im Sonderfall **Kreise**. Offene Kurven sind **Parabeln** (einteilig) oder **Hyperbeln** (zweiteilig). Von alters her heißen solche Kurven **Kegelschnitte**.

Schon vor gut 2000 Jahren haben sich die griechischen Mathematiker mit diesen Kurven beschäftigt. APPOLONIOS (262 bis 190) war der erste, der sie als Schnitte von Kegeln und Ebenen erkannte. Die Faszination der Kegelschnitte hat sich bis heute erhalten. Keineswegs nur Mathematiker müssen über sie Bescheid wissen – auch Astronomen, Techniker, Baumeister, ja sogar Maler.
In unserer Umwelt begegnen wir ständig Kegelschnitten:
- Schattengrenze eines Lichtkegels auf einer ebenen Wand
- Bild eines Kreises, den man schräg anschaut
- täglicher Weg der Schattenspitze des Zeigers einer Sonnenuhr
- Bahn eines schräg geworfenen Balls (Springbrunnen)
- Bahnen von Himmelskörpern und Satelliten
- Grundrisse von Barockkirchen und Barockgärten
- gewölbte Spiegel in optischen Geräten.

Von Kegelschnitten ist neben dem Kreis die Ellipse die wichtigste Kurve. Deshalb nehmen wir sie uns als erste vor.



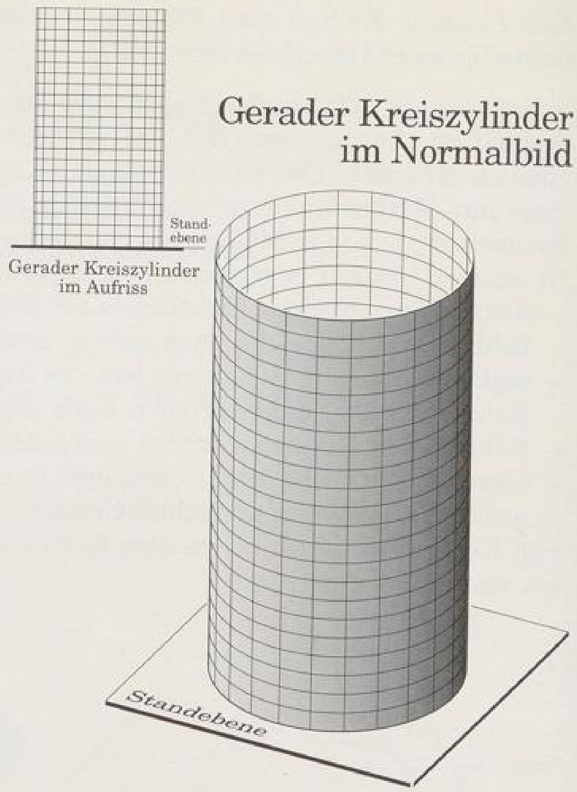


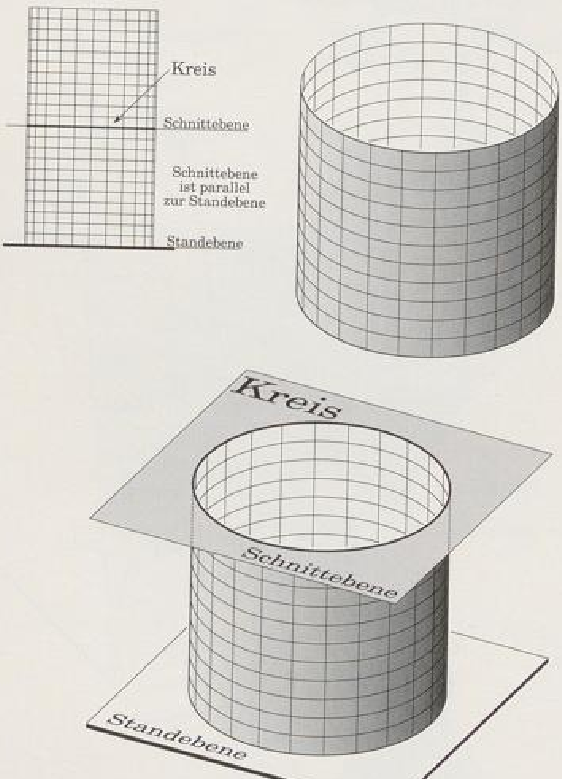
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

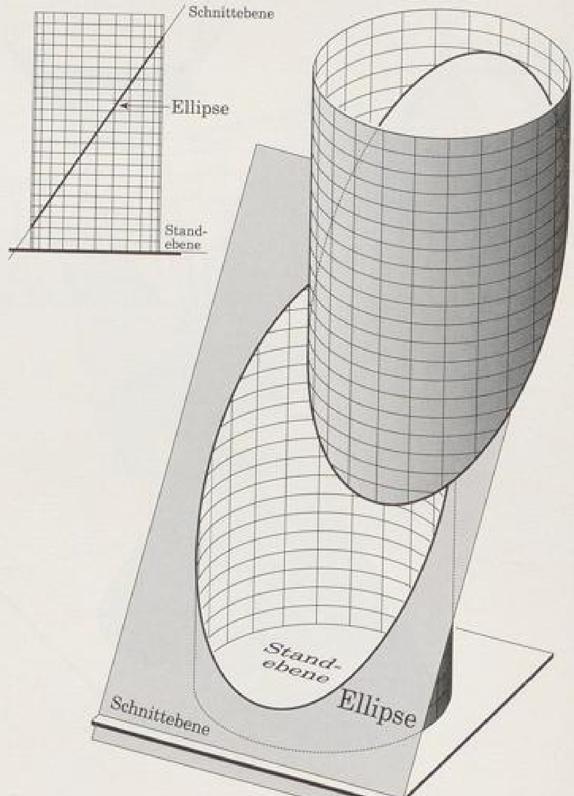
I. Die Ellipse

1. Die Ellipse als Zylinderschnitt

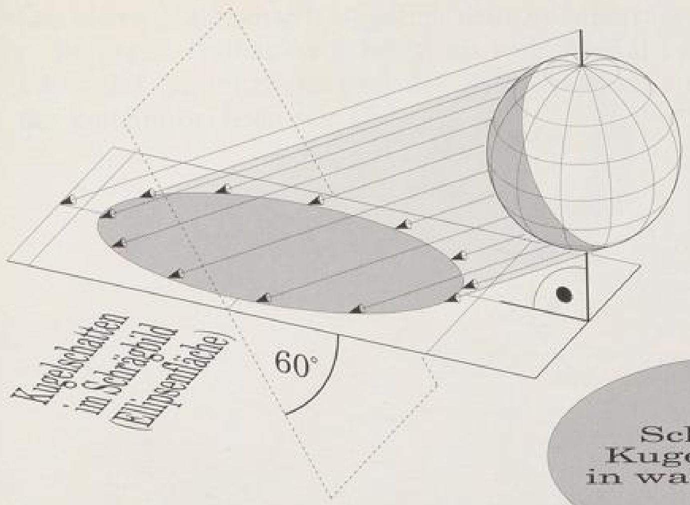
Kreis und Ellipse entstehen auch, wenn eine Ebene einen geraden Kreiszylinder schneidet. Steht die Schnittebene senkrecht auf der Zylinderachse und damit auf jeder Mantellinie, so entsteht ein Kreis; bei einem endlichen Zylinder ist die Schnittebene dann parallel zur Standebene. Ein schräger Schnitt liefert eine Ellipse. Auch der Schattenbereich einer Kugel im Parallellicht ist ein Kreiszylinder. Trifft der Schatten auf eine ebene Wand, so entsteht je nach Auftreffwinkel ein Kreis oder eine Ellipse.

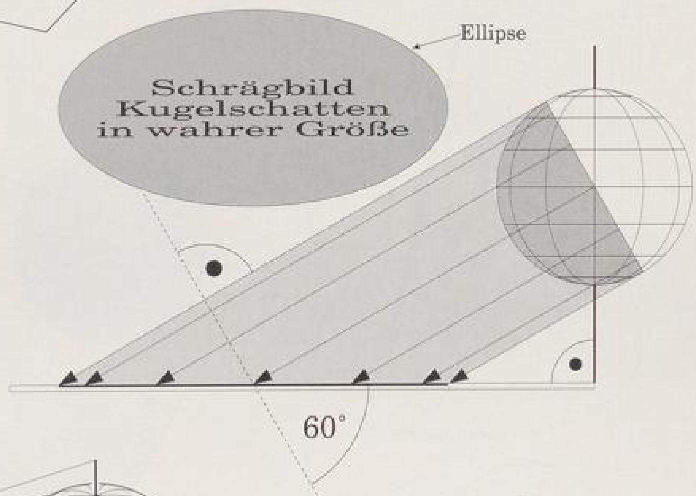


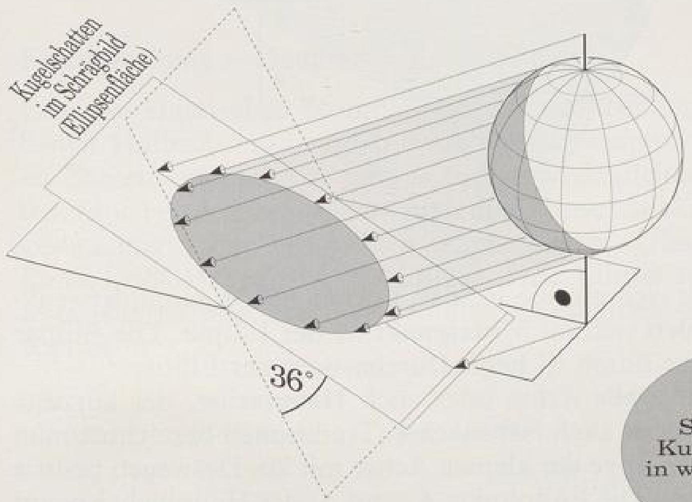


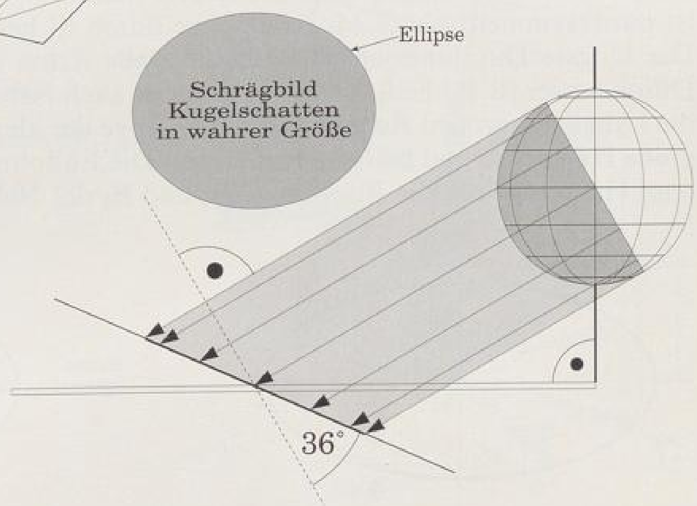


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

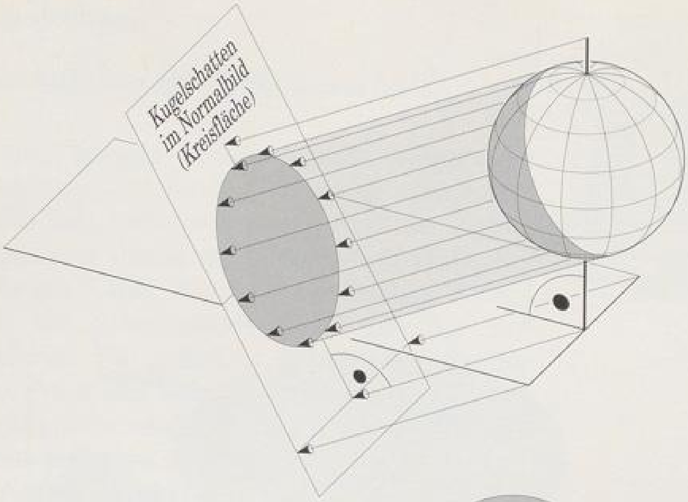


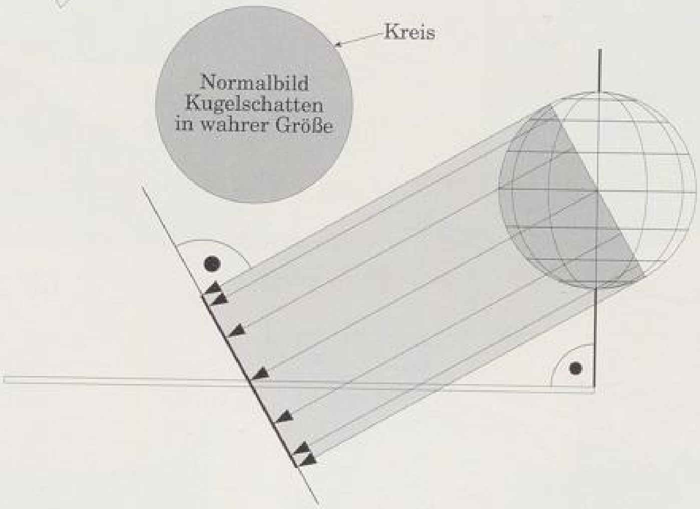




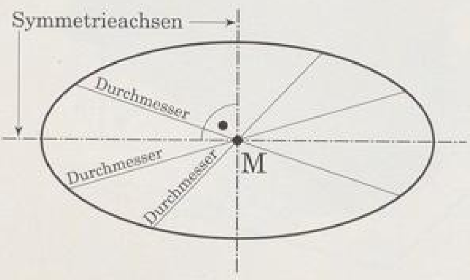


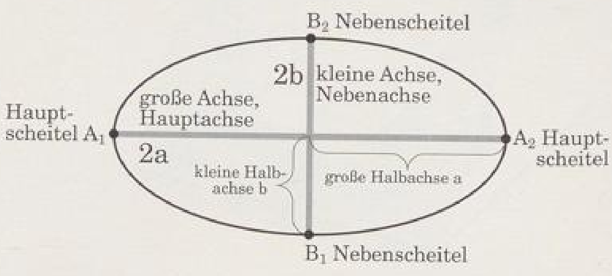
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN





Die Symmetrie des Zylinders überträgt sich auf die Ellipse. Sie hat zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, diese schneiden sich im **Mittelpunkt M** der Ellipse. Die Ellipse ist punktsymmetrisch zu M. Jede Sehne durch M heißt **Durchmesser** der Ellipse.
Der längste Durchmesser $[A_1A_2]$ heißt **große Achse** oder auch **Hauptachse**, der kürzeste Durchmesser $[B_1B_2]$ heißt **kleine Achse** oder auch **Nebenachse**. Traditionell bezeichnet man die Länge der großen Achse mit 2a, die Länge der kleinen Achse mit 2b. Deswegen heißt **a große Halbachse** und **b kleine Halbachse**. Die Endpunkte $\mathbf{A_1}$ und $\mathbf{A_2}$ der Hauptachse nennt man **Hauptscheitel**, die Endpunkte $\mathbf{B_1}$ und $\mathbf{B_2}$ der Nebenachse **Nebenscheitel**.

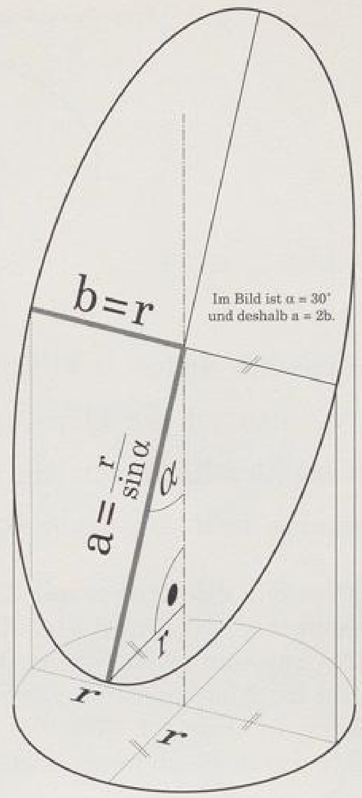




UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

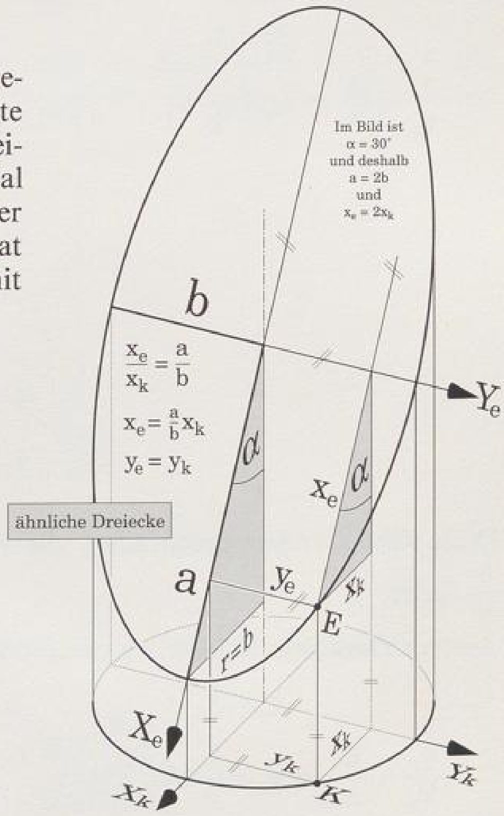
Die kleine Halbachse b ist gleich dem Zylinderradius r, die große Halbachse a hängt ab vom Winkel zwischen der Schnittebene und der Zylinderachse. Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$b = r \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{r}{a} \quad \text{also} \quad a = \frac{r}{\sin\alpha}$$



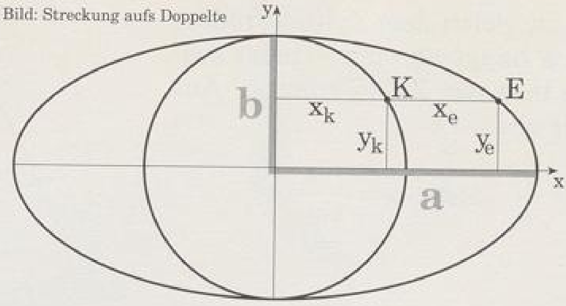
Kreisstreckung – Hauptkreis-Konstruktion

Eine der klassischen Grundaufgaben ist es, bei gegebenen Halbachsen a und b einzelne Ellipsenpunkte zu konstruieren. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine beruht darauf, dass man die Ellipse als axial gestauchten oder gestreckten Kreis deutet. Dieser Kreis heißt **Hauptkreis** der Ellipse. Jede Ellipse hat zwei Hauptkreise: einen mit Radius a und einen mit Radius b.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Im Bild: Streckung aufs Doppelte

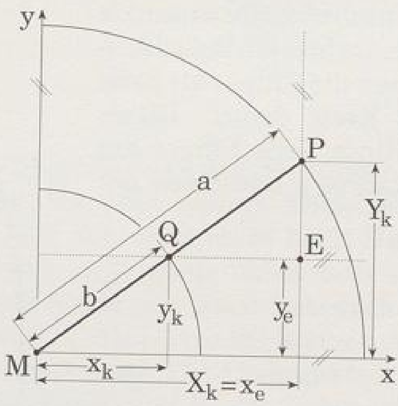


Der Kreis mit Radius b wird in x-Richtung aufs $\frac{a}{b}$-fache gestreckt – der Kreispunkt $K(x_k|y_k)$ wird auf den Ellipsenpunkt $E(s_e|y_e)$ abgebildet. Diese Abbildung heißt **axiale Streckung** (in x-Richtung): Alle x-Werte sind mit dem Faktor $\frac{a}{b}$ multipliziert, die y-Werte ändern sich nicht. Die axiale Streckung ist von der zentrischen Streckung zu unterscheiden.

Die Streckung des Kreises mit Radius b zu einer Ellipse mit den Halbachsen a und b lässt sich auch mit Zirkel und Lineal einfach konstruieren. Sind a und b gegeben, so zeichnet man zwei konzentrische Kreise mit den Radien a und b. Einen Ellipsenpunkt $E(x_e|y_e)$ findet man so: Man zeichnet einen Radius, der den großen Kreis in $P(X_k|Y_k)$ und den kleinen Kreis in $Q(x_k|y_k)$ schneidet. Die Parallele zur x-Achse durch Q und die Parallele zur y-Achse durch P schneiden sich im Ellipsenpunkt E. Die Begründung lesen wir aus dem Bild ab.

$$y_e = y_k$$

$$\frac{x_e}{x_k} = \frac{a}{b} \Rightarrow x_e = \frac{a}{b}\, x_k$$



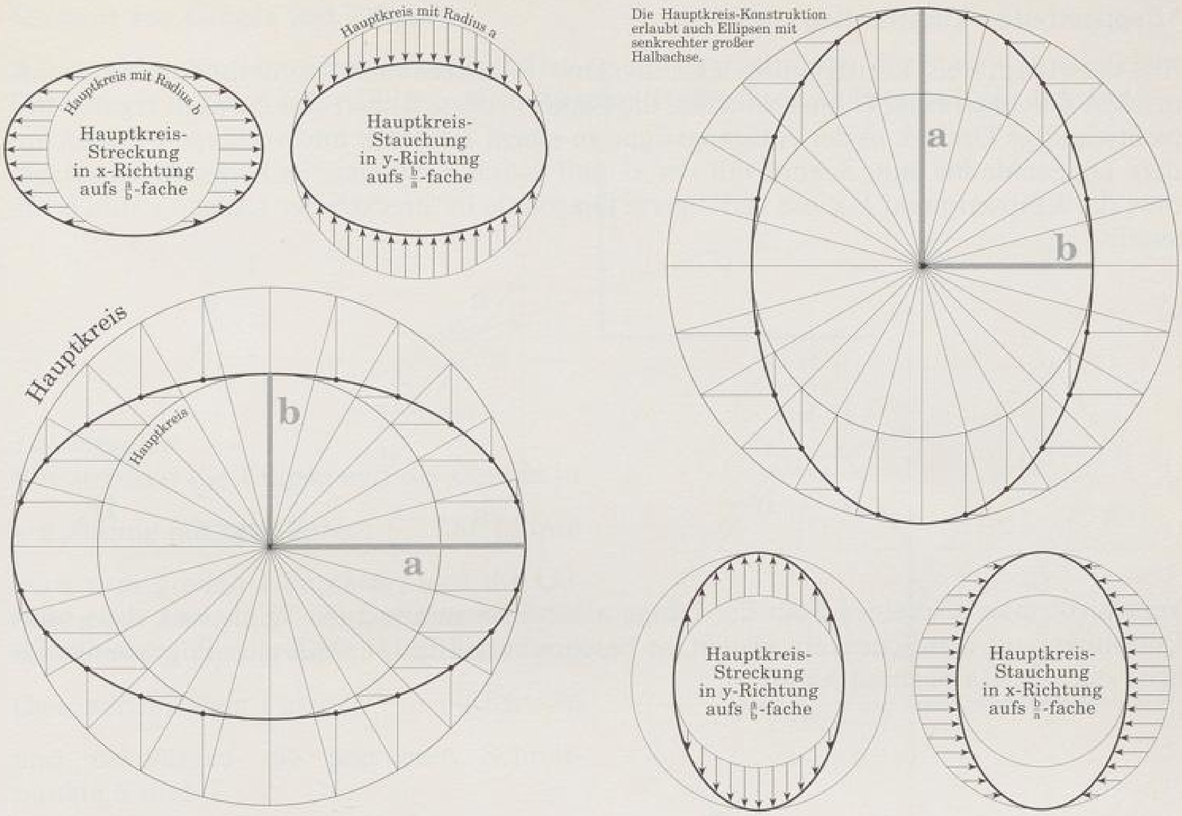
Diese Gleichungen beschreiben die Streckung des kleinen Kreises in x-Richtung aufs $\frac{a}{b}$-fache.

