UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

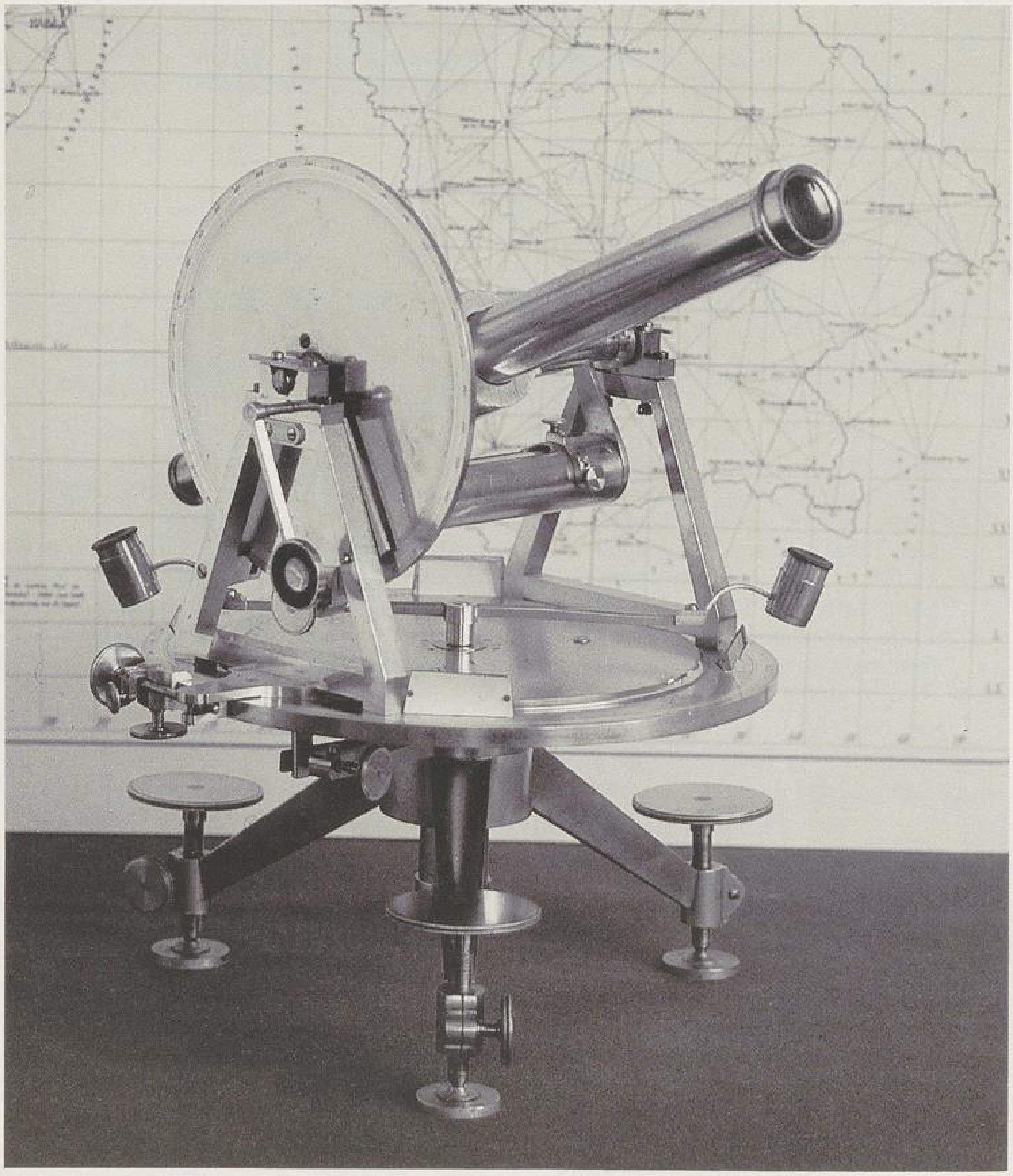
München, 1997

7. Kapitel Summenformeln

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

Visual Library

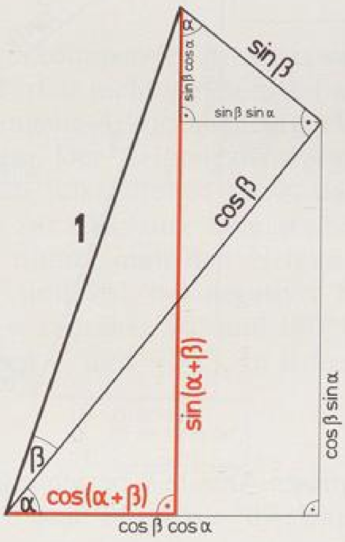
7. Kapitel
Summenformeln

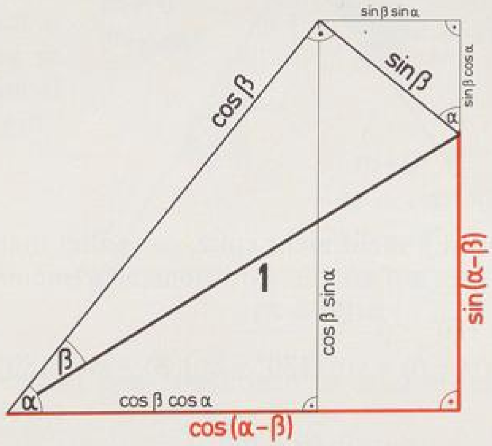


Theodolit von Reichenbach, Utzschneider und Liebherr, um 1810, München

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Von manchen Winkeln kennen wir die exakten Sinuswerte, zum Beispiel ist $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Lässt sich der Sinus von $75° = 45° + 30°$ beziehungsweise $15° = 45° - 30°$ genau berechnen? Schön wäre es, wenn $\sin(45° + 30°)$ gleich $\sin 45° + \sin 30°$ wäre. Nun ist aber $\sin 45° + \sin 30° = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right) \approx 1{,}2$, das ist mehr als 1 – also kann's so einfach nicht gehen! Wir brauchen eine Formel, die einen Zusammenhang zwischen $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ herstellt.
Zunächst soll $\alpha + \beta < 90°$ und $\alpha \geqq \beta$ sein.
Wir tragen an einen Schenkel von α den Winkel β einmal nach außen und einmal nach innen so an, dass der neue Schenkel die Länge 1 hat: Jedesmal entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 1 und den Katheten $\sin\beta$ und $\cos\beta$.