Andere Deutung: Stauchung des großen Kreises in y-Richtung aufs $\frac{b}{a}$-fache:

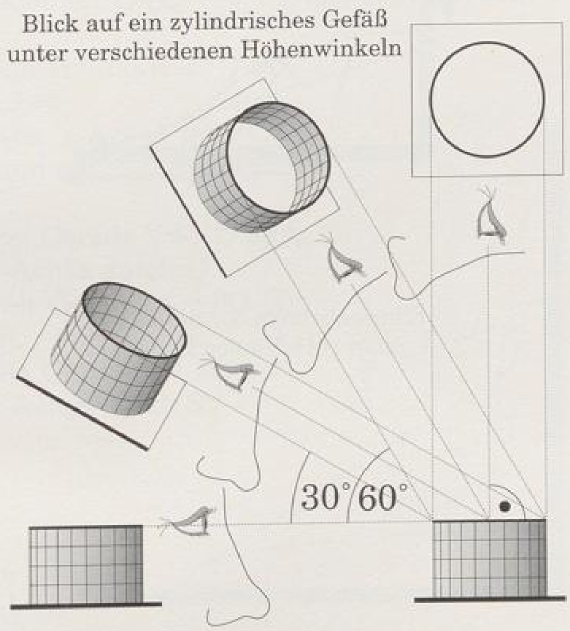
$$x_e = X_k$$

$$\frac{y_e}{Y_k} = \frac{b}{a} \Rightarrow y_e = \frac{b}{a}\, Y_k$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



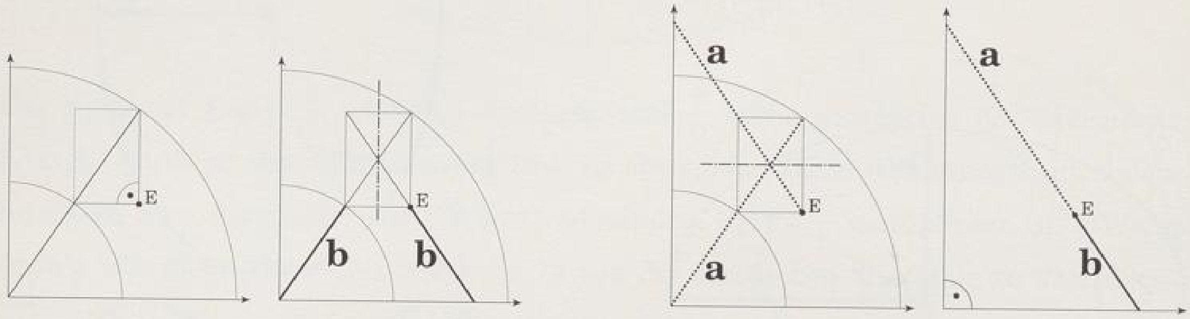
Die Streckung eines Kreises zur Ellipse beobachtet man am Schatten einer Kugel; die Stauchung eines Kreises zur Ellipse sieht man, wenn man aus verschiedenen Richtungen auf einen Kreis schaut.



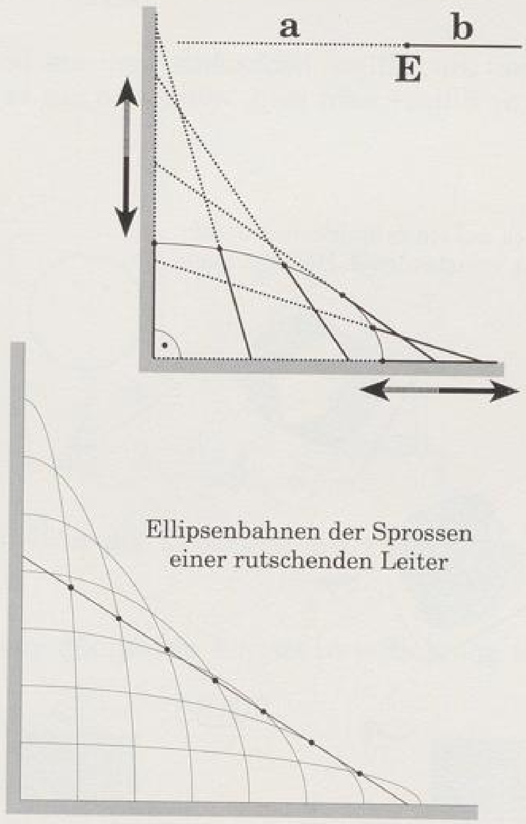
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

* Papierstreifen-Konstruktion

Aus der Hauptkreis-Konstruktion lässt sich eine besonders einfache Methode zum mechanischen Zeichnen einer Ellipse ableiten, die Papierstreifen-Konstruktion: Man ergänzt das rechtwinklige Dreieck in der Ausgangsfigur zu einem Rechteck und verlängert dessen andere Diagonale bis zum Schnitt mit der x- und y-Achse. Symmetrieüberlegungen zeigen, dass der Ellipsenpunkt E diese verlängerte Diagonale in Strecken der Längen a und b unterteilt.



Verschiebt man also einen Stab der Länge a + b in einem rechten Winkel so, dass seine Endpunkte auf den Schenkeln gleiten, so beschreibt der Teilpunkt E den Bogen einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

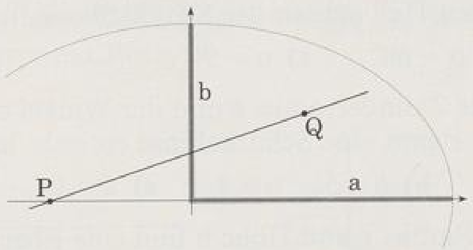


Ellipsenbahnen der Sprossen einer rutschenden Leiter

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

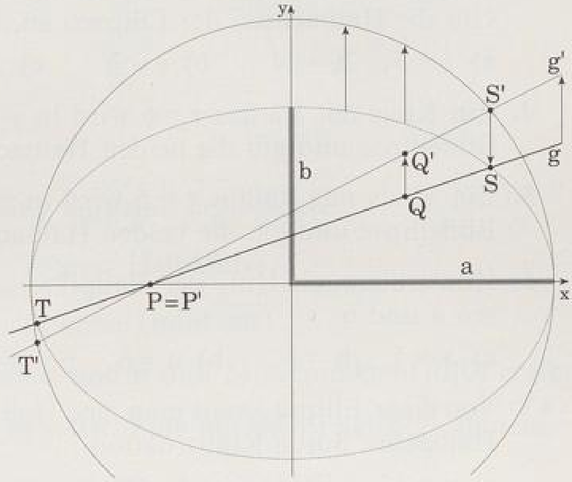
*Schnitt von Gerade und Ellipse

Wir wenden die Hauptkreis-Konstruktion an und konstruieren die Schnittpunkte einer Gerade $g = PQ$ und einer Ellipse mit bekannten Halbachsen. P liege auf der x-Achse.



Lösungsidee

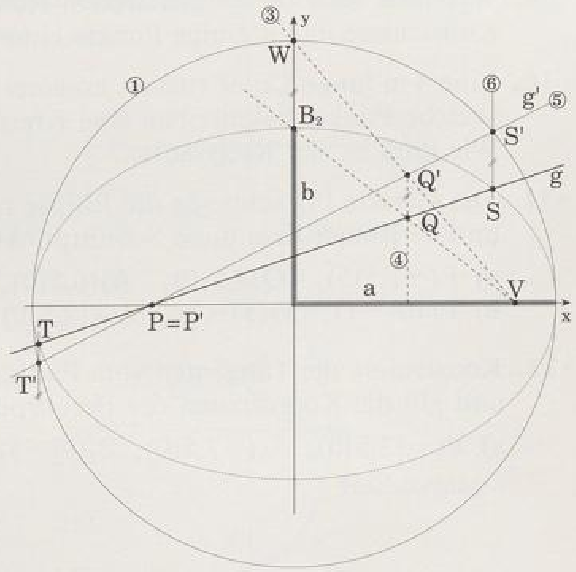
Wir strecken die Ellipse und die Gerade in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{a}{b}$: Die Ellipse wird zum großen Hauptkreis und die Gerade g zur Gerade g′. Die Schnittpunkte S′ und T′ von g′ und großem Hauptkreis stauchen wir mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ in y-Richtung und bekommen die gesuchten Schnittpunkte S und T.



Konstruktion

Der Schnittpunkt P von Gerade und x-Achse bleibt liegen: $P = P'$. Der Geradenpunkt $Q(x_q|y_q)$ wird abgebildet auf $Q'(x_q|\frac{a}{b}y_q)$. (Achte auf die gestrichelte V-Figur!)

W ist Schnittpunkt von Hauptkreis ① mit Radius a und y-Achse.
V ist Schnittpunkt von x-Achse und Gerade ② durch Q und den Nebenscheitel B_2.
Q′ ist Schnittpunkt von Gerade VW ③ und Parallele ④ zur y-Achse durch Q.
S′ ist Schnittpunkt von Gerade $g' = PQ$ ⑤ und Hauptkreis ①.
S ist Schnittpunkt von Gerade $g = PQ$ und Parallele ⑥ zur y-Achse durch S′.



Aufgaben

1. Eine Ebene schneidet einen Zylinder mit Radius $r = 6$ so, dass sie mit der Zylinderachse den Winkel α bildet.
Berechne die beiden Halbachsen der Schnittellipse für
a) $\alpha = 45°$ **b)** $\alpha = 60°$ **c)** $\alpha = 90°$

2. Wie groß muss der Zylinderradius r und der Winkel α zwischen Zylinderachse und Schnittebene sein, damit eine Schnittellipse entsteht mit
a) $a = 5, \quad b = 3$ **b)** $a = 5, \quad b = 4$ **c)** $a = 10, \quad b = 4$

3. Ein Zylinder mit Radius r und Höhe h und eine Ebene schneiden sich so, dass eine Ellipse mit maximaler großer Halbachse a entsteht.
Gib die Halbachsen der Ellipsen an, falls
a) $r = 5, \quad h = 24$ **b)** $e = h$ **c)** $2r = h$

4. Ein Kreis mit Radius $r = 6$ wird in y-Richtung aufs $\frac{2}{3}$-fache gestaucht. Zeichne die Bildellipse und gib die beiden Halbachsen an.

5. Ein Kreis mit Radius $r = 5$ wird in y-Richtung aufs $\frac{3}{2}$-fache gedehnt. Zeichne die Bildellipse und gib die beiden Halbachsen an.

6. Konstruiere mit Hilfe der Hauptkreise einige Punkte der Ellipsen mit den Halbachsen a und b
a) $a = 5, \quad b = 3$ **b)** $a = 6, \quad b = 3$ **c)** $a = 6, \quad b = 2$

•7. Von einer Ellipse kennt man eine Halbachse und einen Punkt E. Ermittle die andere Halbachse durch Konstruktion.
a) $a = 13, \quad E(5|4)$ **b)** $b = 5, \quad E(6|4)$ **c)** $a = 10, \quad E(6|6)$

8. Markiere auf einem 10 cm langen Kartonstreifen einen Punkt, der 4 cm vom Rand weg liegt. Zeichne damit eine Ellipse und gib ihre Halbachsen an.

9. Wie lässt sich die Papierstreifen-Konstruktion mit Zirkel und Lineal ausführen? Konstruiere damit einige Punkte einer Ellipse mit den Halbachsen 5 und 3.

10. Eine 4 m lange Leiter rutscht an einer Hauswand ab.
Welche Punkte beschreiben eine Kreisbahn? Begründung!
Wie groß ist der Kreisradius?

•11. Die Gerade PQ schneide die Ellipse mit den Scheiteln A_2 und B_2 in den Punkten S und T. Konstruiere diese Schnittpunkte und gib ihre Koordinaten an.
a) $P(-1{,}5|5), \quad Q(8{,}5|0), \quad A_2(6{,}5|0), \quad B_2(0|3{,}25)$
b) $P(10|-1), \quad Q(5|-7), \quad A_2(12{,}5|0), \quad B_2(0|5)$

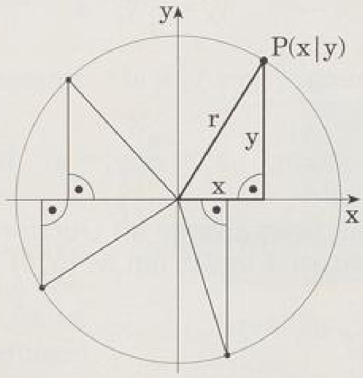
•12. Konstruiere die Tangenten vom Punkt P an die Ellipse mit den Scheiteln A_2 und B_2 und gib die Koordinaten der Berührpunkte S und T an.
a) $P(-12{,}5|0), \ A_2(-7{,}5|0), \ B_2(0|-5)$ **b)** $P(-1{,}5|-7), \ A_2(-7{,}5|0), \ B_2(0|-5)$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

2. Die Mittelpunkt-Gleichung einer Ellipse

So wie man die Punkte einer Gerade durch die Gleichung $ay + bx + c = 0$ beschreiben kann, so lassen sich auch die Punkte einer Ellipse mit einer Gleichung festlegen. Beginnen wir mit der einfachsten Ellipse, dem Kreis. k sei ein Kreis um $M(0|0)$ mit Radius r. Nach Pythagoras gilt für jeden Kreispunkt $P(x|y)$:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



Damit ist die Gleichung schon gefunden. Nach y aufgelöst ergibt sich:

$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}$ das heißt $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ (oberer Halbkreis)

oder $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (unterer Halbkreis)

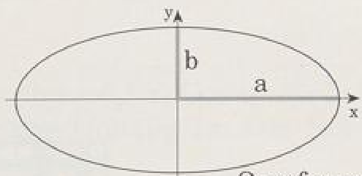
Die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen a und b und Mittelpunkt $M(0|0)$ ergibt sich, wenn man einen Kreis mit Radius $r = a$ in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ staucht.

Aus der Kreisgleichung $|y| = \sqrt{a^2 - x^2}$ bekommen wir die

Ellipsengleichung $|y| = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Quadrieren und Sortieren liefert die **Mittelpunkt-Gleichung** der Ellipse mit den Halbachsen a (in x-Richtung) und b (in y-Richtung).

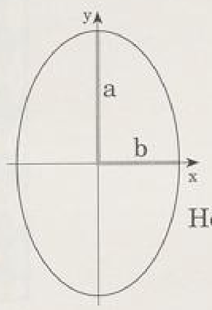
$$\boxed{\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}}$$



Querformat

Liegt die große Halbachse in y-Richtung, dann heißt die Gleichung:

$$\boxed{\mathbf{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}}$$



Hochformat

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ein anderer Weg von der Kreisgleichung zur Ellipsengleichung folgt aus den uns schon bekannten Koordinaten-Beziehungen zwischen einem Punkt $(x_k|y_k)$ des Hauptkreises mit Radius a und Ellipsenpunkt $(x_e|y_e)$:

$$x_e = x_k \qquad \text{(siehe Seite 210)}$$

$$y_e = \frac{b}{a} y_k \quad \Rightarrow \quad y_k = \frac{a}{b} y_e$$

Kreisgleichung: $x_k^2 + y_k^2 = a^2$ eingesetzt ergibt

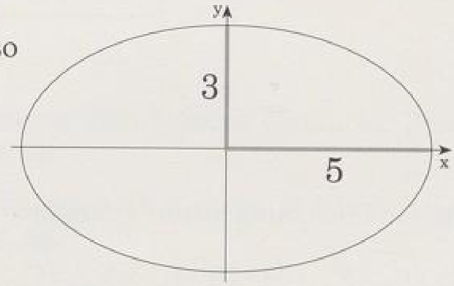
Ellipsengleichung: $x_e^2 + \frac{a^2}{b^2} y_e^2 = a^2$ in üblicher Form: $\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2} = 1$

Die Gleichung der Ellipse im Querformat mit den Halbachsen 3 und 5 um M (0|0) lautet also

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu:

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$



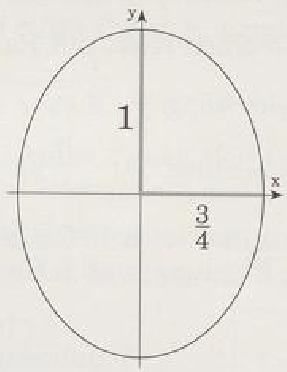
Allgemein beschreibt jede Gleichung der Form $px^2 + qy^2 - r = 0$ mit $p, q, r > 0$ eine Ellipse. Die Halbachsen finden wir durch geeignete Umformung:

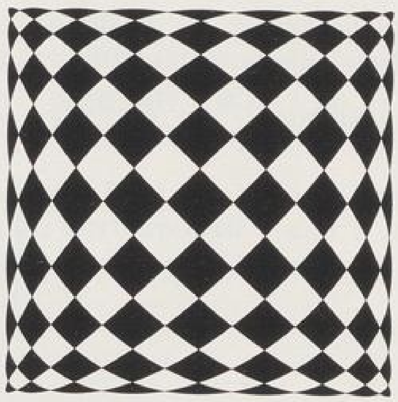
$$16x^2 + 9y^2 - 9 = 0$$

$$16x^2 + 9y^2 = 9$$

$$\frac{16x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$\frac{x^2}{(3/4)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1, \quad b = 3/4$$



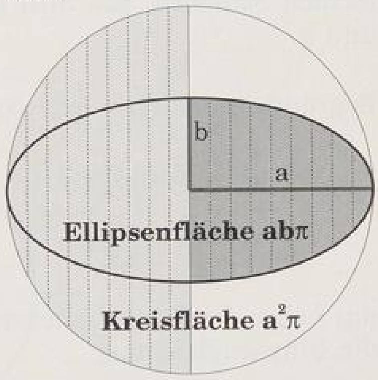


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

* Fläche und Umfang der Ellipse

Die Idee von der Ellipse als gestauchtem Kreis führt auch zu einer einfachen Formel für die Fläche einer Ellipse. Man denkt sich den Kreis in sehr schmale, annähernd rechteckige Streifen zerlegt. Beim Stauchen bleibt jeder Streifen gleich breit, seine Höhe und damit seine Fläche nehmen ab aufs $\frac{b}{a}$-fache. Also gilt $A_{Ellipse} = \frac{b}{a} A_{Kreis}$.

$$\boxed{A_{Ellipse} = ab\pi}$$



Wer nun nach dieser einfachen Flächenformel erwartet, dass es auch für den Umfang der Ellipse eine einfache Formel gibt, der irrt. Nur mit Hilfe höherer Mathematik findet man Ausdrücke, mit denen man den Umfang näherungsweise berechnen kann. Eine kleine Auswahl:

① $U_{Ellipse} \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]$

② $U_{Ellipse} \approx \frac{\pi}{2}\left[a + b + \sqrt{2(a^2+b^2)}\right]$

③ $U_{Ellipse} \approx \pi \left(a + b + \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}\right)$

Für $a = b = r$ wird aus diesen drei Formeln erwartungsgemäß der Term $\pi \cdot 2r$. Wer's exakt haben will, muss eine Summe mit unendlich vielen Summanden »berechnen«, zum Beispiel

④ $U_{Ellipse} = 2a\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \ldots\right]$

mit $e^2 = a^2 - b^2$.

Für eine Ellipse mit $a = 1$ und $b = 0{,}5$ ergibt sich $F = ab\pi = 0{,}5\pi$. Das ist die halbe Fläche des großen Halbkreises mit $r = 1$. Dieser Kreis hat den Umfang 2π. Die Näherungsformeln für den Ellipsenumfang liefern (10 gültige Dezimalen)

① $U_{Ellipse} \approx \pi \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right] = \pi \cdot 1{,}542\,893\,218\,8\ldots$

② $U_{Ellipse} \approx \frac{\pi}{2}\left[\frac{3}{2} + \sqrt{2 \cdot \frac{5}{4}}\right] = \pi \cdot 1{,}540\,569\,415\,0\ldots$

③ $U_{Ellipse} \approx \pi \left[\frac{3}{2} + \frac{1/4}{4 \cdot 3/2}\right] = \pi \cdot 1{,}541\,666\,666\,6\ldots$

④ $U_{Ellipse} \approx \pi \cdot 1{,}541\,964\,425\,1\ldots$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

*** Ellipsenzirkel**

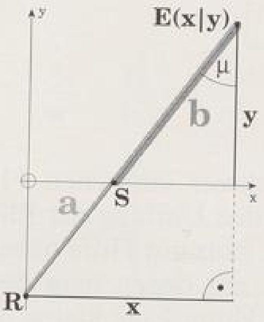
Zum Zeichnen von Kreisen hat man als Werkzeug den Zirkel erfunden. Verblüffenderweise gibt es auch ein mechanisches Gerät zum Zeichnen von Ellipsen, den Ellipsenzirkel. Seine Funktionsweise beruht auf der Papierstreifen-Konstruktion.
Zwei feste Punkte R und S eines Stabs mit $\overline{ER} = a$ und $\overline{ES} = b$ gleiten in zueinander senkrechten Schienen. Ein Stift im Endpunkt E zeichnet eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.

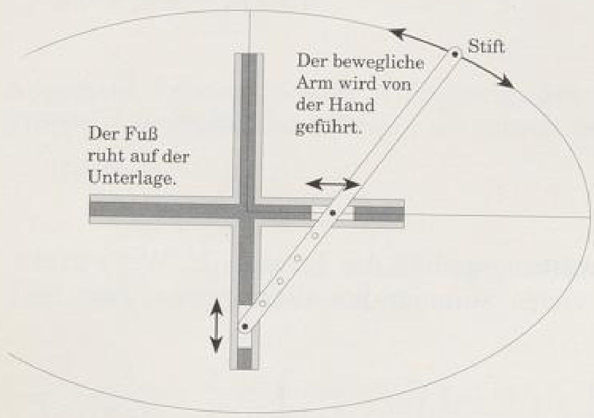
Begründung: $\sin\mu = \frac{x}{a}, \quad \cos\mu = \frac{y}{b}$

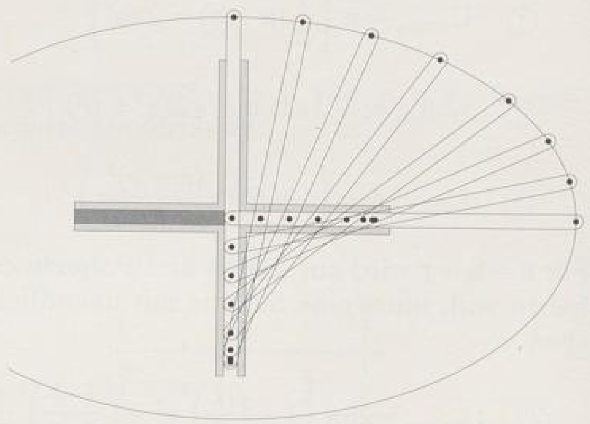
$$(\sin\mu)^2 + (\cos\mu)^2 = 1$$

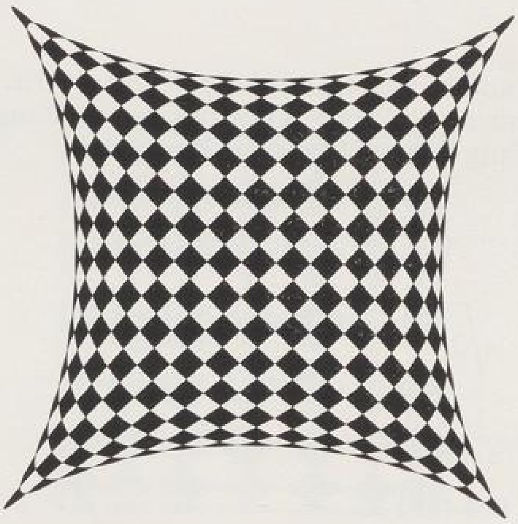
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

das heißt, die Koordinaten von E erfüllen die Ellipsengleichung.