Betrachten wir die Figur für $\alpha + \beta$. Beim Abtragen von β nach außen entsteht noch ein rechtwinkliges Dreieck mit derselben Hypotenuse 1, aber mit den (roten) Katheten $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$. Vom Endpunkt des gemeinsamen Schenkels der Länge $\cos\beta$ fällen wir die Lote auf die roten Katheten (beziehungsweise ihre Verlängerungen), zwei neue rechtwinklige Dreiecke entstehen: Das eine hat die Hypotenuse $\sin\beta$ und die Katheten $\sin\beta \sin\alpha$ und $\cos\beta \cos\alpha$. Ein Blick auf die Figur zeigt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$
und $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\,.$$

Die Figur für $\alpha - \beta$ ist analog aufgebaut. Aus ihr lesen wir ab:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$
und $$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\,.$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieser Beweis stimmt nur für $\alpha + \beta < 90°$ und $\alpha \geqq \beta$. Die vier Beziehungen aber gelten für beliebige Winkel, das heißt, α und β dürfen zum Beispiel auch negativ sein. Deshalb muss man sich bloß die Summenformeln merken. Man fasst sie zusammen als

Additionstheoreme für sin und cos

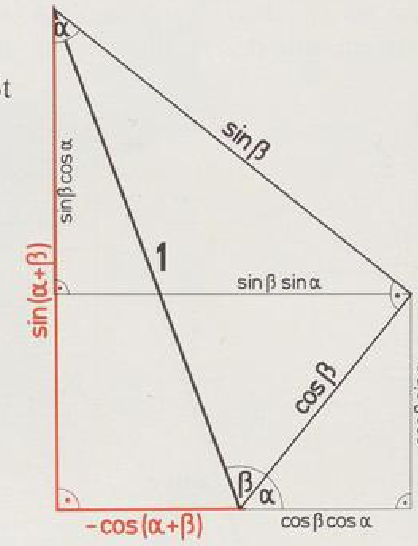
$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

Ein Beispiel zeigt den Beweis der Additionstheoreme für den Fall, dass α und β spitz sind $\alpha + \beta$ aber stumpf ist. Auch die dritte Figur ist analog der ersten aufgebaut, aus ihr liest man ab:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und $-\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$, das heißt

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$



Sind α und β nicht mehr spitz, so spaltet man die spitzen Anteile $\hat{\alpha}$ beziehungsweise $\hat{\beta}$ ab und wendet auf sie die Additionstheoreme an. Beispiel: $90° < \alpha < 180°$ und $0° < \beta < 90°$

$$\alpha = 180° - \hat{\alpha}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180° - \hat{\alpha} + \beta) = \sin\big(180° - (\hat{\alpha} - \beta)\big)$$

$$\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$$

$$= \sin(\hat{\alpha} - \beta)$$

Additionstheorem

$$= \sin\hat{\alpha}\cos\beta - \cos\hat{\alpha}\sin\beta$$

$$\alpha = 180° - \hat{\alpha}$$

$$= \sin(180° - \alpha)\cos\beta - \cos(180° - \alpha)\sin\beta$$

$$\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \text{w. z. b. w.}$$

Jetzt endlich finden wir den genauen Wert von $\sin 75°$:

$$\begin{aligned}\sin 75° &= \sin(45° + 30°)\\ &= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)\end{aligned}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auch für den Tangens gibt es ein Additionstheorem; wir leiten es aus den Additionstheoremen für sin und cos her:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \quad \text{kürzen mit} \quad \cos\alpha\cos\beta$$

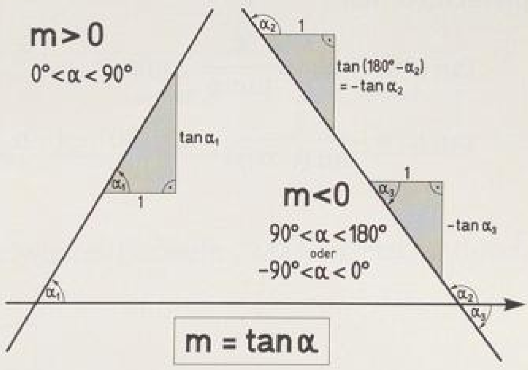
$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Additionstheorem für tan

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}}$$

Alle darin vorkommenden Tangenswerte müssen definiert sein, das heißt, die Winkel α, β und $\alpha+\beta$ dürfen nicht gleich $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sein.
Mit dem Tangens-Additionstheorem berechnet man **Schnittwinkel** von Geraden im Koordinatensystem. Der Neigungswinkel α einer Gerade ist der Drehwinkel, um den man die x-Achse nach links drehen muss, damit sie mit der Gerade zur Deckung kommt: bei positiver Steigung m nimmt man den Neigungswinkel α zwischen 0° und 90°, bei negativer Steigung m nimmt man α zwischen 90° und 180° (manchmal auch zwischen 0° und −90°). In jedem Fall gilt

$$\boxed{m = \tan\alpha}$$



Der Schnittwinkel $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ zweier Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 errechnet sich so:

$$\tan\varphi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2\tan\alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