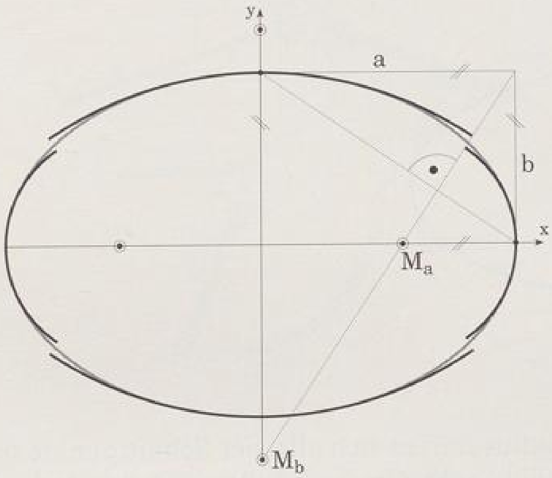






*** Die Scheitel-Krümmungskreise**

Normalerweise hat man keinen Ellipsenzirkel zur Hand. Aber auch ein Kreiszirkel eignet sich zum näherungsweisen Zeichnen von Ellipsen. Dazu dienen vier Kreisbögen, die die Ellipse in der Umgebung der Scheitel am besten annähern. Sie heißen **Scheitel-Krümmungskreise**. Ihre Mittelpunkte liegen aus Symmetriegründen auf den Achsen. Das Bild erklärt die Konstruktion dieser Mittelpunkte M_a und M_b.



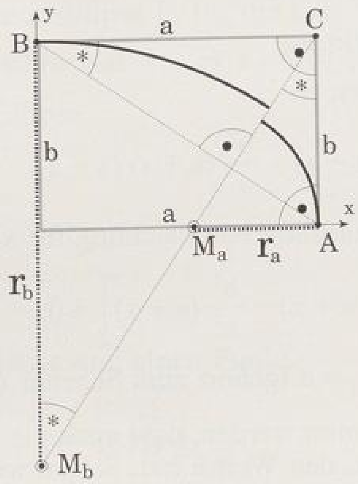
Zeichnet man die vier Kreisbögen (die sich nicht schneiden!), dann hat man schon einen verblüffend guten Eindruck von Ellipse. Diese lässt sich jetzt gut skizzieren – aber Obacht: immer innerhalb der großen und außerhalb der kleinen Näherungskreise bleiben, denn nur die vier Scheitel sind Ellipsenpunkte! Die Kreisradien liest man aus der Konstruktionsfigur ab:

Aus $\Delta CAM_a \sim \Delta BCA$ folgt

$$\frac{r_a}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{also} \quad \boxed{r_a = \frac{b^2}{a}}$$

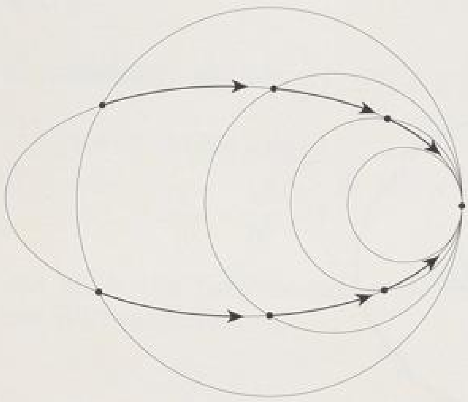
Aus $\Delta BCM_b \sim \Delta CAB$ folgt

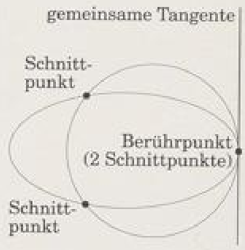
$$\frac{r_b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{also} \quad \boxed{r_b = \frac{a^2}{b}}$$



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wer's genauer wissen will, erfährt jetzt den mathematischen Hintergrund.
Im Allgemeinen schneiden sich Kreis und Ellipse in vier Punkten.
Haben sie eine gemeinsame Tangente, dann berühren sie sich: Zwei Schnittpunkte fallen in einem Berührpunkt zusammen. Als Berührpunkt wählen wir den rechten Hauptscheitel, halten ihn fest und verkleinern den Radius. Dabei wandern die beiden andern Schnittpunkte auf der Ellipse in Richtung Berührpunkt.

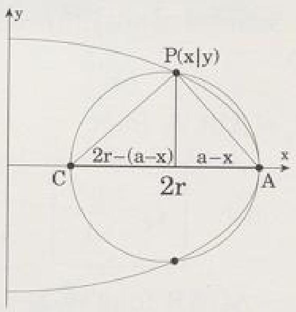




Bei einem bestimmten Radius treffen sich alle vier Schnittpunkte im Berührpunkt und bilden einen vierfachen Schnittpunkt. Grafisch äußert sich das darin, dass sich der Kreis jetzt besonders innig an die Ellipse anschmiegt.
Für die Koordinaten der beiden beweglichen Schnittpunkte gelten zwei Gleichungen

I $\quad y^2 = (2r - a + x)(a - x)$
(Höhensatz im Dreieck CAP)

II $\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$
(Ellipsengleichung)



Gleichsetzen liefert:

$$(2r - a + x)(a - x) = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x)$$

das ergibt eine quadratische Gleichung für x

$$(a - x)\left[(2r - a + x) - \frac{b^2}{a^2}(a + x)\right] = 0$$

Eine Lösung ist $x_1 = a$ (gehört zum Scheitel A).

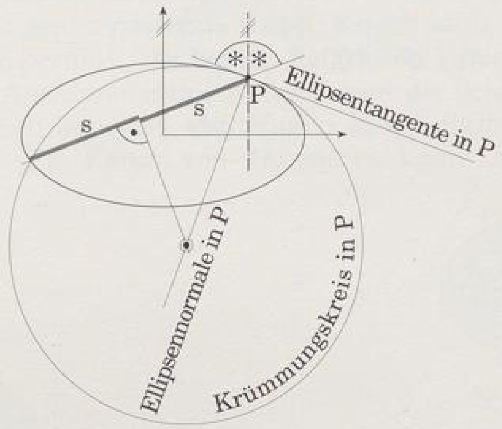
r soll nun so bestimmt werden, dass auch die zweite Lösung x_2, für die die zweite Klammer [...] gleich null ist, den Wert a hat. Setzen wir in [...] a für x ein, so ergibt sich für r

$$\left[(2r - a + a) - \frac{b^2}{a^2}(a + a)\right] = 0$$

$2r = 2\frac{b^2}{a} \Rightarrow r = \frac{b^2}{a}$, das ist der Radius r_a des kleinen Scheitel-Krümmungskreises.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Für den Radius r_b des großen Scheitel-Krümmungskreises gelten entsprechende Überlegungen. Die Scheitel-Krümmungskreise sind deshalb so besonders gute Schmiegekreise, weil in jedem Scheitel vier Schnittpunkte zusammenfallen. Dieselbe Überlegung für andere Ellipsenpunkte zeigt, dass nur drei Schnittpunkte zusammenfallen: Jetzt durchdringen die Schmiegekreise die Ellipse. Ihre Konstruktion ist schwieriger.



Aufgaben

Wenn nichts anderes vermerkt ist, liegt die Ellipse im Querformat. Ihr Mittelpunkt ist immer der Ursprung.

1. Wie lautet die Mittelpunkt-Gleichung einer Ellipse E, für die gilt

a) $a = 2,\ b = 1$ **b)** $a = 2,\ b = 1$, Hochformat **c)** $a = \sqrt{10}\ ,\ b = \sqrt{5}$

2. Bestimme die Halbachsen a und b der Ellipse.
Hat die Ellipse Quer- oder Hochformat?

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ **b)** $0{,}5\,x^2 + 2y^2 = 2$

c) $4x^2 + y^2 = 1$ **d)** $\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{25}y^2 = \frac{1}{4}$

3. Von einer Ellipse kennt man eine Halbachse und einen Punkt.
Bestimme die andere Halbachse.

a) $a = 5\sqrt{5}\ ,\ P(10|1)$ **b)** $b = 5\sqrt{2}\ ,\ P(-14|1)$

c) $a = 5\sqrt{10}\ ,\ P(15|-3)$ **d)** $b = 4\sqrt{13}\ ,\ P(-15|-8)$

4. Von einer Ellipse kennt man die Punkte P und Q.
Bestimme die Mittelpunkt-Gleichung. (Tip: Substitution von $1/a^2$ und $1/b^2$)

a) $P(9|-1),\ Q(-7|3)$ **b)** $P(-1|9),\ Q(-9|6)$
c) $P(17|4),\ Q(23|-1)$ **d)** $P(-19|4),\ Q(16|11)$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

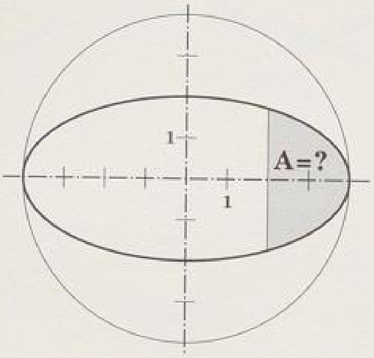
5. Der Ellipse mit der Gleichung $16x^2 + 9y^2 = 144$ ist ein Quadrat einbeschrieben. Berechne seine Seitenlänge s.

6. Die Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 500$ und die Gerade mit der Gleichung $3y = 2x - 25$ schneiden sich zweimal. Berechne die Schnittpunkte.

7. Bestimme den Flächeninhalt und näherungsweise den Umfang der Ellipse mit der Gleichung

a) $9x^2 = 25y^2 = 225$ **b)** $x^2 + 100y^2 = 100$

:8.



9. Von einer Ellipse kennt man den Punkt $P(4{,}5|2)$ und die kleine Halbachse $b = 2{,}5$. Konstruiere die Länge der großen Halbachse a mit Hilfe der Idee des Ellipsenzirkels.

10. Konstruiere die Scheitelkrümmungs-Kreise und skizziere die Ellipse mit den Halbachsen

a) $a = 5,\ b = 4$ **b)** $a = 5,\ b = 3$ **c)** $a = 5,\ b = 2$

11. Eine Ellipse, bei der die Mittelpunkte der großen Scheitelkrümmungs-Kreise die Nebenscheitel sind, heißt **Fagnano-Ellipse.**
Der italienische Mathematiker Giulio Carlo FAGNANO, Marquis von Toschi und S. Onorio (1682 bis 1766) hat sich einen Namen gemacht wegen seiner Bogenlängen-Berechnungen bei Ellipse, Hyperbel, Parabel und Lemniskate.

a) Die kleine Halbachse einer Fagnano-Ellipse sei b. Berechne
– die große Halbachse a
– den Radius des kleinen Scheitelkrümmungs-Kreises.

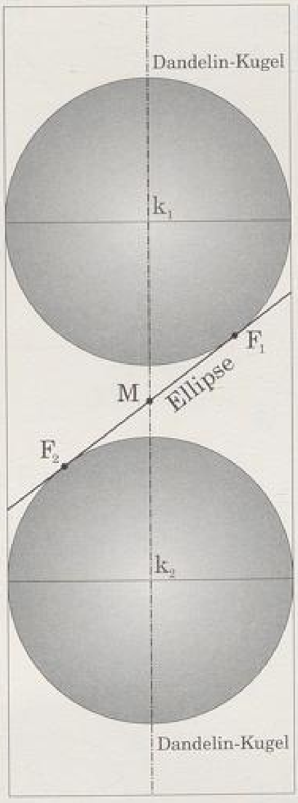
b) Zeichne eine Fagnano-Ellipse mit Hilfe ihrer Scheitelkrümmungs-Kreise für $b = 3$.

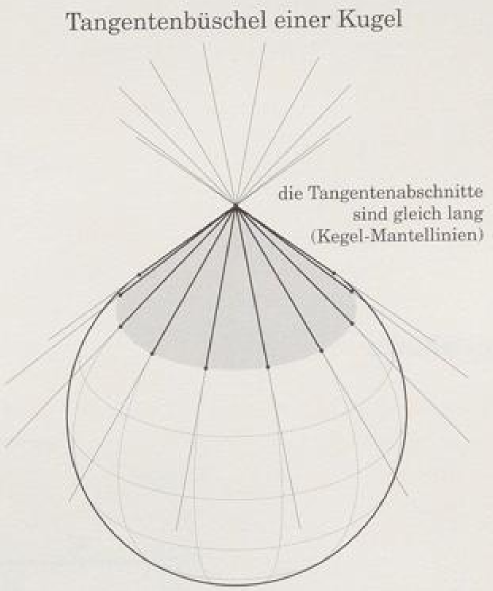
c) Zeige: Wenn eine Ellipse mit den Halbachsen a und b eine Fagnano-Ellipse ist, dann ist auch die Ellipse mit den Halbachsen b und $a/2$ eine Fagnano-Ellipse.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

3. Die Brennpunkte der Ellipse

Der belgische Mathematiker und Baumeister Pierre Germinal DANDELIN (1794 bis 1847) hatte bei der Untersuchung von Kegelschnitten eine schöne Idee aus der Raumgeometrie, die uns eine sehr wichtige Eigenschaft der Ellipse vor Augen führt. Dazu betrachten wir die Ellipse wieder als Schnitt einer Ebene E und eines Zylinders. Auf beiden Seiten der Ebene schiebt man eine genau passende Kugel (Kugelradius = Zylinderradius) in den Zylinder, bis sie die Ebene berührt. Die beiden Kugeln berühren außerdem den Zylinder in den Kreisen k_1 und k_2. Aus Symmetriegründen liegen die beiden Berührpunkte F_1 und F_2 auf der Hauptachse gleich weit vom Mittelpunkt M der Ellipse weg. F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte** der Ellipse. Zu Ehren von DANDELIN nennt man die beiden Kugeln **Dandelin-Kugeln.**





P sei ein beliebiger Punkt der Schnittellipse. Weil die Schnittebene auch Tangentialebene der beiden Dandelin-Kugeln ist, sind PF_1 und PF_2 Tangenten dieser Kugeln. Die Mantellinie durch P schneidet die beiden Berührkreise k_1 und k_2 in Q_1 und Q_2. PQ_1 und PQ_2 sind also auch Tangenten der Dandelin-Kugeln. Alle Kugel-Tangentenabschnitte durch einen Punkt sind gleich lang. Deshalb gilt:

$$\overline{PQ_1} = \overline{PF_1} \quad \text{und} \quad \overline{PQ_2} = \overline{PF_2} \quad \text{also} \quad \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} = \overline{Q_1Q_2} = \text{const.}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Für jeden Ellipsenpunkt ist die Summe seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten die Konstante $\overline{Q_1Q_2}$, der Abstand der beiden Berührkreise. Der Wert dieser Konstante ergibt sich, wenn wir P in einen Hauptscheitel, zum Beispiel A_2, legen, wenn also $P = A_2$ ist:

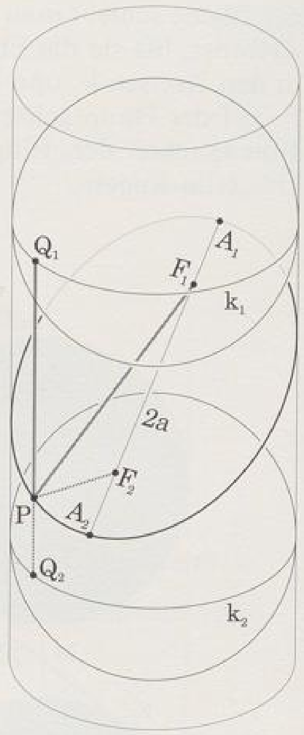
$$\overline{Q_1Q_2} = \overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} = \overline{A_2F_1} + \overline{F_1A_1} = 2a$$

Zusammenfassung
Für jeden Ellipsenpunkt P gilt

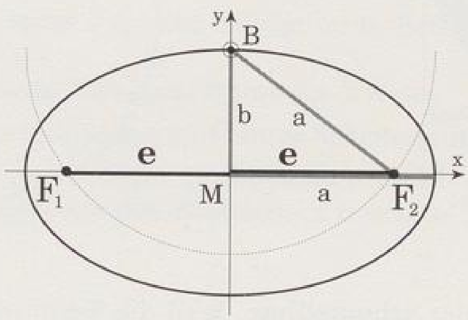
$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a}$$

Die beiden Brennstrecken $[PF_1]$ und $[PF_2]$ sind zusammen so lang wie die Hauptachse 2a.

Legt man P in einen Nebenscheitel B, dann gilt aus Symmetriegründen $\overline{F_1B} = \overline{F_2B} = a$. Mit dieser Beziehung lassen sich die Brennpunkte einfach konstruieren.



*** Exzentrizitäten**



Die Entfernung **e** der Brennpunkte vom Mittelpunkt heißt **lineare Exzentrizität**. Die Zeichnung (Pythagoras!) zeigt:

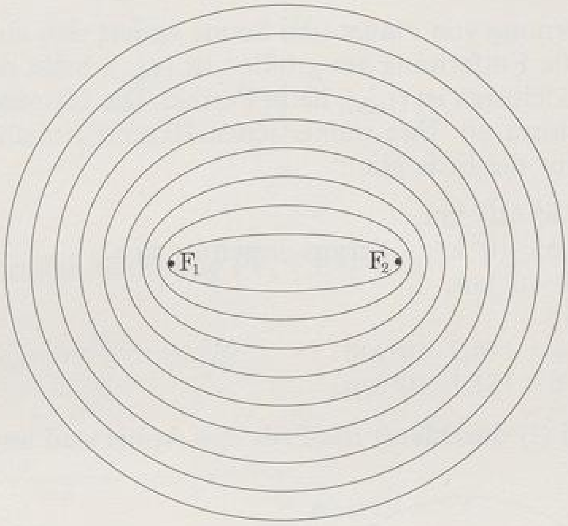
$$\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Für einen Kreis gilt a = b, also e = 0. e ist aber noch kein Maß dafür, wie die Ellipse vom Kreis abweicht. Denn bei einer Ähnlichkeitsabbildung, zum Beispiel zentrische Streckung, ändert sich zwar e, nicht aber die Form. Umgekehrt gibt es zu ein und demselben Wert für e verschieden geformte Ellipsen. Bezieht man jedoch e auf die große Halbachse, dann entsteht eine Zahl, in der die Gestalt der Ellipse zum Ausdruck kommt, sie heißt **numerische Exzentrizität** ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$$

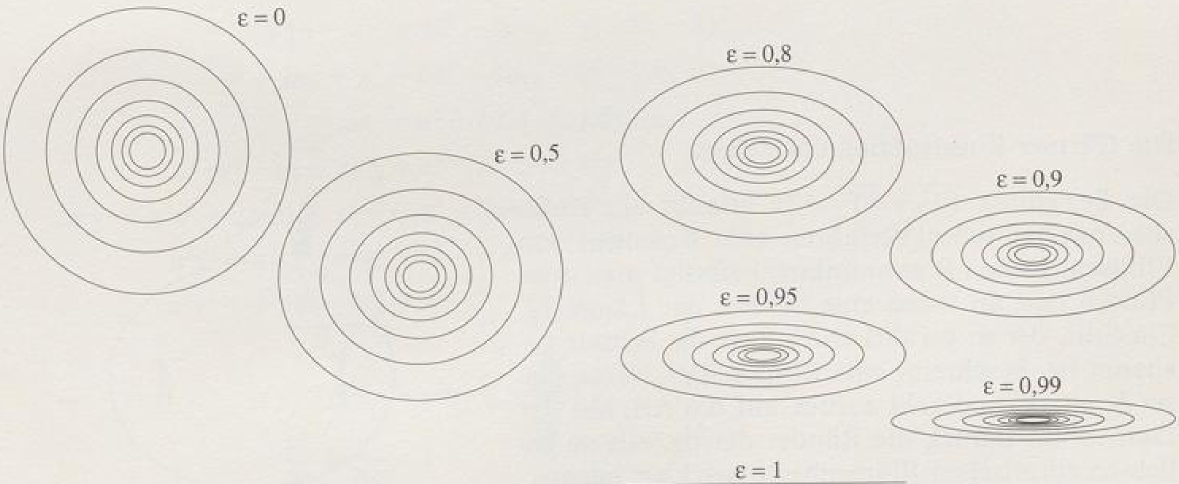
Konfokale Ellipsen mit $\overline{F_1F_2} = 2e = \text{const.}$



Wegen $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ist $0 \leq \varepsilon \leq 1$

Für die Grenzfälle gilt
$\varepsilon = 0$, das heißt $a = b$: Kreis
$\varepsilon = 1$, das heißt $b = 0$: Strecke

Konfokale Ellipsen mit $\overline{F_1F_2} = 2e = \text{const.}$



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

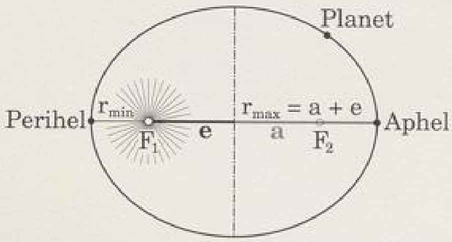
Die Ellipse in der Astronomie

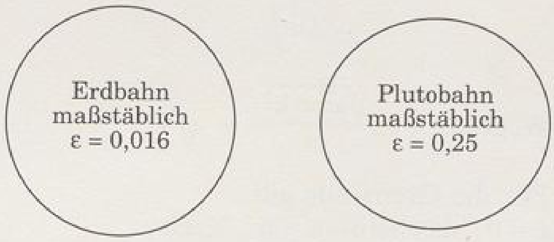
Bis ins 16. Jahrhundert glaubte man, dass sich alle Gestirne auf Kreisbahnen oder auf Überlagerungen von Kreisbahnen bewegen. Als Johannes KEPLER (Weil der Stadt 1571 bis 1630 Regensburg) auf der Grundlage der Beobachtungen von Tycho BRAHE die Planetenbewegung mathematisch beschreiben wollte, musste er dieses Ideal der Kreisbahn aufgeben. Er stellte fest, dass die Planeten auf Ellipsenbahnen laufen, bei denen die Sonne in einem Brennpunkt steht.

Die Entfernung von Planet und Sonne ändert sich also während des Umlaufs. Der Punkt, bei dem die Entfernung am größten ist (r_{max}), heißt **Aphel**; der Punkt, bei dem die Entfernung am kleinsten ist (r_{min}), heißt **Perihel**. Die Ellipsenbahnen weichen nur sehr wenig von der Kreisform ab. Ihre numerischen Exzentrizitäten reichen von 0,007 (Venus) bis 0,25 (Pluto). Für die Erde gilt

$a = 148{,}65 \cdot 10^6\,\text{km}$,
$b = 148{,}63 \cdot 10^6\,\text{km}$, daraus errechnet sich
$e = 2{,}44 \cdot 10^6\,\text{km}$,
$\varepsilon = 0{,}016$
$r_{min} = a - e = 146{,}2 \cdot 10^6\,\text{km}$
$r_{max} = a + e = 151{,}1 \cdot 10^6\,\text{km}$.

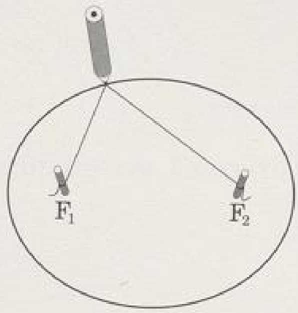
Am 3. Juli (!) durchläuft die Erde das Aphel und am 2. Januar das Periphel.



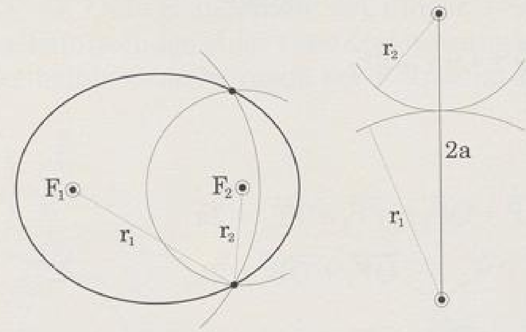


Die Gärtner-Konstruktion der Ellipse

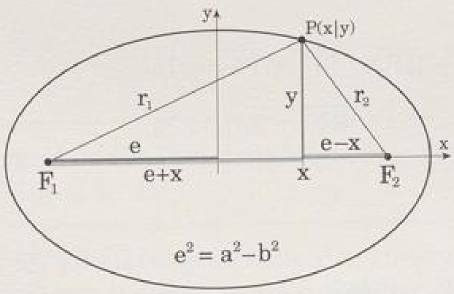
Die Beziehung $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ erlaubt ein einfaches mechanisches Verfahren zum Erzeugen von Ellipsen. In den Brennpunkten befestigt man zwei Pflöcke und an ihnen eine Schnur der Länge 2a. Ein Stift, der so geführt wird, dass die Schnur gespannt ist, beschreibt eine Ellipse. Der Name dieser Konstruktion geht zurück auf die Art, mit der Gärtner im Barock die Ränder der damals so beliebten elliptischen Blumenbeete markiert haben.



Die Ellipseneigenschaft, die der Gärtner-Konstruktion zugrunde liegt, führt auch zu einer Konstruktion einzelner Ellipsenpunkte: Man zeichnet um die Brennpunkte Kreise, deren Radien zusammen 2a ergeben; die Schnittpunkte sind Ellipsenpunkte.



Herleitung der Ellipsen-Gleichung aus der Beziehung $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$



$$r_1^2 = y^2 + (e + x)^2 \qquad\qquad r_2^2 = y^2 + (e - x)^2$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$r_1 = 2a - r_2 \quad \| \text{ quadrieren}$$

$$r_1^2 = 4a^2 - 4ar_2 + r_2^2$$

$$\cancel{y^2}(e + x)^2 = 4a^2 - 4ar_2 + \cancel{y^2} + (e - x)^2$$

$$\cancel{e^2} + 2ex + \cancel{x^2} = 4a^2 - 4ar_2 + \cancel{e^2} - 2ex + \cancel{x^2}$$

$$ar_2 = a^2 - ex \quad \| \text{ quadrieren}$$

$$a^2\,[y^2 + (e - x)^2] = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

$$a^2y^2 + a^2e^2 - \cancel{2a^2ex} + a^2x^2 = a^4 - \cancel{2a^2ex} + e^2x^2$$

$$a^2y^2 + a^2x^2 - e^2x^2 = a^4 - a^2e^2$$

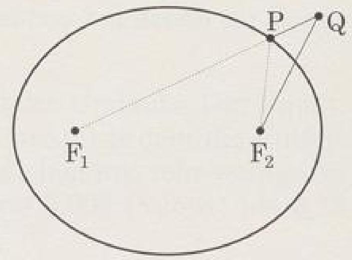
$$a^2y^2 + x^2\,\underbrace{(a^2 - e^2)}_{b^2} = a^2\,\underbrace{(a^2 - e^2)}_{b^2}$$

$$a^2y^2 + x^2b^2 = a^2b^2 \quad \| \; : (a^2b^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ein Punkt P liegt also genau dann auf der Ellipse, wenn die Summe der beiden Brennstrecken r_1 und r_2 gleich der Hauptachse 2a ist. Für einen Punkt Q, der außerhalb der Ellipse liegt, ist die Summe der Brennstrecken größer als 2a; für einen Punkt R, der innerhalb liegt, ist sie kleiner als 2a. Zur Begründung verwenden wir die Dreieck-Ungleichung.

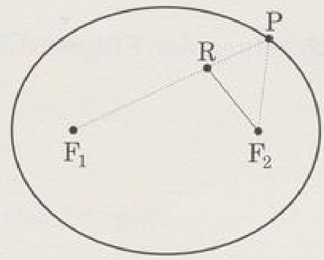
Im Dreieck QPF_2 gilt: $\overline{PQ} + \overline{QF_2} > \overline{PF_2}$



$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{PF_1} + \overline{QP} + \overline{QF_2} > \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a$$

Im Dreieck RPF_2 gilt: $\overline{RP} + \overline{PF_2} > \overline{RF_2}$

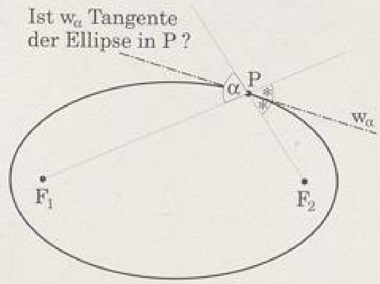


$$\overline{RF_1} + \overline{RF_2} < \overline{RF_1} + \overline{RP} + \overline{RF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

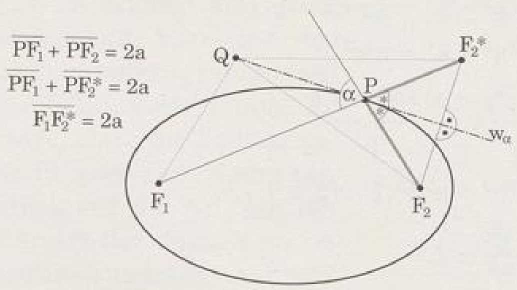
$$\overline{RF_1} + \overline{RF_2} < 2a$$

*** Brennpunkt und Tangente**

oder: Wie der Brennpunkt zu seinem Namen kommt.



Das Bild zeigt einen Ellipsenpunkt P und eine Winkelhalbierende w_α der Brennstrahlen $[F_1P$ und $[F_2P$. Dem Augenschein nach ist w_α Tangente der Ellipse in P. Aber nicht nur dem Augenschein nach! Mit einem kleinen Trick lässt sich das beweisen: Man spiegelt einen der beiden Brennpunkte an w_α (Spiegelpunkt F_2^*). Wegen Achsensymmetrie ist $\overline{PF_2} = \overline{PF_2^*}$.

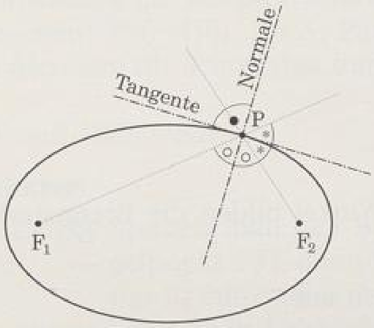


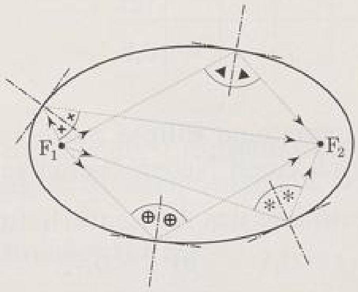
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt dann (Dreieck-Ungleichung!):

$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QF_2^*} > \overline{F_1F_2^*} = 2a$$

Also gilt $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a \Rightarrow$ Q liegt außerhalb der Ellipse $\Rightarrow$ w_α ist Tangente im Punkt P. Weil die beiden Winkelhalbierenden einer Geradenkreuzung aufeinander senkrecht stehen, ist die andere Winkelhalbierende Normale der Ellipse im Punkt P.

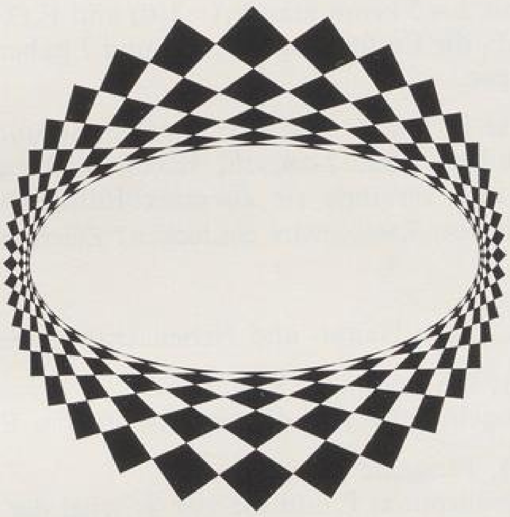




Damit haben wir den **Satz**:

> Die beiden Winkelhalbierenden der Brennstrahlen eines Ellipsenpunkts P sind Tangente und Normale der Ellipse in P.

Wir haben so eine einfache Möglichkeit gefunden, die Tangenten in einem beliebigen Ellipsenpunkt zu konstruieren: Man halbiert den Winkel der Brennstrahlen, durch den die Ellipse geht.
Nach dem Reflexionsgesetz der Physik sind Einfalls- und Ausfallswinkel gleich groß. Alle von einem Brennpunkt ausgehenden (Licht-)Strahlen werden an der Ellipse so reflektiert, dass sie sich im andern Brennpunkt treffen. Weil die Wege aller Strahlen gleich lang (= 2a) sind, treffen sich die reflektierten Strahlen auch alle zum selben Zeitpunkt. (Anwendung dieses Effekts im Kapitel 9. II, 5)



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Größen

	a	b	e	ε
a)	4	2		
b)	4		2	
c)	7			0,5
d)			4	0,8

2. Zeichne eine Ellipse mit $e = b = 4$. Welchen Winkel bilden die Brennstrahlen, die durch einen Nebenscheitel gehen?

3. Bestimme das Achsenverhältnis b/a bei Ellipsen mit

a) $\varepsilon = 0{,}5$ **b)** $\varepsilon = 0{,}75$ **c)** $\varepsilon = 0{,}9$ **d)** $\varepsilon = 0{,}95$ **e)** $\varepsilon = 0{,}99$

4. Zeichne (mit Hilfe der Scheitelkrümmungs-Kreise) die Ellipse E_1 mit den Halbachsen $a = 4$ und $b = 3{,}5$ sowie die beiden Brennpunkte. Zeichne dann die Ellipse E_2 mit der gleichen linearen Exzentrizität wie E_1, deren große Halbachse die Länge 2,5 hat. Berechne für beide Ellipsen die numerische Exzentrizität.

5. Zeichne (mit Hilfe der Scheitelkrümmungs-Kreise) die Ellipse E_1 mit den Halbachsen $a = 3$ und $b = 1{,}5$ sowie die beiden Brennpunkte. Zeichne dann die Ellipse E_2 mit der gleichen numerischen Exzentrizität wie E_1, deren große Halbachse die Länge 4 hat. Berechne für beide Ellipsen die lineare Exzentrizität.

6. Der Komet Halley läuft auf einer Ellipsenbahn um die Sonne. Ein Umlauf dauert etwa 76 Jahre. Seine kleinste Entfernung bis zur Sonne ist $87{,}8 \cdot 10^6$ km, seine größte $5232{,}5 \cdot 10^6$ km. Berechne die Werte a, b, e und ε seiner Ellipsenbahn.

7. Berechne allgemein a, b, e und ε aus r_{min} und r_{max} einer Planetenbahn.

8. Von einer Ellipse mit $a = 5$ kennt man $F_1(-3|0)$ und $F_2(3|0)$. Konstruiere die Ellipsenpunkte, die von F_1 die Entfernungen 3, 5, 6 und 7 haben und zeichne damit näherungsweise die Ellipse.

9. Zeichne zwei Punkte F_1 und F_2 mit 8 cm Entfernung und um jeden dieser Punkte Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, ..., 10 cm. Suche alle Schnittpunkte P mit $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 12$ cm und verbinde sie zu einer Ellipse. Welche weiteren Ellipsen ($a = ?$) kannst du in dem Kreisgewirr entdecken? Zeichne sie!

Ellipsentangenten

Wenn nichts vermerkt ist, liegen Haupt- und Nebenachse in den Koordinatenachsen.

10. Gegeben: $F_1(-4|0)$, Ellipsenpunkt $P(3|-2{,}5)$
Konstruiere die Tangente in P und die vier Scheitel der Ellipse.

11. Gegeben: $F_1(-3|0)$, Tangente $y = 0{,}5x + 4$
Konstruiere den Berührpunkt P und die vier Scheitel der Ellipse.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

12. Gegeben: Halbachse $a = 5$, Tangente $y = -0{,}5x + \times 4$
Konstruiere die Brennpunkte und die Nebenscheitel der Ellipse.

13. Gegeben: $F_2(4|0)$, $a = 5$, Tangente $y = -\frac{1}{3}x + 3{,}5$ mit Berührpunkt $P(3|2{,}5)$
Konstruiere den zweiten Brennpunkt und die vier Scheitel der Ellipse. (Die Ellipse liegt nicht symmetrisch zum Koordinatensystem!)

14. Gegeben: $F_1(-4|0)$, $a = 5$, Tangentensteigung $m = -0{,}5$
Konstruiere die Tangenten und die Berührpunkte.

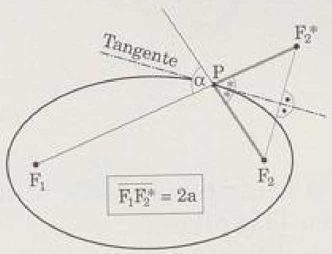
15. Gegeben: $F_1(-4|0)$, $a = 5$, Punkt $Q(1|4)$ außerhalb der Ellipse
Konstruiere die Tangenten durch Q.

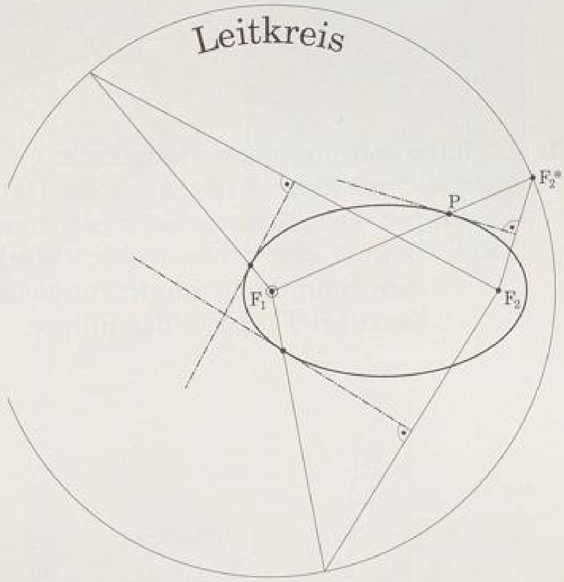
Leitkreis und Hüllgeraden

•16. Leitkreis

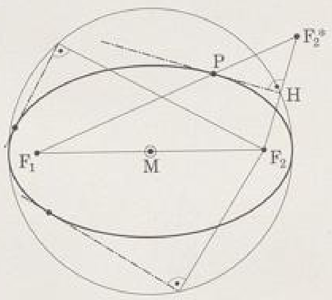
a) Zeige: Spiegelt man den Brennpunkt F_2 an irgendeiner Ellipsentangente (Spiegelpunkt F_2^*), dann liegen alle so erzeugten Spiegelpunkte auf dem Kreis um F_1 mit Radius 2a.

Dieser Kreis heißt **Leitkreis der Ellipse zum Brennpunkt F_1**.





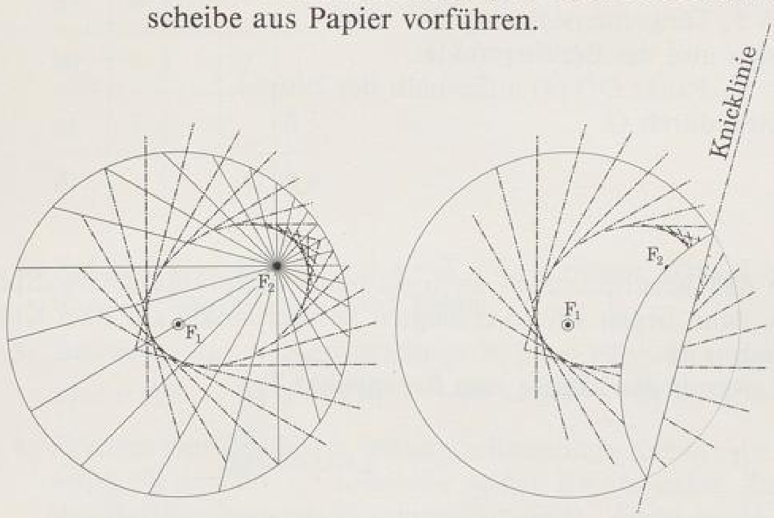
b) Zeige: Der Mittelpunkt H der Strecke $[F_2F_2^*]$ liegt auf dem Hauptkreis mit Radius a (siehe Aufgabe **a)**).



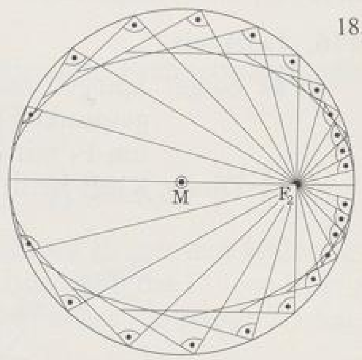
17. 1. Hüllkonstruktion mit Leitkreis

Man zeichnet einen Kreis; er ist der Leitkreis, sein Mittelpunkt F_1 ist ein Brennpunkt der Ellipse. Den andern Brennpunkt F_2 zeichnet man in den Leitkreis.

Zeige: Verbindet man F_2 mit irgendeinem Kreispunkt L, dann ist die Mittelsenkrechte von $[F_2L]$ Tangente der Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2.
Diese Konstruktion lässt sich auch eindrucksvoll durch Falten einer Kreisscheibe aus Papier vorführen.



18.



18. 2. Hüllkonstruktion mit Hauptkreis

Man zeichnet einen Kreis; er ist der Hauptkreis, sein Mittelpunkt M ist Mittelpunkt der Ellipse. Den Brennpunkt F_2 zeichnet man in den Hauptkreis.

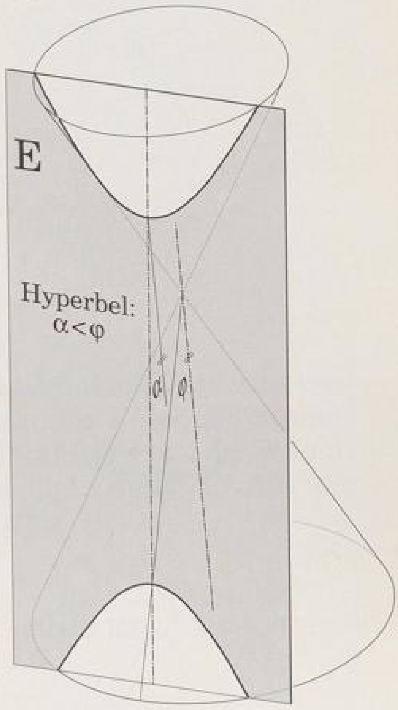
Zeige: Bewegt man einen rechten Winkel (Geodreieck!) so, dass sein Scheitel auf dem Hauptkreis wandert und ein Schenkel durch F_2 geht, dann ist der andere Schenkel Tangente der Ellipse.

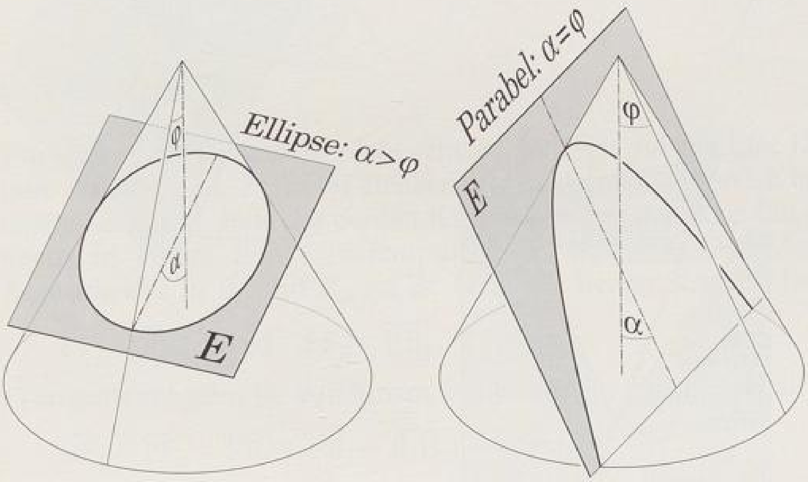
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

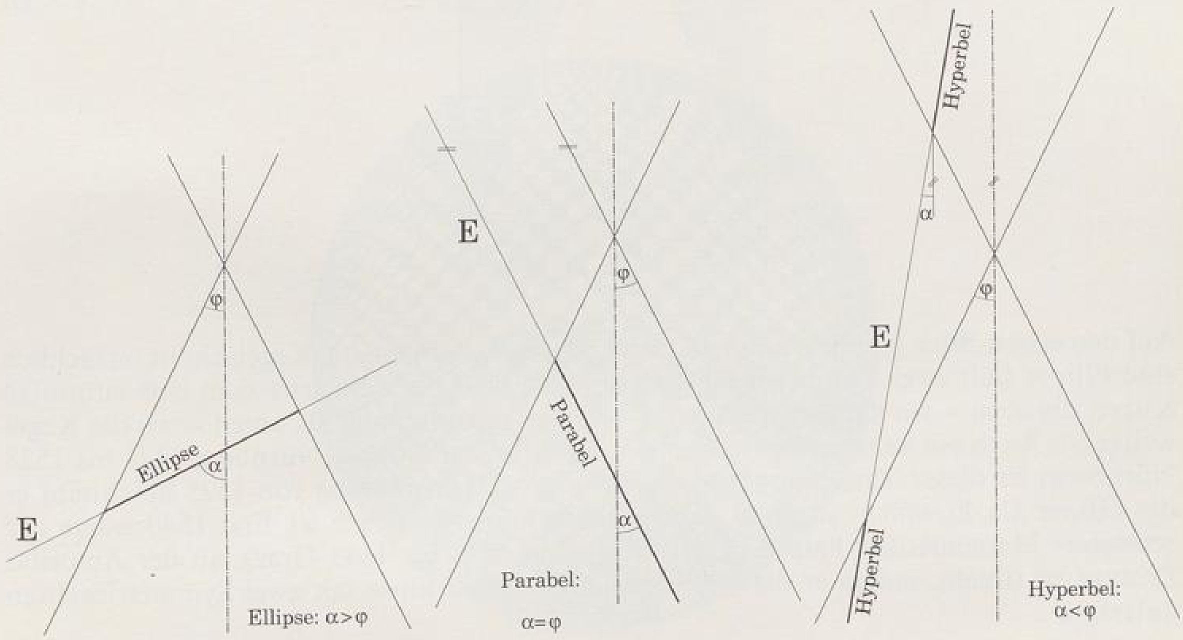
II. Kegelschnitte

1. Überblick

In der Vorbemerkung haben wir schon erwähnt, dass beim Schnitt von Kegel und Ebene drei Typen von Kurven entstehen können. Welcher entsteht, hängt ab
vom halben Öffnungswinkel φ des Kegels und
vom Winkel α, den Kegelachse und Schnittebene bilden:
für $\alpha > \varphi$ entsteht eine Ellipse,
für $\alpha = \varphi$ eine Parabel und
für $\alpha < \varphi$ eine Hyperbel.