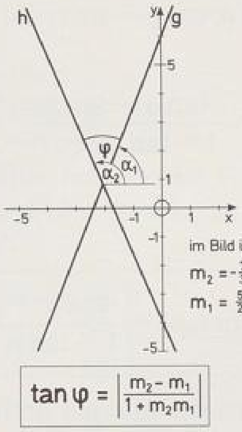
Beispiel: Die Geraden $g: y = \frac{5}{2}x + 6$ und $h: y = -\frac{7}{3}x - 4$ haben die Steigungen $m_1 = \frac{5}{2}$ und $m_2 = -\frac{7}{3}$

$$\tan\varphi = \frac{-\dfrac{7}{3} - \dfrac{5}{2}}{1 - \dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{5}{2}} = \frac{-29}{-29} = 1.$$

Die Geraden schneiden sich unter $\varphi = 45°$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hätten wir m_1 und m_2 vertauscht, so hätte sich ergeben $\tan\varphi = -1$ und deshalb $\varphi = 135°$ beziehungsweise $\varphi = -45°$. Damit die Formel immer den spitzen Schnittwinkel liefert, unterdrücken wir solche Minuszeichen mit dem Betrag:

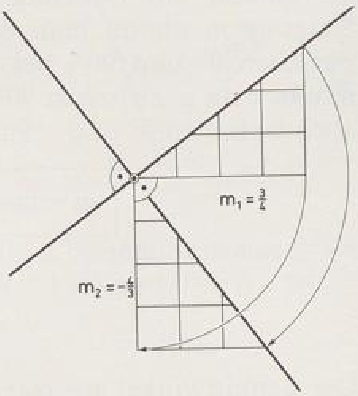


$$\boxed{\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right|}$$

Diese Formel klappt freilich nur, wenn der Nenner $1 + m_2 m_1$ ungleich null ist. Wenn er aber gleich null ist, dann gilt $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$, das heißt, $\tan\alpha_2 = -\dfrac{1}{\tan\alpha_1}$. Wegen der Komplementformel

$$\tan(90° - \varphi) = \frac{1}{\tan\varphi} \quad \text{gilt}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{1}{\tan(-\alpha_1)} = \tan(90° - (-\alpha_1)) = \tan(90° + \alpha_1),$$



also unterscheiden sich α_1 und α_2 um 90°: Die Geraden stehen aufeinander senkrecht. Verwendet man den Kotangens, dann sieht man dies auch direkt:

$$\cot\varphi = \left|\frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1}\right| = 0, \quad \text{also ist } \varphi = 90°. \text{ Damit gilt}$$

Ist eine Steigung m_2 der negative Kehrwert einer andern Steigung m_1, dann sind die zugehörigen Geraden g_1 und g_2 zueinander senkrecht.

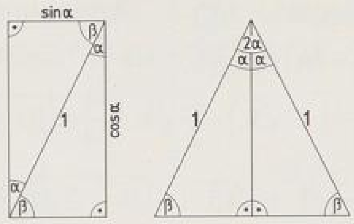
$$\mathbf{m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow g_1 \perp g_2}$$

Aus den Additionstheoremen folgen viele weitere Formeln. Besonders wichtig sind die Doppelwinkel- und Halbwinkel-Formeln. Für $\alpha = \beta$ ergeben sich die

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Doppelwinkel-Formeln

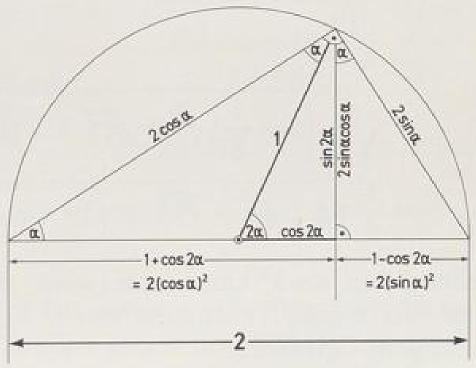
$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin\alpha \cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 \\ &= 1 - 2(\sin\alpha)^2 \\ &= 2(\cos\alpha)^2 - 1 \\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2} \end{aligned}}$$



$\sin\alpha\cos\alpha = F = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 2\alpha$

Die erste Formel lässt sich einfach veranschaulichen.
Auch ein anderes Bild veranschaulicht einige der Doppelwinkel-Formeln. In einem Halbkreis (Radius 1) sehen wir ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α und der Hypotenuse 2. Der Radius 1 bildet mit der Hypotenuse den Winkel 2α (warum?). Mit den Beziehungen von Seite 108:

Gegenkathete = Hypotenuse mal Sinus



Ankathete = Hypotenuse mal Kosinus

lesen wir ab: $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$
$1 + \cos 2\alpha = 2(\cos\alpha)^2$
$1 - \cos 2\alpha = 2(\sin\alpha)^2$

Die Halbwinkel-Formeln folgen aus den Doppelwinkel-Formeln: Man ersetzt α durch $\alpha/2$.

***Halbwinkel-Formeln**

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) \\ \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1+\cos\alpha) \\ \left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \end{aligned}}$$

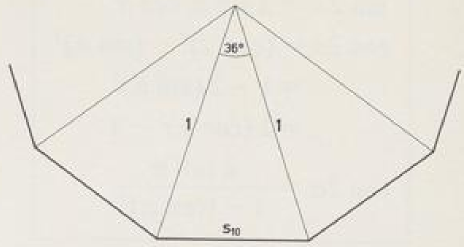
Mit diesen Formeln lassen sich die exakten sin-, cos- und tan-Werte aller konstruierbaren Winkel mit ganzzahligem Gradmaß berechnen. Startwinkel sind 90° (Lot), 60° (gleichseitiges Dreieck) und 36° (Zehneck). Für sie gilt:

$\sin 90° = 1$	$\cos 90° = 0$	
$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$
$\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\cos 36° = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)$	$\tan 36° = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Den Kosinus des kleinsten dieser Winkel: $\cos 3°$ berechnen wir so:

$$
\begin{aligned}
\cos 6° &= \cos(36° - 30°) \qquad \text{Additionstheorem anwenden}\\
&= \cos 36° \cos 30° + \sin 36° \sin 30°\\
&= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$



$$s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\cos 36° = \frac{1^2+1^2-s_{10}^2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$
\begin{aligned}
\cos 3° &= \cos\frac{6°}{2} \qquad \text{Halbwinkel-Formel anwenden}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos 6°\right)}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\right)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}
\end{aligned}
$$

Ausgehend von $\cos 3°$ kann man (wenn man will) mit den Summenformeln die sin-, cos- und tan-Werte aller Vielfachen von 3° berechnen, also aller konstruierbaren Winkel mit ganzzahligem Gradmaß.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
3°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)\left(2-\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}-2\sqrt{5}-4\right)\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2\right)$
6°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{15-6\sqrt{5}}-1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$
9°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{4}\left(\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{4}\left(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)$	$\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
12°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{15+6\sqrt{5}}+1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)$	$\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}\right)$
15°	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
21°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{3}-2+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-2\sqrt{5}+4\right)\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\right)$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
24°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{15-6\sqrt{5}}+1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right)$	$\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{3}\right)$ $=\frac{1}{2}\left(\sqrt{50+22\sqrt{5}}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$
27°	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2})\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)$ $=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$ $=\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
33°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{3}-2+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}-2\sqrt{5}-4)\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2\right)$
36°	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
39°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{3}+2-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)\left(2-\sqrt{3}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}(3\sqrt{3}-\sqrt{15}+2\sqrt{5}-4)\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\right)$
42°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{15+6\sqrt{5}}-1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

Zwei Formelgruppen runden dieses Kapitel ab. In der ersten werden Produkte in Summen und Differenzen umgewandelt, in der zweiten Gruppe geht's umgekehrt.

Additionstheoreme
$$\begin{array}{ll} \text{I} & \sin(\gamma+\delta) = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta \\ \text{II} & \sin(\gamma-\delta) = \sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta \\ \text{I}+\text{II} & \sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta) = 2\sin\gamma\cos\delta \quad \| :2 \\ & \sin\gamma\cos\delta = \frac{1}{2}[\sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta)] \end{array}$$

Verwenden wir wieder α und β statt γ und δ, so ergibt sich die erste Gruppe:

***Produkt-Summen-Formeln**

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \end{aligned}}$$

Die unteren beiden Formeln ergeben sich, wenn man die Additionstheoreme für $\cos(\gamma+\delta)$ und $\cos(\gamma-\delta)$ addiert beziehungsweise subtrahiert.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Jetzt zur zweiten Gruppe: Aus den Additionstheoremen I und II von oben folgt

$$\text{I} + \text{II} \quad \sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta) = 2 \sin\gamma \cos\delta \qquad \boxed{A}$$

$$\text{I} - \text{II} \quad \sin(\gamma + \delta) - \sin(\gamma - \delta) = 2 \cos\gamma \sin\delta \qquad \boxed{B}$$

setze $\left.\begin{matrix} \gamma + \delta = \alpha \\ \gamma - \delta = \beta \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} 2\gamma = \alpha + \beta \\ 2\delta = \alpha - \beta \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} \gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2} \\ \delta = \dfrac{\alpha - \beta}{2} \end{matrix}$

einsetzen in $\boxed{A}$ $\quad \sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

in $\boxed{B}$ $\quad \sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

Durch ähnliche Umformungen ergeben sich Ausdrücke für $\cos\alpha + \cos\beta$ und $\cos\alpha - \cos\beta$.

***Summen-Produkt-Formeln**

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha + \sin\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

***Goniometrische Gleichungen**

Neben den algebraischen Termen wie $2x + 1$, x^2, $\sqrt{x}$, ... haben wir jetzt auch trigonometrische Terme kennen gelernt wie $\sin x$, $\cos 2x$, $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Eine Gleichung heißt **goniometrisch,** wenn sie die Unbekannte x in mindestens einem trigonometrischen Term enthält. Wir beschränken uns vorläufig auf **rein-goniometrische** Gleichungen; das sind Gleichungen, bei denen die Unbekannte x nur in trigonometrischen Termen auftritt.
Beispiele rein-goniometrischer Gleichungen:

$\boxed{1}$ $(\tan x)^2 = \tan x$ $\qquad$ $\boxed{2}$ $\cos 2x - \cos x = 0$

$\boxed{3}$ $3 \sin x - 4 \cos x = 0$ $\qquad$ $\boxed{4}$ $3 \sin x - 4 \cos x = 5$

Beim Auflösen versucht man, auf eine Gleichung zu kommen, die nur noch einen trigonometrischen Term (womöglich an mehreren Stellen) enthält. Zum Umformen dienen die bisher abgeleiteten Formeln.