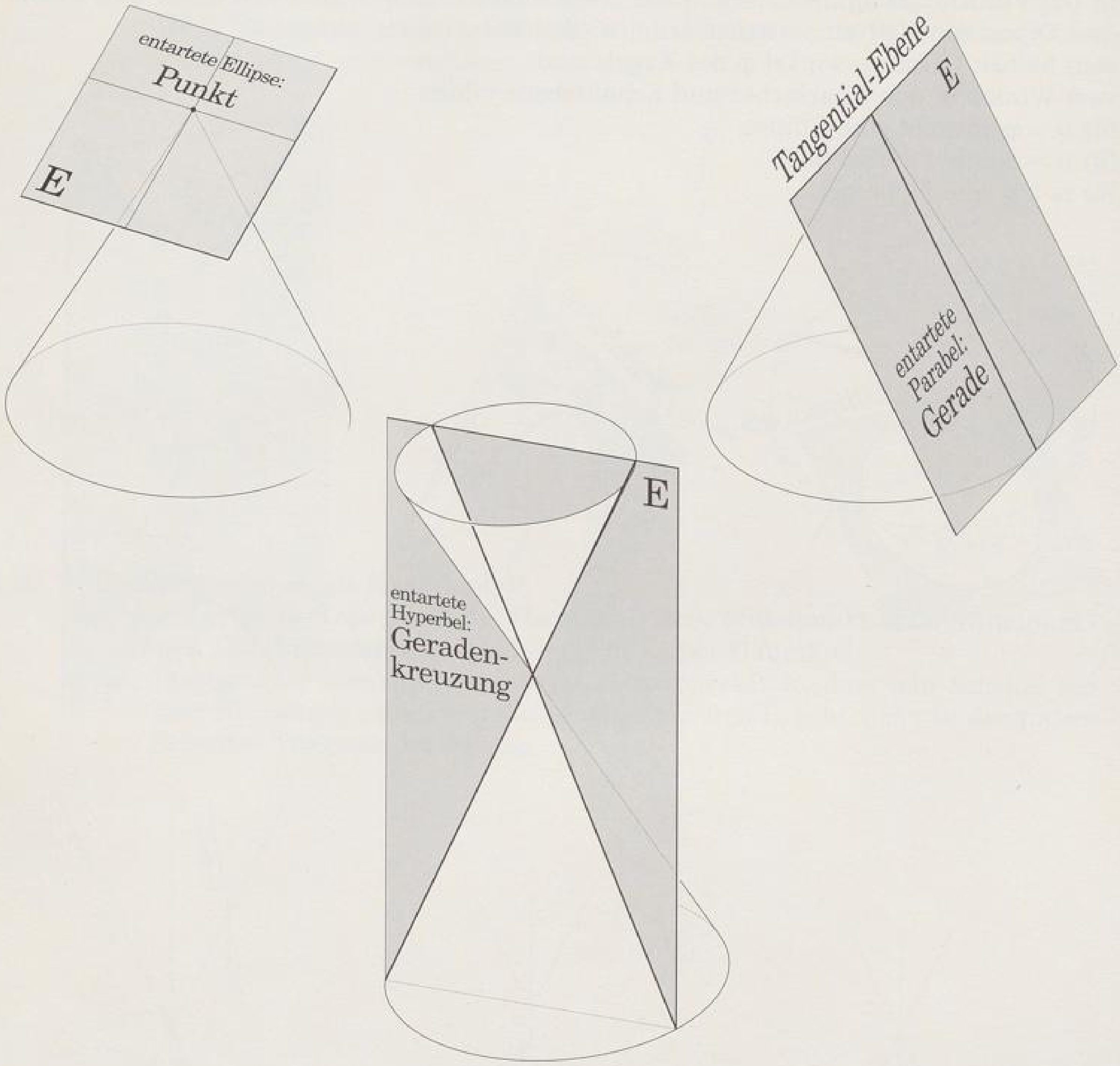






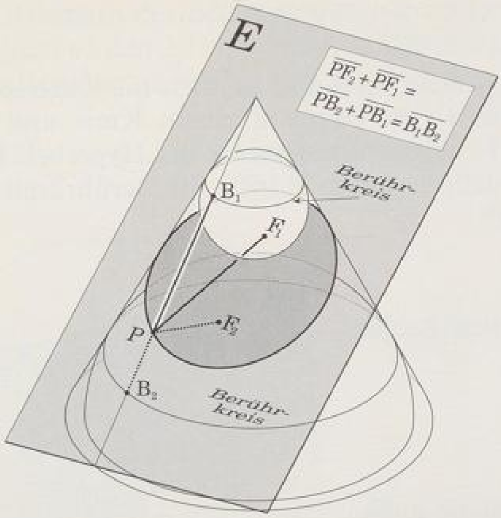
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

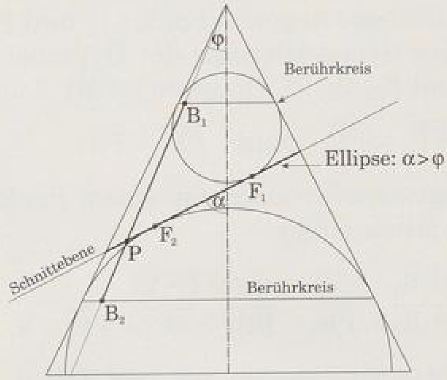
Wenn die Schnittebene die Kegelspitze enthält, dann entarten die Schnittkurven:
die Ellipse zu einem Punkt (Kegelspitze),
die Parabel zu einer Gerade (Mantellinie) und
die Hyperbel zu einer Geradenkreuzung (zwei Mantellinien).



Auf den ersten Blick glaubt man nicht recht, dass der geschlossene Kegelschnitt tatsächlich eine Ellipse (mit zwei Symmetrieachsen also) sein soll. Eher erwartet man eine eiförmige Kurve, die oben – wo der Kegel enger ist – stärker gekrümmt ist als unten – wo der Kegel weiter ist. Auch ein so scharfer Beobachter wie Albrecht DÜRER (Nürnberg 1471 bis 1528 Nürnberg) ist dieser Täuschung erlegen. In seiner *Underweysung* von 1525 beschreibt er die Ellipse als *Eierlini = darumb daß sie schier einem Ei gleich ist.* Erst 1640 wagte der schweizer Mathematiker Paul GULDIN (St. Gallen 1577 bis 1643 Graz), an der Autorität DÜRERS zu rütteln, indem er die wirkliche Gestalt der Ellipse mit zwei Symmetrieachsen aufzeigte.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN





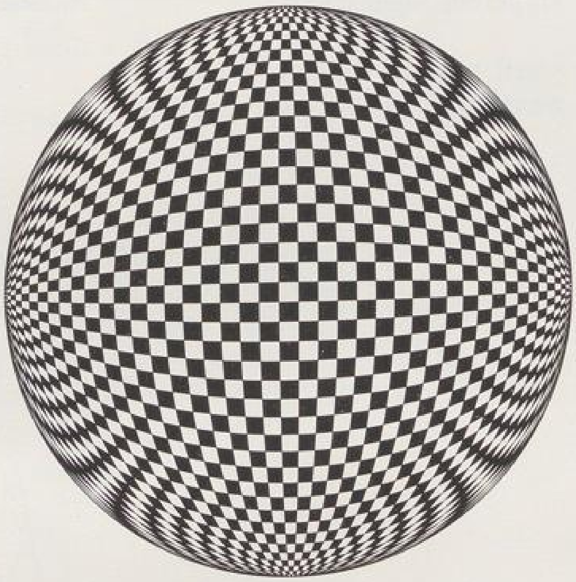
Für uns ist der Nachweis nicht schwer, weil wir auf die Idee Dandelins zurückgreifen können. Analog zum Zylinder stecken wir in den Kegel zwei Kugeln, die Kegel und Schnittebene berühren. Jede der beiden Kugeln berührt den Kegel in einem Kreis und die Schnittebene in einem Punkt (Brennpunkte F_1 und F_2). Die Mantellinie durch P trifft die Berührkreise in B_1 und B_2, sie ist Tangente beider Kugeln. Es gilt

$$\overline{PF_1} = \overline{PB_1} \quad \text{und} \quad \overline{PF_2} = \overline{PB_2}$$

(Tangentenabschnitte von einem Punkt aus an eine Kugel sind gleich lang.)

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = \overline{B_1B_2}\,(= \text{const.})$$

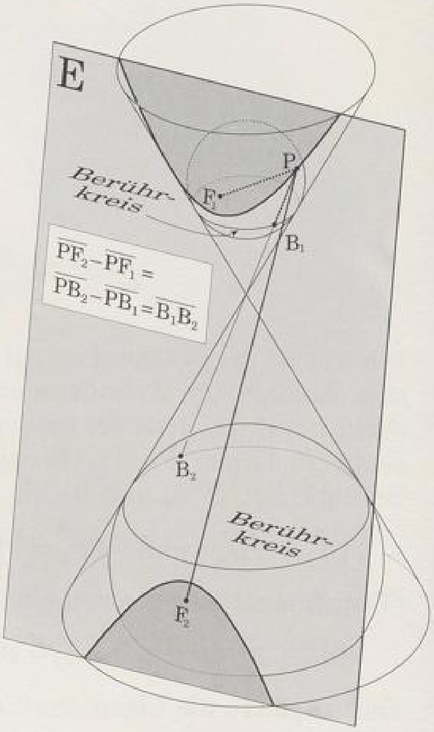
Das ist genau die Eigenschaft der Ellipse, die zur Gärtnerkonstruktion führt. (Siehe Kapitel 9. I, 3)



2. Die Hyperbel

Wieder stecken wir in den Kegel zwei Dandelin-Kugeln, jetzt aber so, dass die Kegelspitze dazwischen liegt. Jede der beiden Kugeln berührt den Kegel in einem Kreis und die Schnittebene in einem Punkt: F_1 und F_2. F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte der Hyperbel.** F_1F_2 ist eine **Symmetrieachse** der Hyperbel. Die Mantellinie durch P trifft die Berührkreise in B_1 und B_2, sie ist Tangente beider Kugeln. Es gilt

$$\overline{PF_1} = \overline{PB_1} \quad \text{und} \quad \overline{PF_2} = \overline{PB_2}$$



(Tangentenabschnitte von einem Punkt aus an eine Kugel sind gleich lang.)

$\overline{B_1B_2}$ ist konstant (= k)

$$\overline{B_1B_2} = \overline{PB_2} - \overline{PB_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = k \qquad ①$$

Die Hyperbel besteht aus zwei Teilen, man nennt sie auch **Äste** der Hyperbel. Liegt P auf dem bei F_2 liegenden Ast, dann ergibt eine entsprechende Überlegung

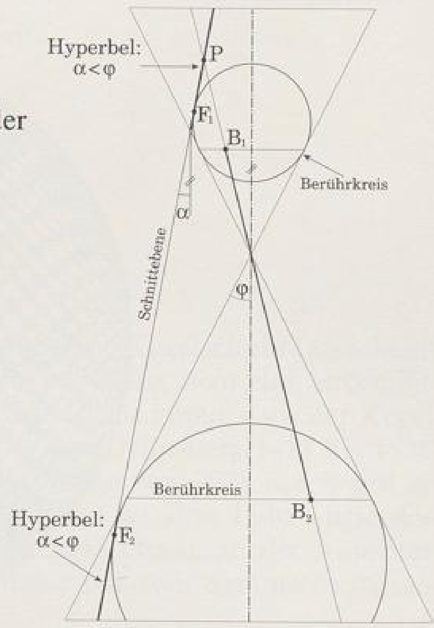
$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k \qquad ②$$

Die Gleichungen ① und ② lassen sich zur kennzeichnenden Eigenschaft der Hyperbel zusammenfassen:

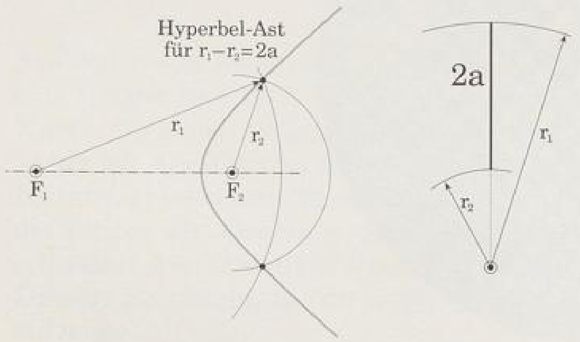
$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = k\,.$$

Für jeden Hyperbelpunkt P ist der Betrag der Differenz seiner Entfernungen von F_1 und F_2 eine Konstante. Diese Definition unterscheidet sich von der der Ellipse nur im Rechenzeichen! Wie bei der Ellipse bezeichnet man die Konstante k mit 2a

$$\boxed{\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a} \quad \text{Hyperbel-Eigenschaft}$$

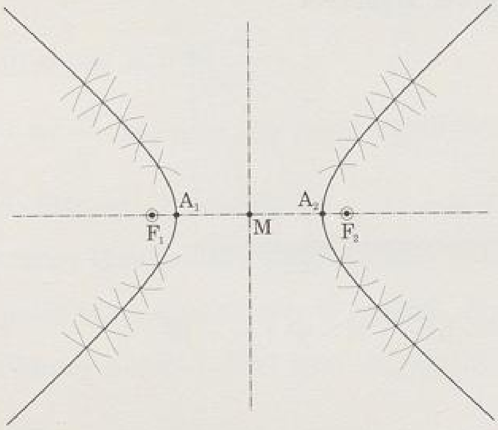


Aufgrund dieser Eigenschaft können wir jetzt Punkte der Hyperbel konstruieren, wenn F_1, F_2 und a bekannt sind.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Betrag in der Bedingung $|r_1 - r_2| = 2a$ erlaubt eine Vertauschung von r_1 und r_2 und ermöglicht so den 2. Hyperbel-Ast. Dieser ist symmetrisch zum 1. Ast, Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte von F_1 und F_2.



Bezeichnungen

Das Symmetriezentrum M heißt **Mittelpunkt** der Hyperbel.
Die Schnittpunkte A_1, A_2 von Hyperbel und einer Symmetrieachse heißen **Scheitel**. Dabei gilt

$$\overline{A_1F_2} - \overline{A_1F_1} = 2a \quad \text{oder wegen} \quad \overline{A_1F_1} = \overline{A_2F_2}$$

$$\underbrace{\overline{A_1F_2} - \overline{A_2F_2}}_{\overline{A_1A_2}} = 2a$$

$$\overline{A_1A_2} = 2a$$

$\overline{A_1M} - \overline{MA_2} = a$, a heißt **reelle Halbachse**.

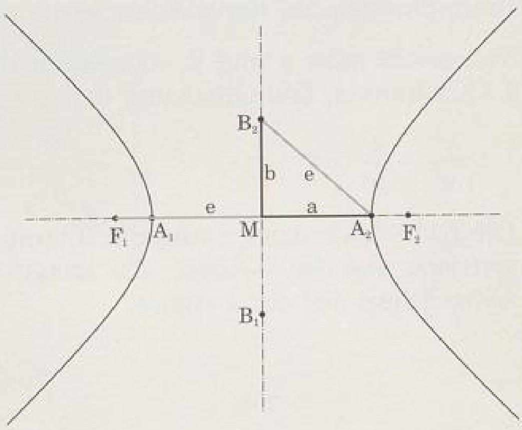
$\overline{F_1M} = \overline{F_2M} = e$, e heißt **lineare Exzentrizität**.

$\frac{a}{b} = \varepsilon$, ε heißt **numerische Exzentrizität**.

Ähnlich wie bei der Ellipse definiert man eine zweite Halbachse b durch

$$\boxed{b^2 = e^2 - a^2}$$

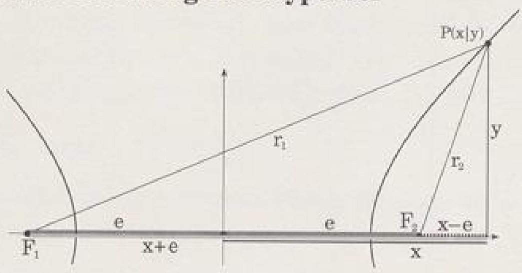
Trägt man b von M aus auf der 2. Symmetrieachse ab, so ergeben sich zwei Punkte B_1 und B_2, die aber nicht auf der Hyperbel liegen. Deshalb nennt man b **imaginäre Halbachse**. Im Gegensatz zur Ellipse muss hier a nicht größer sein als b.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ähnlich wie bei der Ellipse lassen sich auch die Punkte der Hyperbel mit einer Gleichung festlegen. Wir verwenden dafür nur die Beziehung $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$.

Die Mittelpunkt-Gleichung der Hyperbel



$r_1^2 = y^2 + (x+e)^2 \qquad e^2 = a^2 + b^2 \qquad r_2^2 = y^2 + (x-e)^2$

$$\begin{aligned}
|r_1 + r_2| &= 2a \\
r_1 &= \pm 2a - r_2 \quad \| \text{ quadrieren} \\
r_1^2 &= 4a^2 \pm 4ar_2 + r_2^2 \\
\cancel{y^2} + (x+e)^2 &= 4a^2 \pm 4ar_2 + \cancel{y^2} + (x-e)^2 \\
\cancel{x^2} + 2xe + \cancel{e^2} &= 4a^2 \pm 4ar_2 + \cancel{x^2} - 2xe + \cancel{e^2} \\
xe - a^2 &= \pm ar_2 \quad \| \text{ quadrieren} \\
e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 &= a^2\,[y^2 + (x-e)^2] \\
e^2x^2 - \cancel{2a^2ex} + a^4 &= a^2y^2 + a^2x^2 - \cancel{2a^2ex} + a^2e^2 \\
x^2\,\underbrace{(e^2 - a^2)}_{b^2} - y^2a^2 &= a^2\,\underbrace{(e^2 - a^2)}_{b^2} \\
b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \quad \| \; : (a^2b^2)
\end{aligned}$$

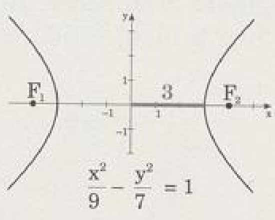
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

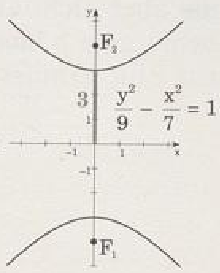
Das ist die Mittelpunkt-Gleichung der Hyperbel mit der reellen Halbachse a und den Brennpunkten auf der x-Achse sowie der imaginären Halbachse b auf der y-Achse.

Vertauscht man x und y, so spiegelt man die Hyperbel an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten. Die Gleichung der so gespiegelten Hyperbel ist

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Die reelle Halbachse a und die Brennpunkte liegen jetzt auf der y-Achse, die imaginäre Halbachse b liegt auf der x-Achse.





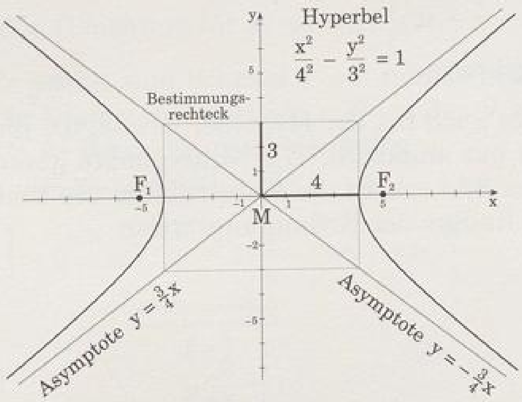
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Asymptoten der Hyperbel

Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ lässt sich umformen zu $|y| = \frac{b}{a}|x|\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$. Speziell im I. Quadranten $(x > 0,\ y > 0)$ ergibt sich $y = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$.

Für sehr große Werte von x ist $\frac{a^2}{x^2}$ fast null, das heißt, die Hyperbel unterscheidet sich fast nicht mehr von der Gerade mit der Gleichung $y = \frac{b}{a}x$. Aus Symmetriegründen gilt das Entsprechende in den anderen Quadranten. Die beiden Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}x$ heißen **Asymptoten** der Hyperbel. Es gilt: Für große $|x|$-Werte (also auch für große $|y|$-Werte) unterscheidet sich die Hyperbel kaum noch von ihren Asymptoten.

Wegen $\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} < \frac{b}{a}x$ (für $x > 0$) verläuft die Hyperbel im I. Quadranten immer unterhalb ihrer Asymptote. In größerer Entfernung von den Scheiteln geben die Asymptoten den Verlauf der Hyperbel im Groben wieder. Man zeichnet die Asymptoten als Verlängerungen der Diagonalen des *Bestimmungsrechtecks* mit Mittelpunkt M und den Seiten 2a und 2b.



Hyperbel:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Asymptoten:	$y = \pm\frac{b}{a}x$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

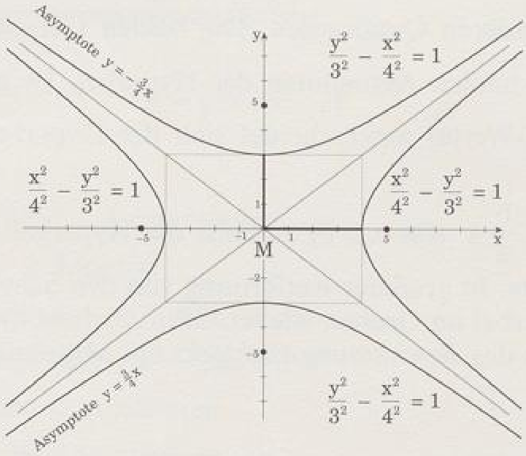
Zu einem Bestimmungsdreieck gibt es zwei Hyperbeln mit denselben Asymptoten.

Die eine hat die Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

ihre reelle Halbachse ist a, ihre Brennpunkte liegen auf der x-Achse.

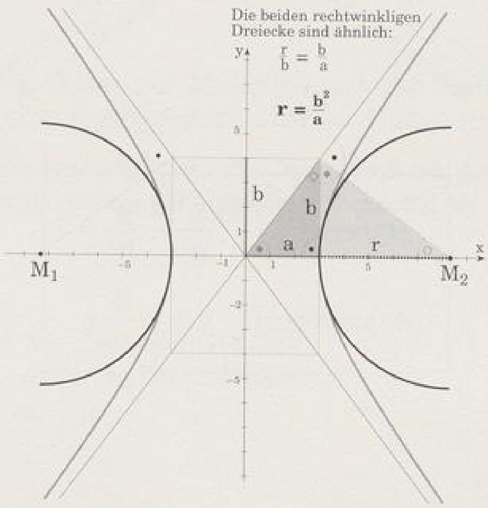
Die andre hat die Gleichung $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

ihre reelle Halbachse ist b, ihre Brennpunkte liegen auf der y-Achse.