$\boxed{1}$ $(\tan x)^2 = \tan x$

Hier kommt nur tan x vor, zum Lösen genügt Algebra

$\tan x (\tan x - 1) = 0$, also $\tan x = 0$ oder $\tan x = 1$

$$\mathbf{x_{1k} = 0 + k\pi} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x_{2k} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$\boxed{2}$ $\cos 2x - \cos x = 0$

wir drücken $\cos 2x$ durch $\cos x$ aus

$[2(\cos x)^2 - 1] - \cos x = 0$

Substitution: $\cos x = z$

$$2z^2 - z - 1 = 0, \quad \text{also} \quad z = \frac{1 \pm 3}{4},$$

$$\text{also} \quad \cos x = 1 \quad \text{oder} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

Das ergibt drei Serien von Lösungen:

$\mathbf{x_{1k} = 0 + k \cdot 2\pi}$ oder

$\mathbf{x_{2k} = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi}$ oder

$\mathbf{x_{3k} = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi}$ jedesmal $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{3}$ $3 \sin x - 4 \cos x = 0$

solche Gleichungen sind mit einem Trick schnell erledigt: man dividiert durch $\cos x \neq 0$

$3 \tan x = 4, \quad \text{oder} \quad \tan x = \frac{4}{3},$

$\mathbf{x_k = 0{,}927\ldots + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$

Für $\cos x = 0$ ergibt sich $\sin x = 0$, das kann aber nicht sein, weil sin und cos nicht gleichzeitig null sind.

$\boxed{4}$ $3 \sin x - 4 \cos x = 5$ Wir drücken $\cos x$ mit $\sin x$ aus

$3 \sin x - 5 = 4 \cos x \quad \|^2$

$(3 \sin x - 5)^2 = 16(\cos x)^2$ $\qquad (\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$

$9(\sin x)^2 - 30 \sin x + 25 = 16[1 - (\sin x)^2]$

$25(\sin x)^2 - 30 \sin x + 9 = 0$

$[5 \sin x - 3]^2 = 0, \quad \text{also} \quad \sin x = \frac{3}{5},$

das ergäbe $x_{1k} = 0{,}643\ldots + k \cdot 2\pi$ (I. Quadrant)

oder $x_{2k} = 2{,}498\ldots + k \cdot 2\pi$ (II. Quadrant)

Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung!

Beim Auflösen können sich deshalb Ergebnisse einschleichen, die keine Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Also müssen wir die Probe machen; wir machen sie mit dem exakten Ergebnis $\sin x = 0{,}6$.

x kann im I. Quadranten liegen, dann gilt

$\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2} = 0{,}8$. Setzt man diesen Wert in die linke Seite der Gleichung ein, so ergibt sich

$3 \sin x - 4 \cos x = 1{,}8 - 3{,}2 = -1{,}4$

Wegen $-1{,}4 \neq 5$ gibt es keine Lösung im I. Quadranten.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

x kann im II. Quadranten liegen, dann gilt
$\cos x = -\sqrt{1-(\sin x)^2} = -0{,}8$. Setzt man diesen Wert in die linke Seite der Gleichung ein, so ergibt sich
$3 \sin x - 4 \cos x = 1{,}8 + 3{,}2 = 5$
Also gibt es bloß die Lösungsserie
$\mathbf{x_k = 2{,}498\ldots + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$.

Aufgaben zu 7.

1. Überprüfe die Additionstheoreme an den Beispielen

a) $\sin(60° + 30°)$ **b)** $\sin(60° - 30°)$ **c)** $\sin(90° - 45°)$
d) $\sin(210° - 60°)$ **e)** $\cos(90° + 30°)$ **f)** $\cos(90° - 30°)$
g) $\cos(240° - 60°)$ **h)** $\cos(210° + 90°)$ **i)** $\tan(60° - 30°)$
j) $\tan(150° + 60°)$ **k)** $\tan(240° - 60°)$ **l)** $\cos(315° + 45°)$

2. Berechne die exakten Werte von

a) $\sin 75°$ **b)** $\sin 15°$ **c)** $\cos 75°$ **d)** $\cos 15°$ **e)** $\tan 15°$
f) $\tan 75°$ **g)** $\sin 72°$ **h)** $\cos 72°$ **i)** $\tan 72°$.

3. x und y seien spitze Winkel. Berechne

a) $\sin(x+y)$ und $\sin(x-y)$, wenn $\sin x = \frac{5}{13}$ und $\sin y = \frac{4}{5}$

b) $\cos(x+y)$ und $\cos(x-y)$, wenn $\cos x = \frac{8}{17}$ und $\cos y = \frac{5}{12}$

4. Berechne $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ und $\tan 2\alpha$, wenn α spitz ist und

a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ **b)** $\cos\alpha = 0{,}6$ **c)** $\tan\alpha = 0{,}5$.

5. Berechne $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\tan\frac{\alpha}{2}$, wenn α spitz ist und

a) $\sin\alpha = 0{,}8$ **b)** $\cos\alpha = 0{,}5$.

6. Berechne die exakten Werte $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ für

a) $\alpha = 15°$ **b)** $\alpha = 7{,}5°$ **c)** $\alpha = 22{,}5°$

7. Verwandle in ein Produkt.

a) $\sin 5x + \sin x$ **b)** $\sin 7x - \sin 3x$
c) $\cos 3x + \cos x$ **d)** $\cos 6x - \cos x$

8. Verwandle in ein Produkt.

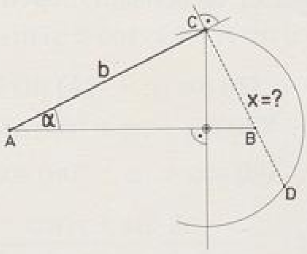
a) $\sin x + \cos y$ **b)** $\sin x - \cos y$

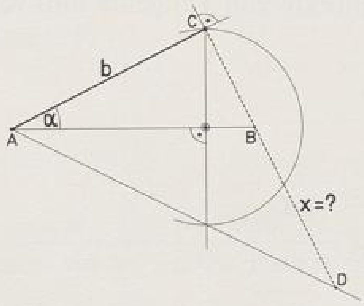
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

9. DOPPELHÖHE

a) Drücke $\overline{CD}$ durch b und α aus, wenn Winkel ACB = 90° ist.

b) Drücke $\overline{CD}$ durch a und b aus, wenn Winkel ACB = 90° und b > a ist.