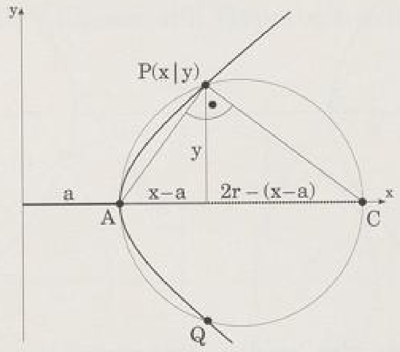


* Die Scheitel-Krümmungskreise

Wie bei der Ellipse gibt es auch bei der Hyperbel Kreise, die die Hyperbel in der Umgebung ihrer Scheitel recht gut annähern. Die Mittelpunkte liegen aus Symmetriegründen auf der reellen Achse. Das Bild erklärt die Konstruktion des Mittelpunkts und die Herleitung der Formel für den Radius der Krümmungskreise.



Die mathematische Begründung ist ähnlich wie bei der Ellipse.
Ein Kreis mit Mittelpunkt auf der x-Achse, der durch einen Hyperbelscheitel geht, schneidet die Hyperbel im Allgemeinen in zwei weiteren Punkten P und Q.



Für die Koordinaten von P und Q gelten zwei Gleichungen:

I. $y^2 = (x - a)(2r - x + a)$ (Höhensatz im Dreieck ACP)

II. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ (Hyperbelgleichung)

Gleichsetzen liefert: $(x - a)(2r - x + a) = \frac{b^2}{a^2}(x - a)(x + a)$

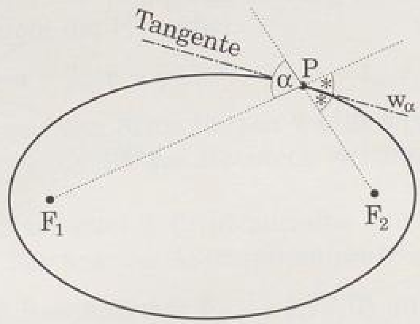
das ergibt eine quadratische Gleichung für x: $(x - a)\left[(2r - x + a) - \frac{b^2}{a^2}(x + a)\right] = 0$.

Eine Lösung ist $x_1 = a$, sie gehört zum Scheitel. r soll nun so bestimmt werden, dass auch die 2. Lösung x_2, für die die Klammer [...] gleich null ist, den Wert a hat. Geometrisch bedeutet das, dass die Punkte A, P und Q zusammenfallen.
Setzen wir in [...] a für x ein, so ergibt sich für r

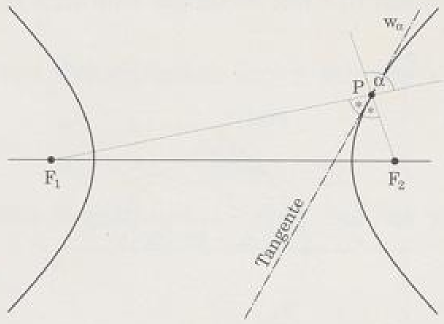
$$\left[(2r - a + a) - \frac{b^2}{a^2}(a + a)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r = 2\frac{b^2}{a} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{b^2}{a}$$

*Tangenten der Hyperbel

Bei der Ellipse ist die Winkelhalbierende des Außenwinkels bei P im Dreieck F_1F_2P Tangente im Punkt P.



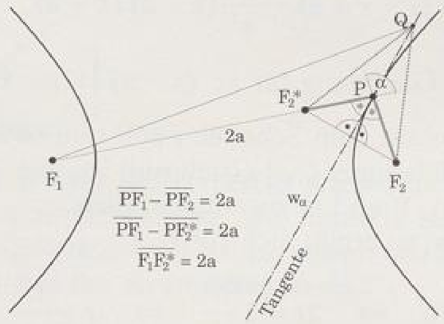
Ähnliches gilt bei der Hyperbel: Die Halbierende des Innenwinkels bei P im Dreieck F_1F_2P ist Tangente im Punkt P.



Zum Beweis spiegelt man einen der beiden Brennpunkte an der Winkelhalbierenden w_α (Spiegelpunkt F_2^*). Wegen Achsensymmetrie ist $\overline{PF_2} = \overline{PF_2^*}$.
Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt dann (Dreieck-Ungleichung!):

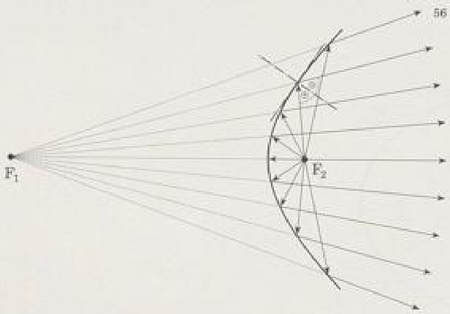
$$\overline{QF_1} - \overline{QF_2} = \overline{QF_1} - \overline{QF_2^*} < \overline{QF_2^*} + \overline{F_1F_2^*} - \overline{QF_2^*} = \overline{F_1F_2^*} = 2a$$

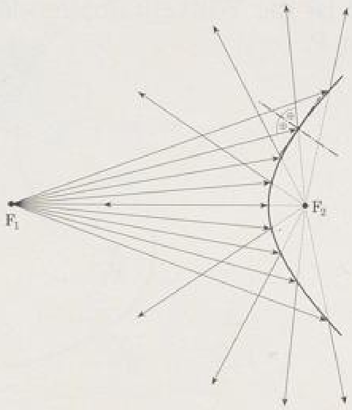
Also gilt $\overline{QF_1} - \overline{QF_2} < 2a \Rightarrow$ Q liegt nicht auf der Hyperbel $\Rightarrow w_\alpha$ ist Tangente im Punkt P.



Folgerungen

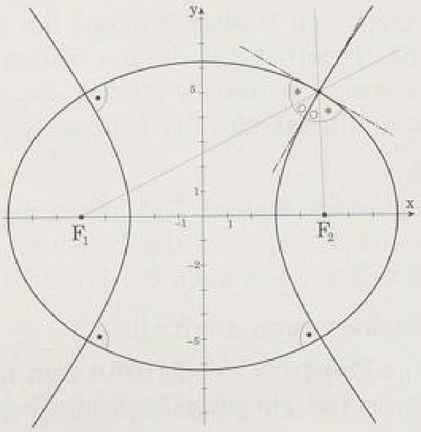
a) Licht, das von einem Brennpunkt ausgeht, wird an der Hyperbel so reflektiert, als ob es vom andern Brennpunkt käme.





UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

b) Zeichnet man zu zwei gegebenen Brennpunkten eine zugehörige Ellipse und Hyperbel, so schneiden sich diese in vier Punkten. In jedem Schnittpunkt sind die Tangenten von Hyperbel beziehungsweise Ellipse die Winkelhalbierenden des Innen-, beziehungsweise Außenwinkels der Brennstrahlen, das heißt, sie stehen aufeinander senkrecht. Man sagt auch: Konfokale Ellipsen und Hyperbeln schneiden sich rechtwinklig.



Hyperbel-Aufgaben

Bis auf Aufgabe **12.** liegen alle erwähnten Hyperbeln symmetrisch zum Ursprung und haben die Brennpunkte auf der x-Achse.

1. Zeichne die zwei Hyperbeln mit $a = 2$, $b = 1$ und $a = 4$, $b = 3$ in ein und dasselbe Koordinatensystem und berechne die Schnittpunkte.

2. Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel h mit $A_2(4|0)$ durch $P(5|3)$?

3. Bestimme die Gleichung der Hyperbel; zeichne die Scheitel, die Brennpunkte und die Asymptoten; skizziere die Hyperbel.

a) $a = 3,\ b = 4$ **b)** $a = 2,\ e = \sqrt{13}$ **c)** $b = 1,\ e = \sqrt{2}$

4. Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 6 (waagrecht). Skizziere die Hyperbeln, für die das Rechteck Bestimmungsrechteck ist.

5. Eine Hyperbel hat den Scheitel $A_2(2|0)$ und den Brennpunkt $F_2\left(2\sqrt{2}\,|0\right)$. Bestimme a, b und e. Zeichne die Asymptoten und skizziere die Hyperbel.

6. Eine Hyperbel hat die Brennpunkte $F_{2,1}(\pm 3{,}75|0)$ und geht durch $P(5|3)$. Konstruiere die Scheitel, die Asymptoten und skizziere die Hyperbel.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

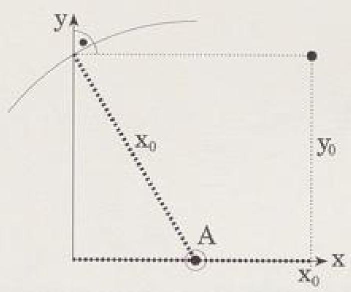
7. Eine Hyperbel hat die Asymptoten $y = \pm 2{,}4x$ und einen Scheitel $A_1(-2{,}5|0)$. Bestimme a, b und e. Skizziere die Hyperbel.

8. Die Gerade durch $P(1|0)$ und $Q(-2|-3)$ berührt eine Hyperbel mit den Brennpunkten $F_{2,1}(\pm 3|0)$. Konstruiere den Berührpunkt B, die Scheitel und die Asymptoten; skizziere die Hyperbel.

9. Die Mittelpunkte zweier Kreise mit Radius 2 haben die Entfernung 5.
Zeichne die Ellipse und die Hyperbel, für die die beiden Kreise Krümmungskreise sind. Anleitung: Berechne jeweils a und b, zeichne die Asymptoten der Hyperbel und die andern beiden Krümmungskreise der Ellipse. (Für die Ellipse: Mittelpunkt $M(0|0)$, Querformat)

10. Die Mittelpunkte zweier Kreise mit Radius 2,25 haben die Entfernung 12,5. Zeichne die Kreise und *konstruiere* die Asymptoten der Hyperbel, für die die beiden Kreise Krümmungskreise sind. Skizziere dann auch die Hyperbel.

11. Eine Hyperbel heißt **gleichseitig**, wenn $a = b$ gilt.
   a) Zeichne eine gleichseitige Hyperbel mit $M(0|0)$ und $a = 2$. Berechne e und den Krümmungskreis-Radius r und gib die Gleichungen der Asymptoten an.
   b) Begründe folgende Konstruktion für die Punkte $(x_0|y_0)$ einer gleichseitigen Hyperbel.



12. Zeichne die Halbachsen und die Lage der Brennpunkte einer Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ (siehe auch Aufgabe 19.).

13. Zeige:
Für den Punkt $P(e|p)$ über dem Brennpunkt von Ellipse (Mittelpunkt $M(0|0)$, Querformat) oder Hyperbel gilt

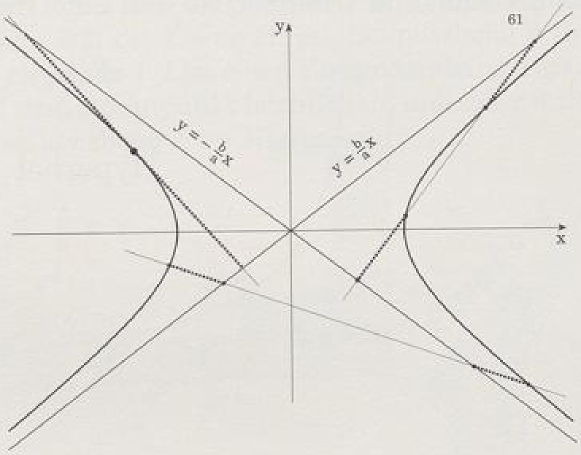
$$p = \frac{b^2}{a}$$

p heißt **Formparameter**. p ist auch der Radius der Krümmungskreise.

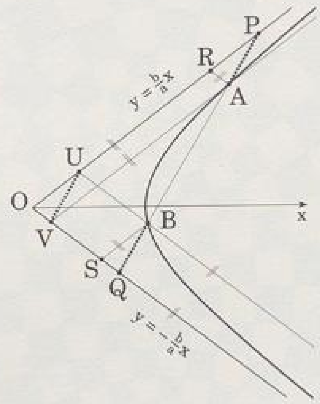
14. Gegeben sind die Hyperbel $h\colon\ 4x^2 - 9y^2 = 16^2$ und die Gerade $g\colon\ y = 2x - 24$.
   a) Berechne die Schnittpunkte A und B der Gerade und der Hyperbel.
   b) Berechne die Schnittpunkte P und Q der Gerade und der Hyperbel-Asymptoten.
   •c) Berechne den Mittelpunkt M_{AB} von [AB] und M_{PQ} von [PQ]. Folgerung?

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

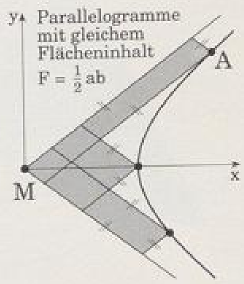
15. Gegeben sind die Hyperbel h: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ und die Gerade g: $y = mx + t$. A und B seien die Schnittpunkte von g und h, P und Q seien die Schnittpunkte von g und den Hyperbel-Asymptoten. Berechne die x-Werte der Mittelpunkte von [AB] und [PQ] – VIETA erspart viel Rechnerei! – und begründe damit den Satz: Bei jeder Hyperbel-Sekante sind die beiden Abschnitte zwischen Hyperbel und Asymptote gleich lang.



16. A und B seien Punkte der Hyperbel h: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
Zeige mit Hilfe des Satzes der vorigen Aufgabe: Die Parallelogramme OVAR und OSBU sind flächengleich.
Folgere dazu zunächst aus dem Satz der vorigen Aufgabe, dass die Strecken [AB], [BQ] und [UV] gleich lang und parallel sind.



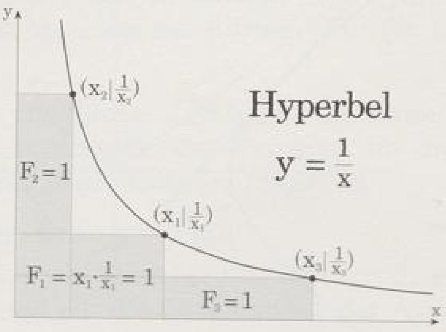
17. 1. Flächensatz
Zeige:
Zeichnet man durch einen Hyperbelpunkt A die Parallelen zu den Asymptoten, so entsteht ein Parallelogramm mit den Gegenecken A und M (Mittelpunkt der Hyperbel). Dieses Parallelogramm hat für jeden Hyperbelpunkt den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ ab.



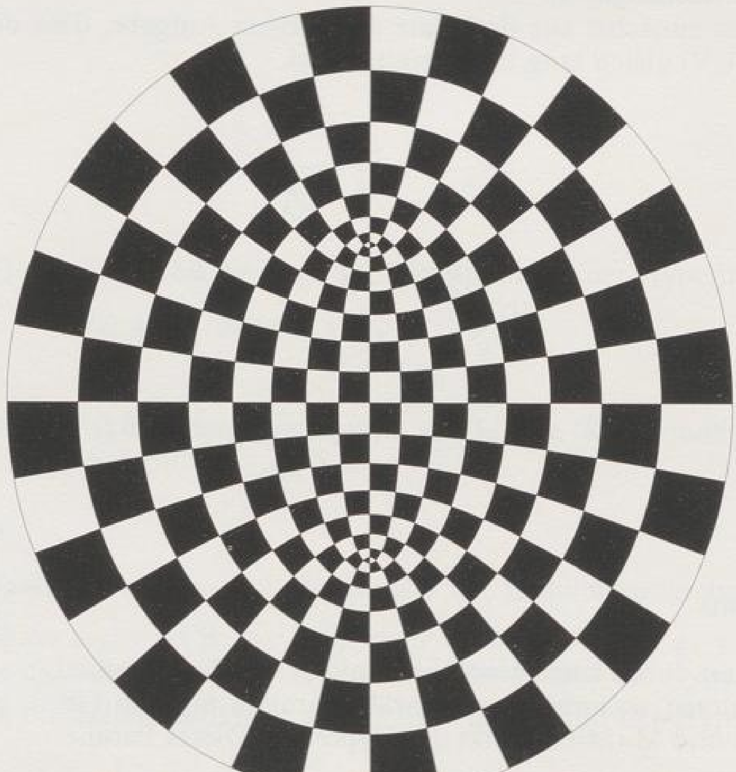
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

18. Umkehrung des 1. Flächensatzes
Zeige:
Vom 1. Flächensatz gilt auch die Umkehrung:
Zeichnet man in einen Winkel flächengleiche Parallelogramme, bei denen eine Ecke im Scheitel liegt und die Seiten parallel zu den Schenkeln sind, dann liegen die freien Ecken auf einem Hyperbelast.

19. Zeige: Der Graph der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel. Was sind ihre Asymptoten?
(Tip: **17.** und **18.**)



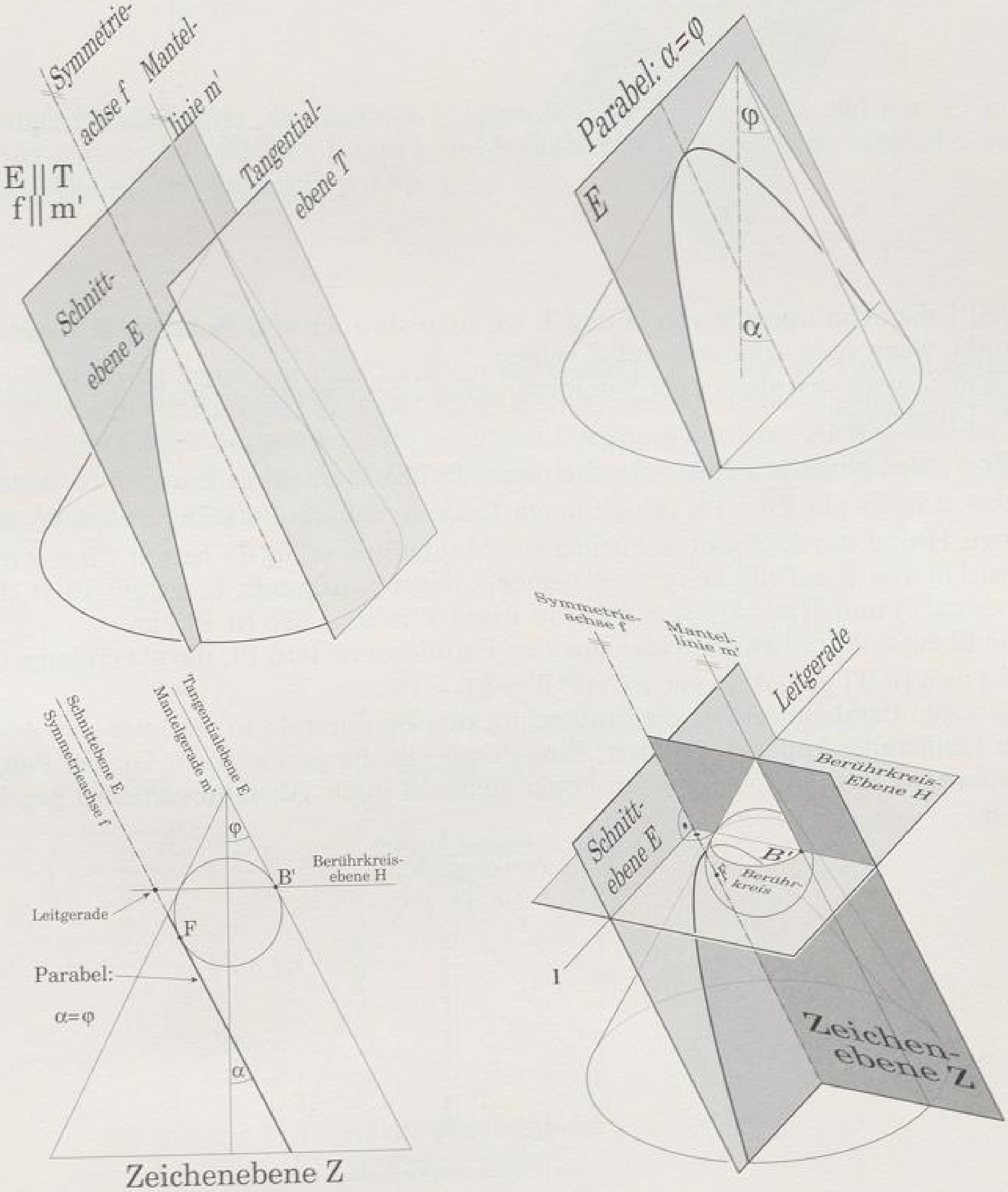
20. 2. Flächensatz
Zeige:
Jede Hyperbel-Tangente und die Asymptoten schließen ein Dreieck vom Flächeninhalt $a\cdot b$ ein.



3. Die Parabel

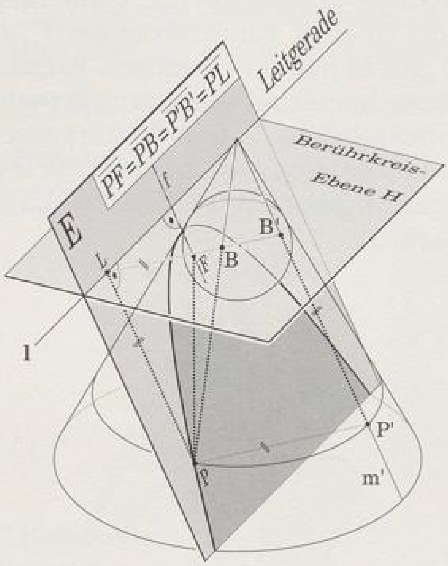
Brennpunkt und Leitgerade

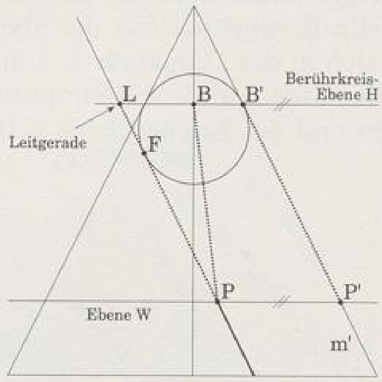
Eine Ebene, die mit einem Kegel genau eine Mantellinie gemeinsam hat, heißt **Tangentialebene**. Schneidet eine Ebene E einen Kegel parallel zu einer Tangentialebene T, so ergibt sich als Kegelschnitt eine Parabel. In diesem Fall gibt es nur eine Dandelin-Kugel. Sie berührt den Kegel in einem Kreis und die Schnittebene in einem Punkt, dem **Brennpunkt F**. Der Dandelin-Berührkreis legt die Ebene H fest. Schnittebene E und Berührkreisebene H schneiden sich in der **Leitgerade 1**. Um einen Zusammenhang zwischen den Parabelpunkten, der Leitgerade und dem Brennpunkt herzuleiten, müssen wir uns über die Lage dieser drei Ebenen und der Zeichenebene Z im Klaren sein:



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

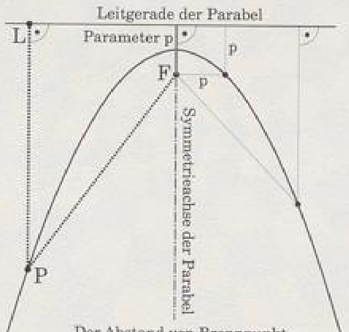
Die Tangentialebene T berührt den Kegel in der Mantellinie m′.
m′ und die Kegelachse bestimmen die Zeichenebene Z.
Schnittebene E, Tangentialebene T und Berührkreisebene H stehen senkrecht auf Z; man sieht E, T und H deshalb als Geraden, wenn man senkrecht auf die Zeichenebene Z schaut.





Weil l die Schnittgerade von H und E ist, steht sie auch senkrecht auf Z; sie erscheint als Punkt, wenn man senkrecht auf Z schaut.
E und Z schneiden sich in der Symmetrieachse f der Parabel; deshalb steht f senkrecht auf der Leitgerade l.