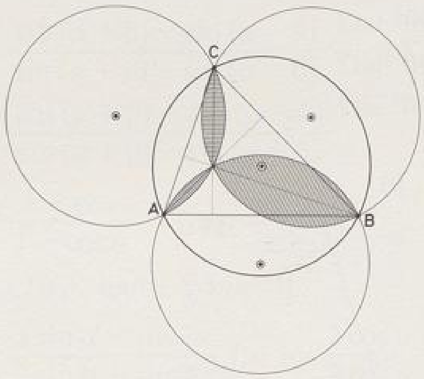


10. DREILINSEN

Zeichne ein Dreieck ABC und den Höhenschnittpunkt H. Zeichne die drei Kreise: Jeder geht durch zwei Ecken und durch den Höhenschnittpunkt H. Zeige:

a) Die Radien der drei Kreise sind gleich dem Umkreisradius.

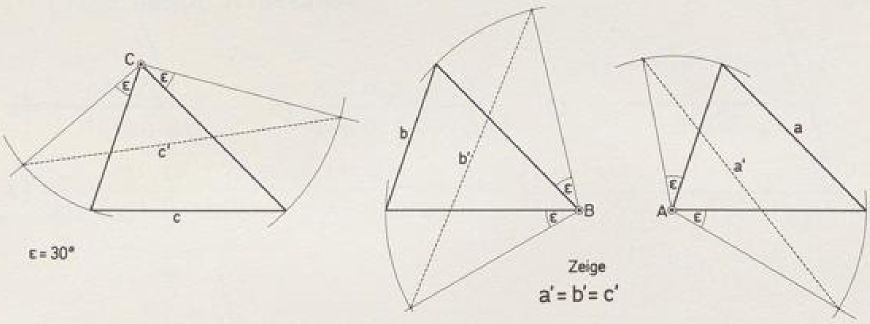
b) Die drei linsenförmigen Überlappungsflächen sind zusammen so groß wie die Umkreisfläche, verringert ums Doppelte der Dreieckfläche.



11. WINKELPLUSSECHZIG

Vergrößert man einen Dreieckwinkel auf beiden Seiten um 30°, so entsteht ein Dreieck, das in zwei Seitenlängen mit dem alten übereinstimmt, die dritte Seite ist länger. Man macht das mit allen drei Winkeln.

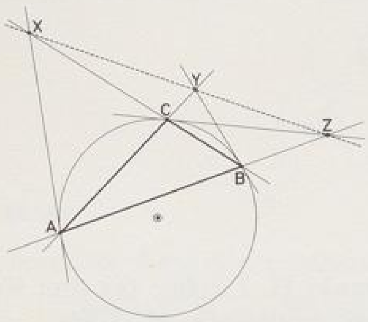
Zeige: Die jeweils dritten (längeren) Seiten sind alle gleich lang.



12. GERADLINIG

Zeichne ein (nicht gleichschenkliges) Dreieck ABC mit seinem Umkreis. Zeichne in einem Eckpunkt die Umkreistangente und schneide sie mit der verlängerten Gegenseite. Mache das für alle Eckpunkte.

Zeige: Die Schnittpunkte von Tangente und verlängerter Gegenseite liegen auf einer Gerade.



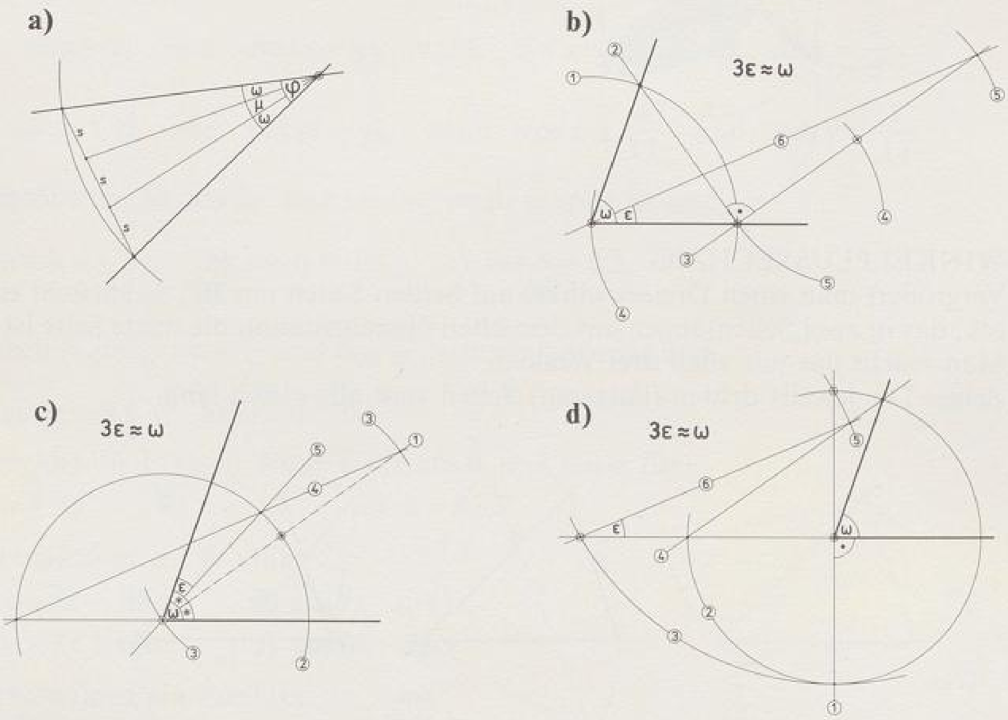
13. SCHEINDRITTEL

a) Die einfachste Näherung beruht auf der Sehnendrittelung. Wie groß sind μ und ω, wenn $\varphi = 30°, 60°, 90°, 120°$ ist?