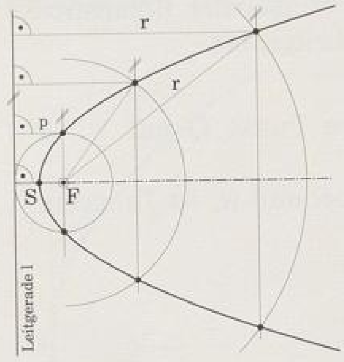
Wir wählen einen beliebigen Parabelpunkt P. Die Mantellinie durch P trifft den Berührkreis in B. Es gilt $\overline{PF} = \overline{PB}$ (gleich lange Tangentenabschnitte). Die Ebene W, die parallel ist zu H und durch P geht, schneidet die Mantellinie m′ in B′. Es gilt $\overline{PB} = \overline{P'B'}$.
Das Lot von P auf die Leitgerade l erzeugt den Lotfußpunkt L. Es gilt PL∥f (beide sind Lote auf l) und f∥m′ (Z schneidet E in f und T in m′), also ist PL∥m′.
Die Ebenen W und H schneiden aus den Parallelen m′ und PL die gleich langen Strecken [PL] und [P′B′] aus. Also gilt $\overline{\mathbf{PL}} = \overline{P'B'} = \overline{PB} = \overline{\mathbf{PF}}$.
Für jeden Parabelpunkt ist die Entfernung vom Brennpunkt so groß wie sein Abstand von der Leitgerade. Anders formuliert: Eine Parabel ist der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernung von einem gegebenen Punkt gleich ist ihrem Abstand von einer gegebenen Gerade.



Der Abstand von Brennpunkt und Leitgerade heißt **Parameter p.**

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

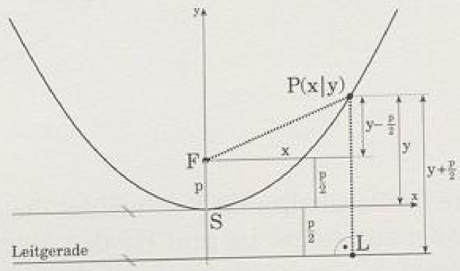
Diese Eigenschaft gibt uns eine einfache Möglichkeit, Parabelpunkte zu konstruieren, wenn die Leitgerade l und der Brennpunkt F gegeben sind: Man schneidet eine Parallele zur Leitgerade im Abstand r mit einem Kreis um F mit Radius r.



S ist derjenige Parabelpunkt, der von der Leitgerade den kleinsten Abstand hat. Er halbiert die Abstandstrecke zwischen F und l und heißt **Scheitel** der Parabel. Scheitel S und Brennpunkt F haben die Entfernung 0,5 p.

Die Scheitelgleichung der Parabel

Im Algebra-Unterricht haben wir die Kurve mit der Gleichung $y = ax^2$ als Parabel kennen gelernt. Wir müssen jetzt zeigen, dass der Kegelschnitt, den wir Parabel genannt haben, auch einer solchen Gleichung genügt. Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitel und die y-Achse durch den Brennpunkt. Aus der Eigenschaft $\overline{PF} = \overline{PL}$ leiten wir die Parabelgleichung her.



$$\overline{PF} = \overline{PL}$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2} \quad \| \text{ quadrieren}$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - yp + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{y^2} + yp + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

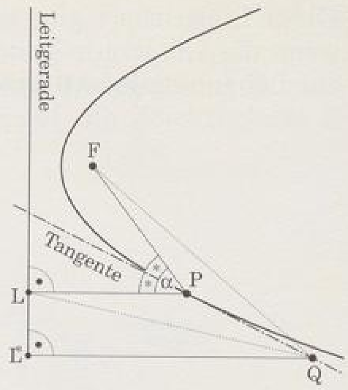
$$x^2 = 2py$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2p} x^2} \quad \text{Scheitelgleichung der Parabel}$$

*Tangenten der Parabel

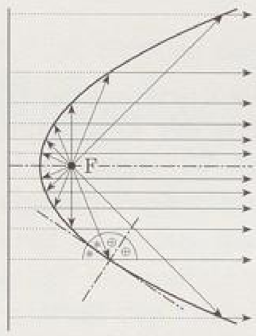
Wie bei Ellipse und Hyperbel ist auch die Parabeltangente die Winkelhalbierende geeigneter Geraden: Im Parabelpunkt P halbiert sie den Winkel der Brennstrecke [PF] und des Lots [PL] auf die Leitgerade.

Beweis
Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt: $\overline{QL^*} < \overline{QL} = \overline{QF}$.
Also liegt Q nicht auf der Parabel und w_α ist Tangente.

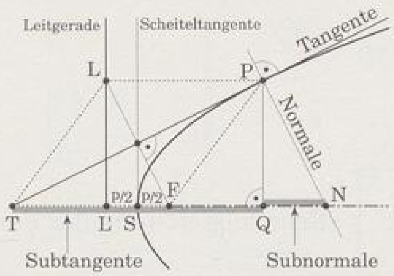


Folgerungen

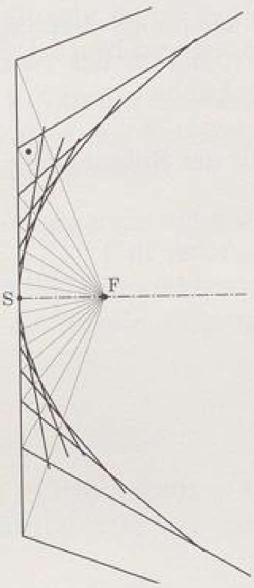
a) Licht, das vom Brennpunkt ausgeht, wird an der Parabel so reflektiert, dass es die Parabel senkrecht zur Leitgerade, also parallel zur Achse verlässt. (Scheinwerfer)
Umgekehrt: Strahlung, die parallel zur Achse einfällt, wird im Brennpunkt gebündelt. (Parabol-Antenne)



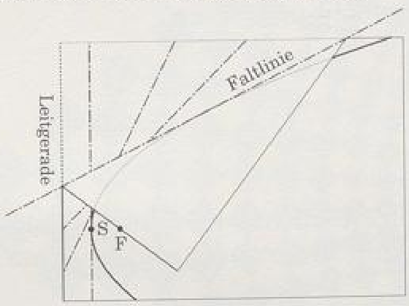
b) Die Tangente im Parabelpunkt P schneidet die Parabelachse im Punkt T. Weil $\overline{PL} = \overline{PF}$ und PL parallel zur Achse ist und PT den Winkel bei P halbiert, ist PLTF eine Raute. Der Mittelpunkt M der Raute liegt auf der Scheiteltangente, weil diese Mittelparallele im Dreieck FLL′ ist.

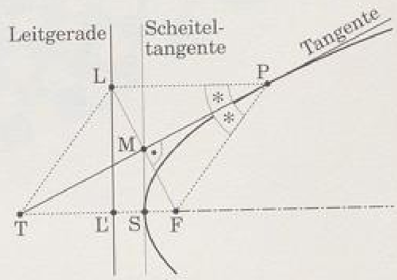


Auf dieser Eigenschaft beruht die Konstruktion der Parabel als Hüllkurve ihrer Tangentenschar: Man zeichnet die Scheiteltangente und den Brennpunkt. Gleitet der Scheitel eines rechten Winkels auf der Scheiteltangente und geht ein Schenkel durch den Brennpunkt, dann ist der andere Schenkel Tangente der Parabel.



Die Eigenschaft, dass die Parabeltangente den Winkel zwischen Brennstrecke und Lot auf die Leitgerade halbiert, liegt auch der folgenden Faltkonstruktion zu Grunde: Auf einem Blatt markiert man einen Punkt als Brennpunkt. Die Blattkante ist dann die Leitgerade. Faltet man das Blatt so, dass die Kante auf dem Brennpunkt zu liegen kommt, dann ist die Knicklinie eine Parabeltangente.





Aus dem Bild mit der Raute liest man auch ab:

$$\overline{TF} = \overline{LP} = \overline{SQ} + \frac{p}{2}$$

$$\overline{TF} = \overline{TS} + \frac{p}{2}$$

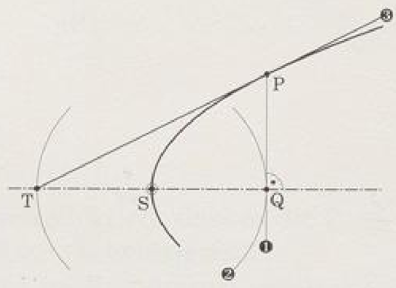
also ist $\overline{TS} = \overline{SQ}$, das heißt, S halbiert die **Subtangente** (senkrechte Projektion der Tangentenstrecke [PT] auf die Parabelachse).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Eigenschaft erlaubt eine einfache Konstruktion der Tangente in einem Parabelpunkt: Man projiziert den Berührpunkt P senkrecht auf die Achse, das ist Q. Q an S gespiegelt ergibt T. PT ist die gesuchte Tangente.
Die **Normale** in P (Lot auf die Tangente) schneidet die Achse in N.
Dann gilt $\overline{TF} = \overline{FN}$, weil LF Mittelparallele im Dreieck TPN ist.
Damit gilt auch $\overline{QN} = \overline{L'F} = p$, und wir haben den Satz:
Die **Subnormale** [QN] (senkrechte Projektion der Normalstrecke [PN] auf die Parabelachse) hat für alle Parabelpunkte die Länge p.

Konstruktion der Parabeltangente mit der Subtangente

① Lot auf P auf Achse: Q
② Kreis um S mit $r = \overline{SQ}$ schneidet Achse in T
③ PT ist Tangente

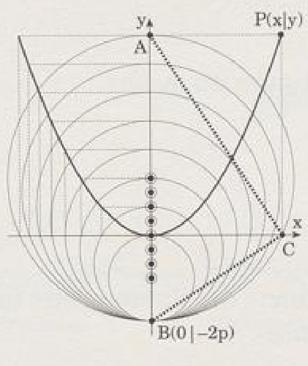


Aufgaben

1. Von einer Parabel ist der Brennpunkt F und die Leitgerade l bekannt.
Konstruiere einige Parabelpunkte und skizziere die Parabel.
Gib zur Kontrolle die fehlende Koordinate des Parabelpunkts P an.

a) l: $y = -1$ F(0|0) P(2|?)
b) l: $x = -1$ F(1|0) P(4|?)
c) l: $y = x$ F(2|−2) P(4|?)

2. Parabelkonstruktion von Werner
Der Nürnberger Geistliche Johannes Werner veröffentlichte in seinem Todesjahr 1522 eine einfache Konstruktion von Parabelpunkten. Beschreibe und begründe sie und führe sie für B(0|−3) aus.



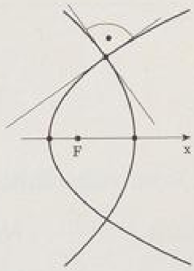
3. Zeige: Die Sehne, die im Brennpunkt senkrecht auf der Parabelachse steht, hat die Länge 2p.

4. Zeige: Für jeden Parabelpunkt P ist das Dreieck gleichschenklig, dessen Seiten auf Brennstrahl, Normale und Achse liegen.

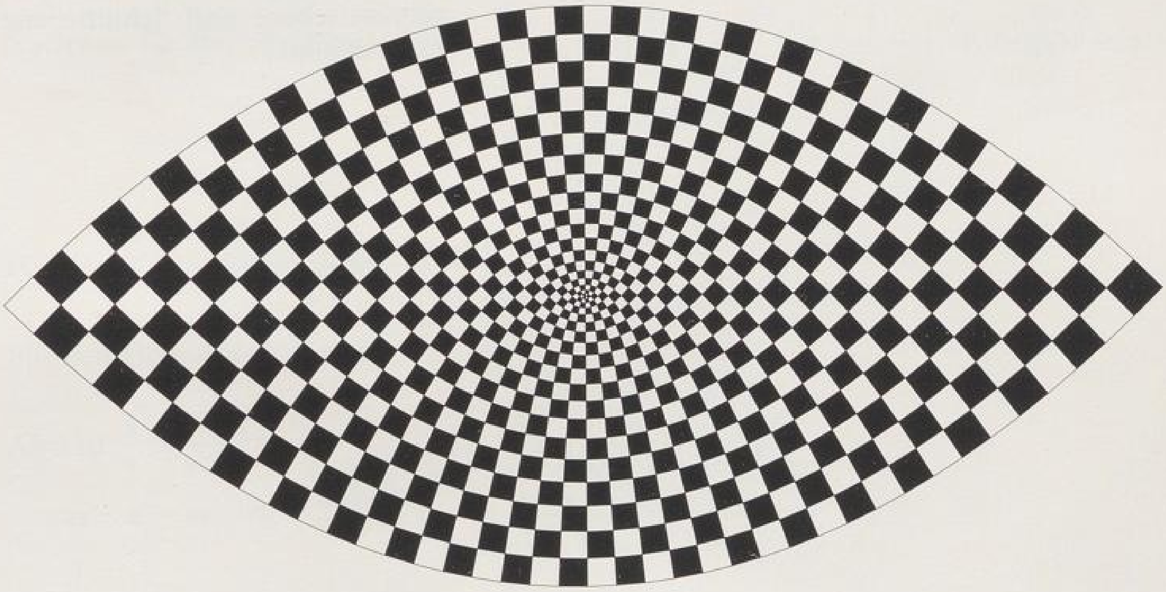
5. Eine Parabel mit Scheitel S(1|0) geht durch P(4|2); ihre Achse ist die x-Achse. Konstruiere die Tangente der Parabel P und bestimme aus der Zeichnung den Wert von p.

6. Eine Parabel mit Brennpunkt F(5|0) hat die Tangente mit der Gleichung $2y = x$; ihre Achse ist die x-Achse. Konstruiere den Scheitel, die Leitgerade und einige Parabelpunkte, darunter auch den Berührpunkt B.

7. Gegeben sind zwei konfokale entgegengesetzt geöffnete Parabeln mit gemeinsamer Achse.
Zeige: Die Tangenten in den Schnittpunkten stehen aufeinander senkrecht. (Dazu sagt man: Konfokale Gegenparabeln schneiden sich senkrecht.)



:8. Eine Parabel mit Brennpunkt F(2|0) hat die y-Achse als Leitgerade. Konstruiere diejenigen Parabelpunkte, die auf der Gerade mit der Gleichung $y = -x + 6$ liegen.

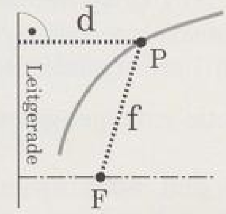


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

*4. Die Leitgerade

Auch bei Ellipse und Hyperbel gibt es Leitgeraden, die eine ähnliche Rolle spielen wie die Leitgerade der Parabel. Sie ergeben sich auch dort als Schnitt von Berührkreisebene und Schnittebene. Deshalb haben Ellipse und Hyperbel zwei Leitgeraden, für jeden Brennpunkt eine. Bezeichnen wir mit d den Abstand eines Kurvenpunkts P von der Leitgerade und mit f seine Entfernung vom Brennpunkt F, dann gilt für alle drei Kegelschnitt-Typen

$$\boxed{\frac{f}{d} \text{ ist konstant}}$$

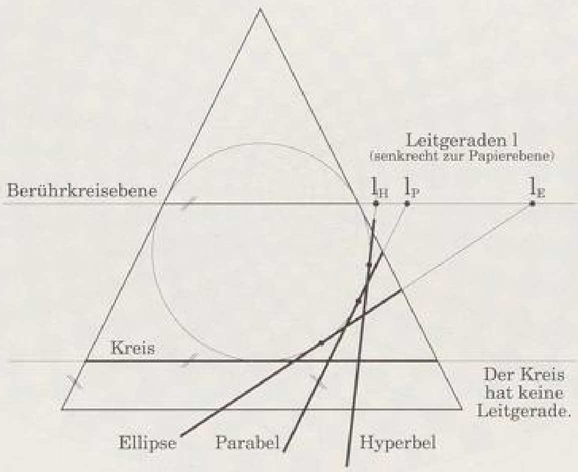


Diese Konstante ist bei Ellipse und Hyperbel nichts anderes als die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a}$. (Nachweis siehe unten)

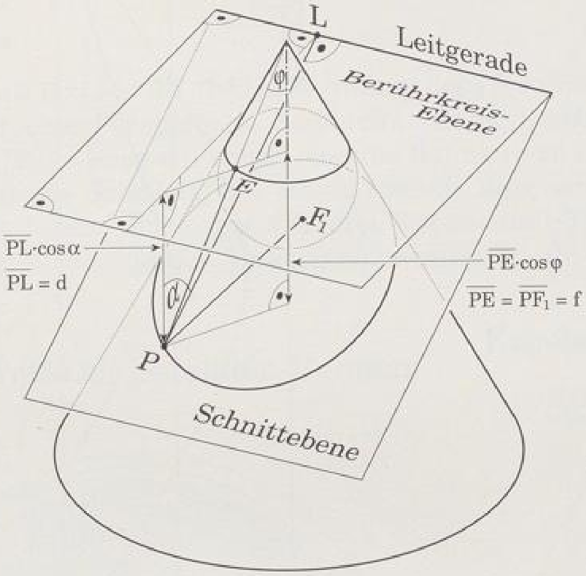
Je nach der Größe von ε bekommt man

- eine Ellipse $\varepsilon = \frac{f}{d} < 1$, also $f < d$
- eine Parabel $\varepsilon = \frac{f}{d} = 1$, also $f = d$
- eine Hyperbel $\varepsilon = \frac{f}{d} > 1$, also $f > d$

Allerdings lässt sich der Kreis als Sonderfall der Ellipse ($\varepsilon = 0$) nicht mit Leitgerade und Brennpunkt erzeugen, weil dann Berührkreisebene und Schnittebene parallel sind.



Zum Beweis der Konstanz von f/d bei der Ellipse projiziert man die Strecken [PL] und [PE] senkrecht auf die Kegelachse.

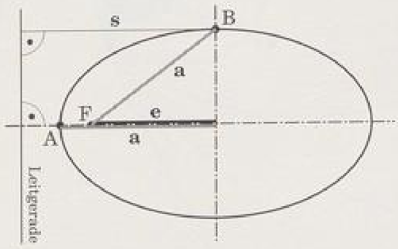


$$\overline{PL} \cdot \cos\alpha = \overline{PE} \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{f}{d} = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} \quad \text{(konstant)}$$

Für die Hyperbel läuft der Beweis entsprechend, bloß ist hier $\alpha = \varphi$, also $\cos\alpha > \cos\varphi$, also $\varepsilon > 1$.

Nachweis für die Gleichheit $\frac{f}{d} = \varepsilon$



im Bild ist
$a = 5$
$e = 4$
$\varepsilon = 0{,}8$
$s = 6{,}25$

Für den Nebenscheitel B gilt $\frac{f}{d} = \frac{a}{s}$

Für den Hauptscheitel A gilt $\frac{f}{d} = \frac{a-e}{s-a}$

Also ist $\frac{a}{s} = \frac{a-e}{s-a}$

$$as - a^2 = as - es$$

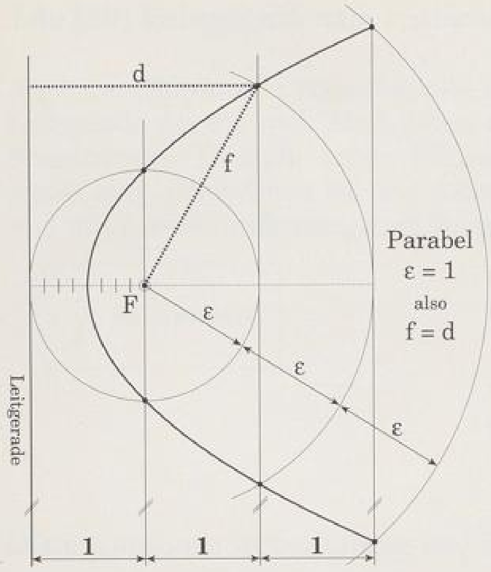
$$\frac{a}{s} = \frac{e}{a}$$

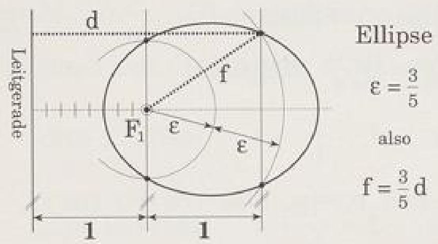
$$\downarrow \quad \downarrow$$

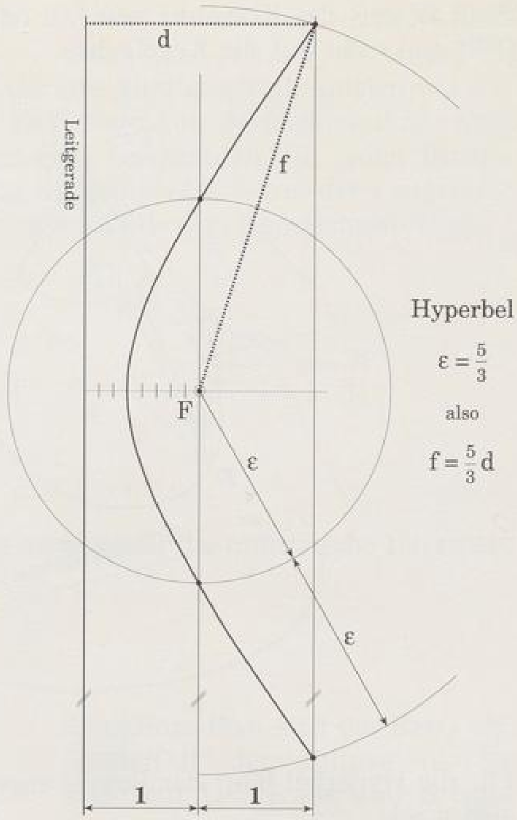
$$\frac{f}{d} = \varepsilon$$

Für die Hyperbel geht der Beweis entsprechend.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN







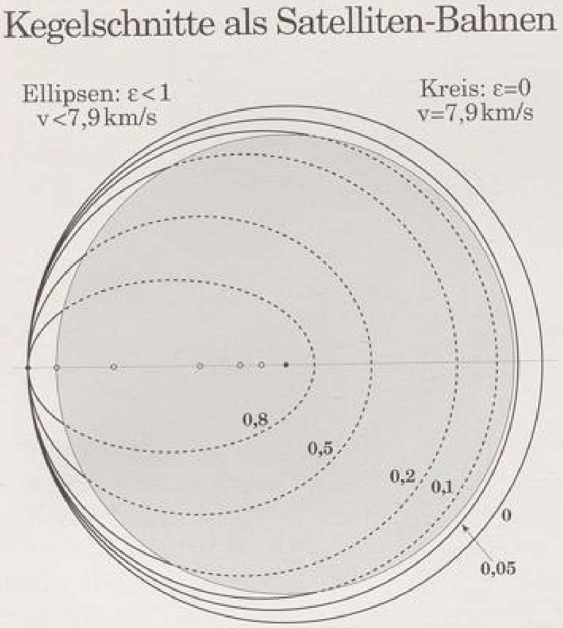
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

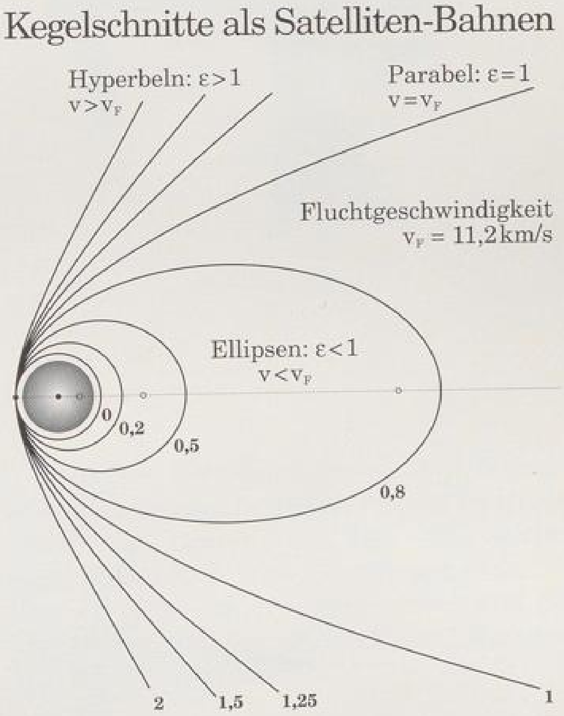
5. Anwendungen

Auf Kegelschnitte trifft man in Natur, Technik und Architektur.