b) Wie groß ist ε, wenn $\omega = 30°, 45°, 60°, 90°$ ist?

c) Wie groß ist ε, wenn $\omega = 30°, 45°, 60°, 90°$ ist?

d) Wie groß ist ε, wenn $\omega = 30°, 45°, 60°, 90°$ ist?



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vereinfache

1. **a)** $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$ **b)** $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha}$

2. **a)** $2(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^4 - (\sin \alpha)^4$

b) $(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)$

3. **a)** $2 \sin (45° + \alpha) \sin (45° - \alpha)$

b) $\sin (60° + \alpha) - \sin (60° - \alpha)$

c) $\cos (60° + \alpha) + \cos (60° - \alpha)$

4. **a)** $\dfrac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$ **b)** $\dfrac{\cos \alpha}{\cos - \sin \alpha} - \dfrac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

5. **a)** $\sin (\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos (\alpha + \beta) \sin \alpha$

b) $\cos (\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin (\alpha + \beta) \sin \alpha$

c) $\sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$

d) $\sin (\alpha - \beta) \cos (\beta - \gamma) + \cos (\alpha - \beta) \sin (\beta - \gamma)$

6. **a)** $\dfrac{\sin (\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta}$ **b)** $\dfrac{\cos (\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta}{\cos (\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$

7. **a)** $\dfrac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)}$ **b)** $\dfrac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)}$

c) $\dfrac{\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)}$

8. **a)** $\dfrac{1 + \cos}{1 - \cos \alpha}$ **b)** $\dfrac{1 + \cos \alpha}{(\sin \alpha)^2}$ **c)** $\dfrac{1}{\sin \alpha} + \dfrac{1}{\tan \alpha}$ **d)** $\dfrac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha$

(*Tipp:* halbe Winkel!)

9. **a)** $\dfrac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$ **b)** $\dfrac{2 \cos \alpha + \sin 2\alpha}{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha}$

c) $\dfrac{\sin \alpha + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha \sin \beta}$ (*Tip:* halbe Winkel!)

10. **a)** $\dfrac{1 - \cos \alpha + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha}$ **b)** $\dfrac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha}$

(*Tipp:* halbe Winkel!)

11. **a)** $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 - (\tan \alpha)^2}$ **b)** $\dfrac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ **c)** $\dfrac{(1 + \cos \alpha) \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha}$

d) $\dfrac{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta) + (\cos \alpha)^2}$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Beweise

1. **a)** $\sin\alpha + \sin(\alpha + 120°) + \sin(\alpha + 240°) = 0$

b) $\tan\alpha + \tan(\alpha + 120°) + \tan(\alpha + 240°) = 3\tan 3\alpha$

c) $\cos\alpha \cos(\alpha + 120°) \cos(\alpha + 240°) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

d) $\tan\alpha \tan(\alpha + 120°) \tan(\alpha + 240°) = -\tan 3\alpha$

2. **a)** $\sin 3x = 3\sin x - 4(\sin x)^3$

b) $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$ (*Tipp:* $3x = 2x + x$!)

3. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - (\tan x)^3}{1 - 3(\tan x)^2}$

:4. **a)** $\sin 4x = 8\sin x(\cos x)^3 - 4\sin x \cos x$

b) $\cos 4x = 8(\cos x)^4 - 8(\cos x)^2 + 1$

•5. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x - 4(\tan x)^3}{1 - 6(\tan x)^2 + (\tan x)^4}$

6. **a)** Leite her: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

b) Welche Formel ergibt sich für $\tan\frac{\alpha}{2}$?

7. **a)** $\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha) = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{2}}$

b) $\sin(45° - \alpha) = \cos(45° + \alpha) = \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}}$

c) $\tan(45° + \alpha) = \dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$

d) $\tan(45° - \alpha) = \dfrac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$

8. **a)** $\tan(45° + \alpha) - \tan(45° - \alpha) = 2\tan 2\alpha$

b) $\tan(45° + \alpha) + \tan(45° - \alpha) = \dfrac{2}{\cos 2\alpha}$

9. **a)** $\dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \tan\left(45° + \dfrac{\alpha}{2}\right)$

b) $\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = \tan\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

10. **a)** $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + (\tan\alpha)^2}$ **b)** $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - (\tan\alpha)^2}{1 + (\tan\alpha)^2}$

c) $\tan\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

11. **a)** $\sin 55° + \sin 5° = \cos 25°$

b) $\sin 80° - \cos 50° = \sin 20°$

c) $\cos 170° + \cos 70° + \cos 50° = 0$

d) $\sin 20° + \sin 40° = \sin 80°$

• **e)** $8 \sin 20° \sin 40° \sin 80° = \sqrt{3}$

• **f)** $8 \cos 20° \cos 40° \cos 80° = 1$

• **g)** $\tan 20° \tan 40° \tan 60° \tan 80° = 3$

(Teste auch deinen Taschenrechner!)

12. **a)** $\sin 75° + \sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ und $\sin 75° - \sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b) Berechne aus **a)** $\sin 75°$ und $\sin 15°$.

13. $\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan 3\alpha \tan 2\alpha \tan \alpha$

: **14.** Dreieck ABC ist rechtwinklig, wenn gilt

a) $\sin \alpha = \dfrac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$

b) $\sin \alpha = \cos \beta + \cos \gamma$

: **15.** Welche Eigenschaft hat ein Dreieck, in dem gilt $\dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$?

: **16.** Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:

a) $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$

b) $\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma$

: **17.** Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:

a) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

b) $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

c) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1$

d) $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 1$

: **18.** Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:

a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

b) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$

c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1$

d) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = -4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + 1$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

19. Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:

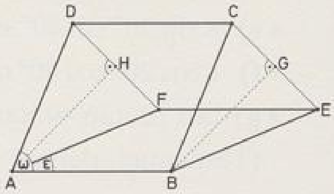
a) $(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 + (\sin\gamma)^2 = 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma + 2$

b) $(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 - (\sin\gamma)^2 = 2\sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma$

c) $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = -2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma + 1$

d) $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 - (\cos\gamma)^2 = -2\sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma + 1$

20. SUMDIFSIN
ABCD und ABEF sind Rauten.



a) Zeige: $\sphericalangle\,\mathrm{BAH} = \sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon + \omega)$, $\sphericalangle\,\mathrm{HAD} = \tau = \frac{1}{2}(\omega - \varepsilon)$

b) Begründe:
Fläche (ABCD) + Fläche (ABEF) = 2 · Fläche (ABGH)
Fläche (ABCD) − Fläche (ABEF) = Fläche (ECDF)

c) Drücke die Flächeninhalte in **b)** durch die Winkel ω, ε, σ und τ aus und leite so die Formeln für die Summe und Differenz zweier Sinuswerte her.

21. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis c und den Schenkellängen 1.

a) Zeichne die Höhe h_a ein und berechne sie auf zwei Wegen: einmal aus dem Dreieck ABH_a, dann aus dem Dreieck AH_aC. Beweise:

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

b) Fälle von H_c aus das Lot auf BC (Lotfußpunkt F) und zeige:

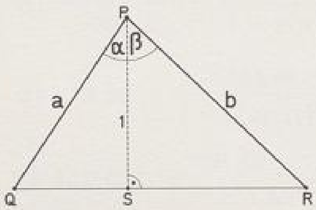
$$\overline{CH_a} = \overline{CF} - \overline{FB} \quad \text{und} \quad \cos\gamma = \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

c) Folgere aus **b)**: $1 - \cos\gamma = 2\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2.$

d) Verlängere den Schenkel [BC] über C hinaus bis D, sodass $\overline{BC} = \overline{CD}$ ist.
Beweise mit Hilfe des Dreiecks AH_aD: $1 + \cos\gamma = 2\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2.$

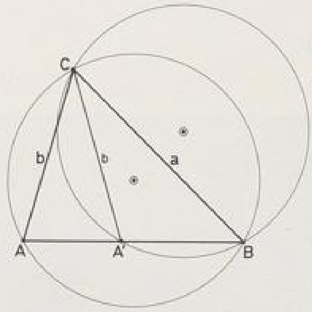
22. ADDITIONSTHEOREM UND DREIECKFLÄCHE
Berechne die Flächen der Dreiecke PQS, PSR und PQR. Folgere das Additionstheorem des Sinus aus

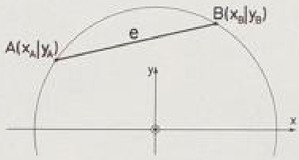
Fläche (PQR) = Fläche (PQS) + Fläche (PSR).



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

23. ADDITIONSTHEOREM UND UMKREIS
Begründe mit der Sehnenformel, dass die Umkreise der Dreiecke ABC und A'BC gleichen Radius haben. Folgere aus dem Projektionssatz $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$ und aus der Sehnenformel das Additionstheorem des Sinus.





24. ADDITIONSTHEOREM UND KOSINUSSATZ
Berechne e einmal mit der Formel $e^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ und einmal mit dem Kosinussatz. Folgere daraus das Additionstheorem des Kosinus.

25. **a)** Zeige: Für den Flächeninhalt F des Vierecks ABCD gilt

$$F = \frac{1}{2}(ad\sin\alpha + bc\sin\gamma).$$

b) Begründe mit **a)** die Flächenformel »HERON fürs Viereck«

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2},$$

s ist der halbe Viereckumfang.
(*Tipp:* Kosinussatz für Teildreiecke)

26. Warum hat das Sehnenviereck unter allen Vierecken mit den Seitenlängen a, b, c und d den größten Flächeninhalt?
(*Tipp:* vorige Aufgabe)

27.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Gleichungen Bestimme die Lösungsmengen in $[0; 2\pi[$

1. a) $192(\sin x)^2 + 128 \sin x = 75$ b) $100(\cos x)^2 + 75 \sin x = 114$

2. a) $\sin x = \sin 2x$ b) $\frac{1}{4} \sin 2x - \sin x = 0$

   c) $4 \sin x \cos x = -\sqrt{2}$ d) $\tan 2x + \tan x = 0$

   e) $\cos x - \cos 2x = 1$

3. a) $\sin x + \cos 2x = 1$ b) $\cos x + \cos 2x = 1$

   c) $\sin 2x + 2(\cos x)^2 = 1$

•4. a) $\sin x + \cos x = 0{,}8$ b) $8 \sin x + 9 \cos x = 12$

   c) $8 \sin x - 9 \cos x = 12$

5. a) $(\sin x