Bahnkurven

Galileo Galilei (1564 bis 1642) hat Anfang des 17. Jahrhunderts erkannt, dass ein geworfener Körper eine Parabelbahn beschreibt. Dank Kepler (1571 bis 1630) und Newton (1643 bis 1727) wissen wir heute, dass die Bahnkurven eigentlich Ellipsen sind, die aber in der Gegend des Scheitels, des Abwurfpunkts also, sehr gut durch Parabeln angenähert werden. Es lassen sich sogar alle drei Kegelschnitt-Typen beim Werfen erzeugen. Ihre Form hängt allein von der Abwurfgeschwindigkeit ab.



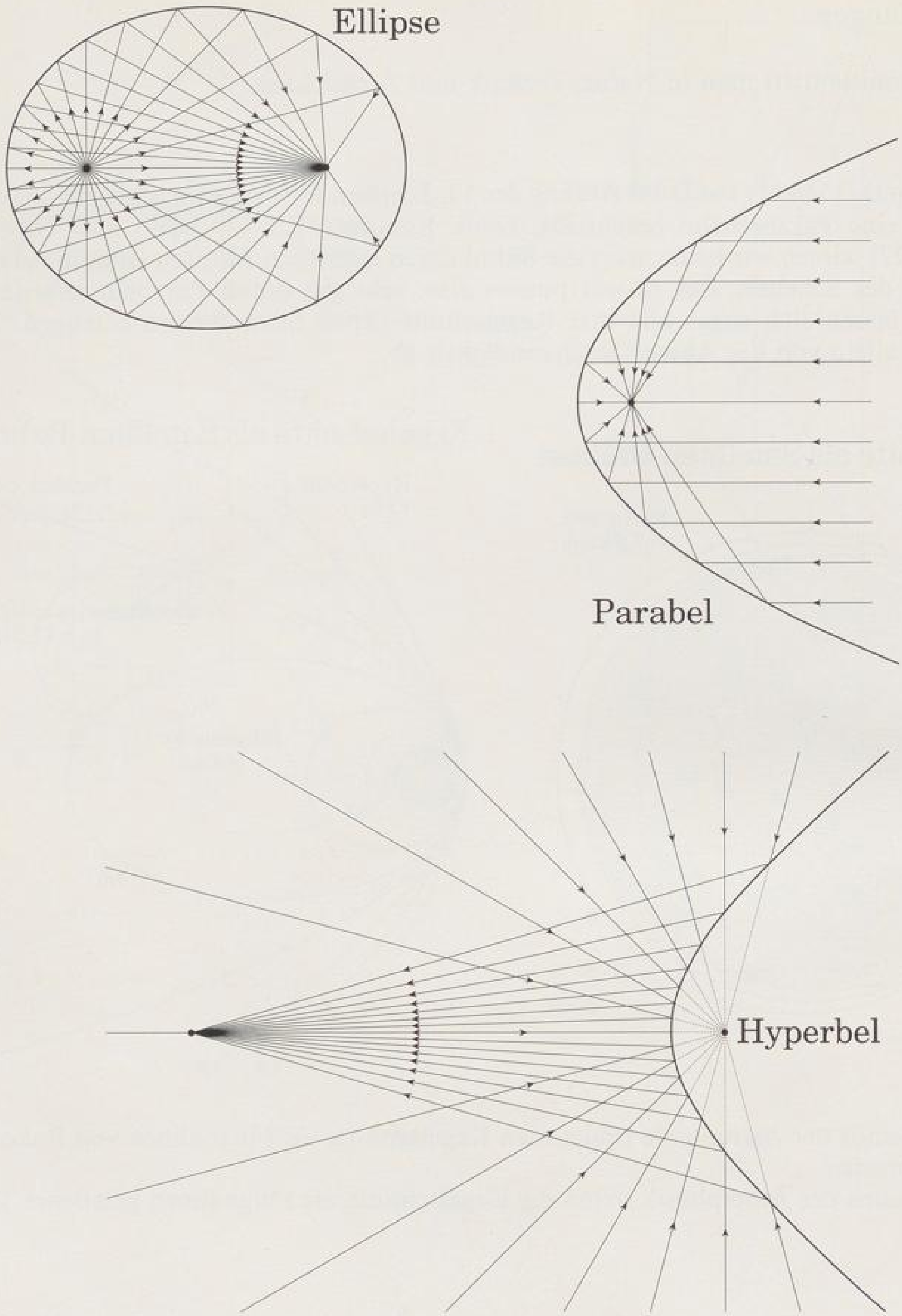


Im Makrokosmos der Astronomie findet man Kegelschnitte als Flugbahnen von Raketen, Planeten, Kometen …
Im Mikrokosmos der Atomphysik treten die Kegelschnitte als Flugbahnen geladener Teilchen auf.

Reflexionen

Die Reflexionseigenschaften von Spiegeln, deren Querschnitte Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln sind, nutzt vor allem die Technik.
Mit Parabolspiegeln erzeugt man Parallelstrahl-Bündel, zum Beispiel in Sendeantennen (Richtfunk) oder Autoscheinwerfern (Fernlicht).
Mit Parabolspiegeln empfängt man Parallelstrahl-Bündel, zum Beispiel in Empfangsantennen für kosmische Strahlung und Satelliten-Fernsehen oder in astronomischen Spiegel-

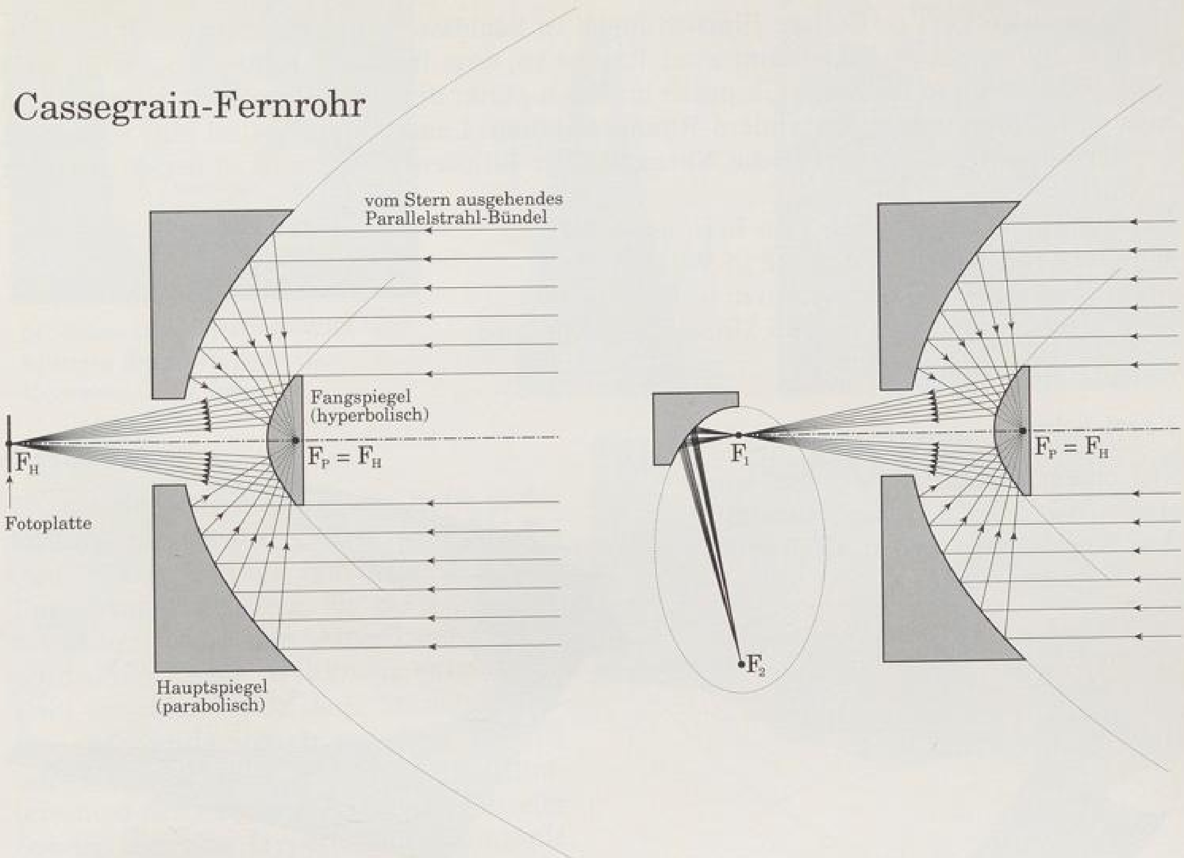
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



fernrohren. Im *Cassegrain-Teleskop* ist ein Parabolspiegel mit einem hyperbolisch gekrümmten Spiegel gekoppelt. Mit dieser Spiegelkombination erzielt man eine Brennweite, die größer ist als die des Parabolspiegels allein. (Ein Fernrohr vergrößert um so stärker, je länger seine Brennweite ist.) Man könnte sogar ein Teleskop mit Spiegeln bauen, in denen alle drei Kegelschnitt-Typen vorkommen.

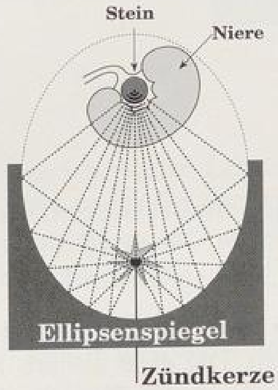
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Cassegrain-Fernrohr



Seit es den *Nierenlithotripter* gibt, das ist ein Nierenstein-Zerbrösler, lassen sich Nierensteine ohne blutige Operation entfernen. Sein Funktionsprinzip ist recht einfach: In einem Brennpunkt eines Ellipsenspiegels sendet ein starker Funke einen Knall aus – das ist eine Stoßwelle. Der Patient ist so justiert, dass im andern Brennpunkt sein Nierenstein sitzt. Die am Ellipsenspiegel reflektierte Stoßwelle konzentriert sich auf den Nierenstein und bewirkt, dass eine dünne Außenschicht abplatzt. Einige hundert Funkenknalle zerbröseln so den Stein zu Grieß.

Nierenstein-Zerbrösler



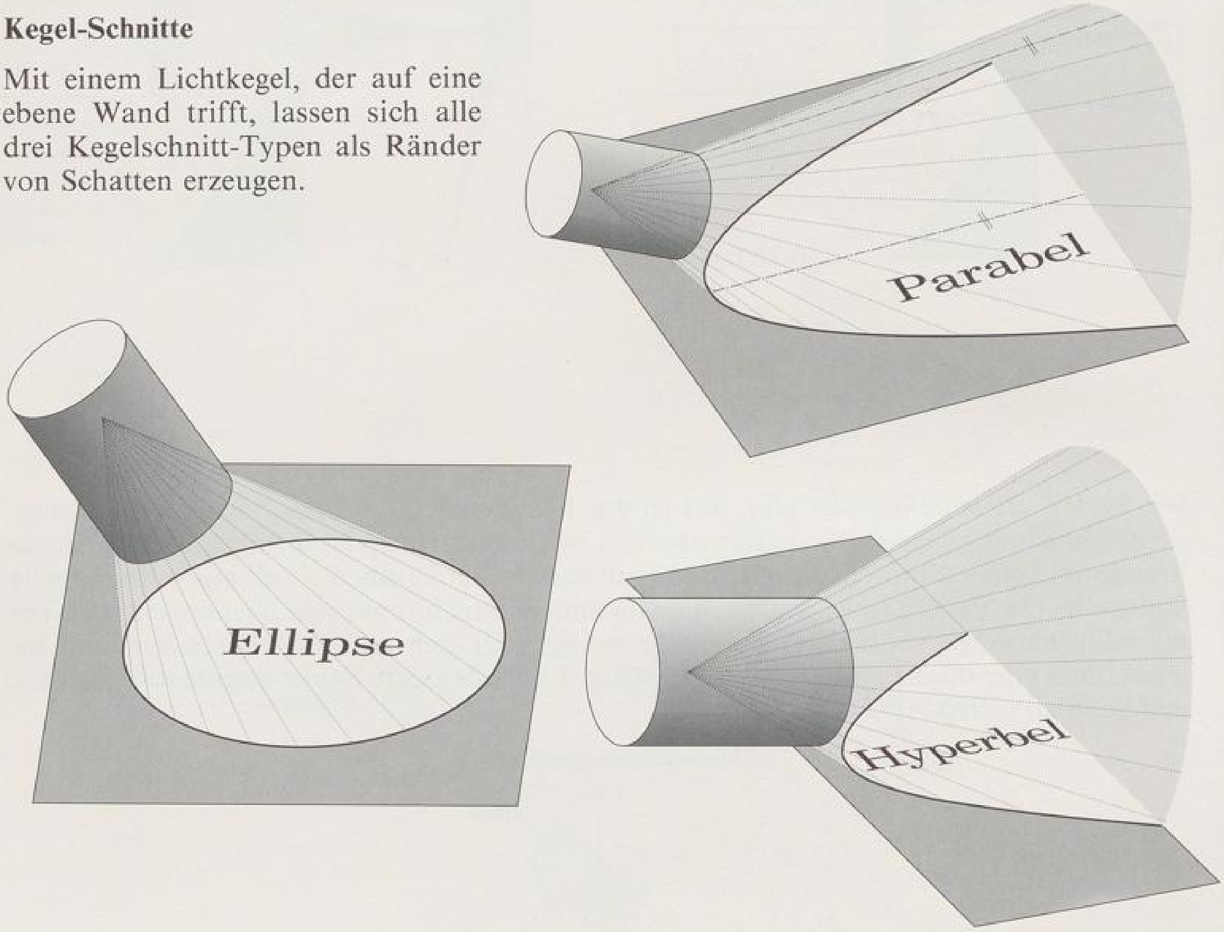
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Flüstergalerien sind raffinierte Einrichtungen in Schlössern und Residenzen: Eine elliptisch gewölbte Decke überspannt zwei Räume so, dass in jedem Raum ein Brennpunkt liegt. Findet ein (geflüstertes) Gespräch im Brennpunkt des einen Raums statt, dann kann man es im Brennpunkt des andern Raums abhören. Lauschangriffe sind also schon seit der Renaissance durch trickreiche Nutzung einer Ellipsen-Eigenschaft in der Architektur möglich!

Flüstergewölbe finden sich zum Beispiel
- in der Vorhalle der Residenz in Würzburg
- im Karyatiden-Saal des Louvre in Paris
- in einem Raum des Castello Sforzesco in Mailand
- in St. Paul's in London.

Kegel-Schnitte

Mit einem Lichtkegel, der auf eine ebene Wand trifft, lassen sich alle drei Kegelschnitt-Typen als Ränder von Schatten erzeugen.



Beim Anspitzen eines sechskantigen Bleistifts entstehen Hyperbeln als Schnitte eines Kegels (im Spitzer) mit Ebenen (Bleistift), die parallel sind zur Kreisachse. Ähnlich kommen auch die Hyperbeln auf Gewindemuttern zustande.

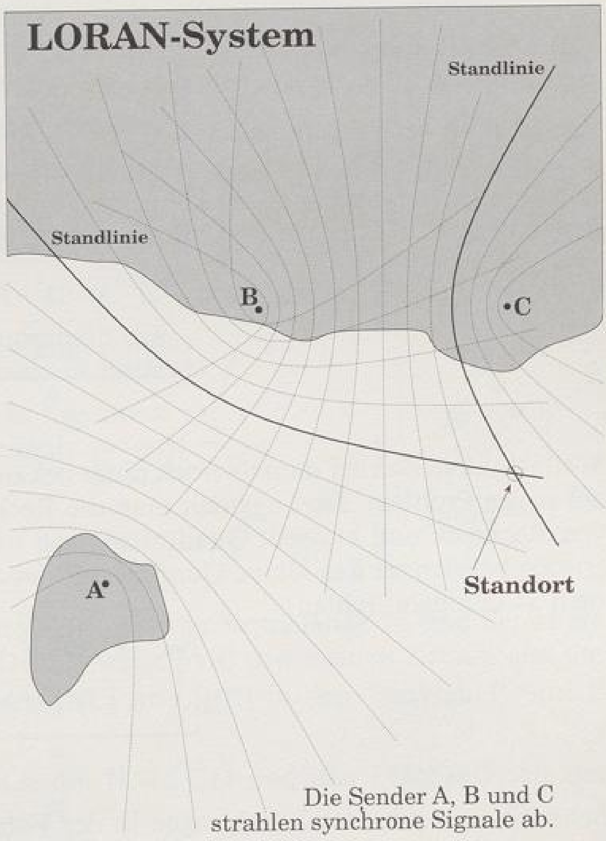
Bei der Sonnenuhr wirft ein fester Stab einen Schatten, der die wahre Sonnenzeit angibt. Die Schattenspitze beschreibt jeden Tag eine andere Kurve (*Datumslinie*). Diese Kurve entsteht als Schnitt der Bildebene und des Kegels, den die Verbindungsgeraden Stabspitze–Sonne bilden. Sie ist deshalb ein Kegelschnitt, und zwar meistens eine Hyperbel.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Modebewusste Messingmutter beim Mustern ihrer hyperbolischen Konturen vorm Spiegel

Navigation

Hyperbeln spielen eine große Rolle in der Ortung von Schiffen. Das LORAN-System (**LO**ng **RA**nge Navigation) ist ein Funkortungsverfahren für die Langstrekkenpeilung (von den Amerikanern während des Zweiten Weltkriegs entwickelt). Drei verschiedene ortsfeste Stationen senden gleichzeitig Signale aus, die ein Schiff oder Flugzeug empfängt. Der Laufzeitunterschied der empfangenen Signale zweier Sender legt eine Hyperbel als Standlinie fest (die Sender stehen in den Brennpunkten). Der Standort ergibt sich als Schnittpunkt von zwei oder drei Hyperbeln. Die Genauigkeit bei Auswertung der Bodenwellenimpulse liegt bei 5 km, bei Auswertung der Raumwellenimpulse bei 15 km. Die Reichweite der Sender beträgt tagsüber 1400 km und nachts etwa das Doppelte. Das LORAN-System überdeckt fast vollständig den Nordatlantik sowie große Teile des Indischen Ozeans.



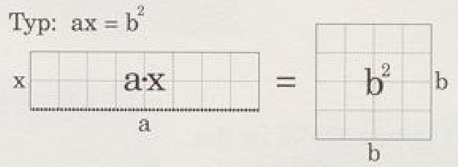
Die Sender A, B und C strahlen synchrone Signale ab.

6. Geschichtliches

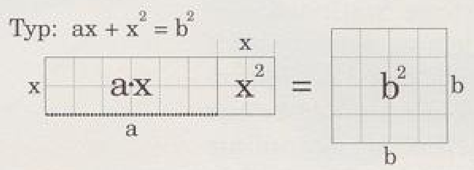
Etwa um 350 v. Chr. erfindet MENAICHMOS, der Lehrer Alexanders des Großen, die Kegelschnitte als Kegel-Schnitte zur Lösung geometrischer Probleme, bei denen man mit der klassischen Methode (Zirkel, Lineal) nicht weiterkommt. Er löst zum Beispiel das Delische Problem der Würfelverdopplung über den Schnitt von Parabeln: Aus $x^2 = ay$ und $y^2 = 2ax$ folgt nämlich $x = a\sqrt[3]{2}$.
Mit den Kegelschnitten ist es auch möglich, einen Winkel in drei gleich große Winkel zu zerlegen.
Nur das dritte der drei klassischen Probleme, die Quadratur des Kreises, kann MENAICHMOS nicht lösen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

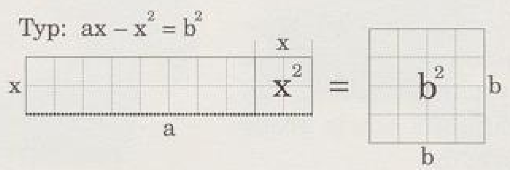
Apollonios von Perge (262 bis 190) untersucht die Kegelschnitte eingehend und schreibt seine *Konika*, acht Bücher über Kegelschnitte: I bis IV sind griechisch überliefert, V bis VII liegen arabisch vor und VIII ist verloren gegangen. Im Gegensatz zu Menaichmos, der für jeden Kegelschnitt-Typ einen neuen Kegel braucht, weil er immer senkrecht zu einer Mantellinie schneidet, bekommt Apollonios alle Kegelschnitte an einem Kegel durch Schnitte unter verschiedenen Winkeln. Er treibt *geometrische Algebra*, indem er versucht, quadratische Gleichungen über Flächengleichheiten zu lösen:
Die Gleichung $ax = b^2$ ist gelöst, wenn es gelingt, zu einer gegebenen Rechteckseite a die andere Rechteckseite x so zu finden, dass dieses Rechteck flächengleich ist einem Quadrat mit gegebener Seitenlänge b. (parab**a**llein = vergleichen, gleich sein)



Zur Lösung der Gleichung $ax + x^2 = b^2$ braucht man die Rechteckseite x so, dass Rechteck- und Quadratfläche (Seite x) zusammen so groß sind wie das Quadrat mit Seitenlänge b. Apollonios bezeichnet das kleine Quadrat mit der Seite x als *überschießendes Quadrat.* (hyperb**a**llein = über ein Ziel hinauswerfen, übers Ziel hinausschießen)



Weil negative Zahlen damals noch nicht bekannt sind, schafft die Gleichung $ax - x^2 = b^2$ ein neues Problem. Jetzt braucht man die Rechteckseite x so, dass der Flächenunterschied von Rechteck und kleinem Quadrat so groß ist wie das Quadrat mit Seitenlänge b. Apollonios bezeichnet das kleine Quadrat mit der Seite x als *unterschießendes Quadrat.* (ell**ei**pein = mangeln, fehlen)



Schreibt man die drei Gleichungen in der Form

$$y^2 = ax$$
$$y^2 = ax + x^2$$
$$y^2 = ax - x^2$$

so ergeben sich Gleichungen von Parabeln, Hyperbeln und Ellipsen. Die Mittelpunkte dieser Hyperbeln und Ellipsen liegen nicht im Koordinatenursprung.

Nach den Griechen kümmert man sich kaum noch um die Kegelschnitte. Erst Johannes Werner (1468 bis 1522) erweckt sie zu neuem Leben in seiner Schrift *Elemente der Kegelschnitte.* Darin steht zum Beispiel eine einfache Parabelkonstruktion mittels einer Schar von Kreisen mit gemeinsamem Berührpunkt (siehe Kapitel 9. II, 3).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN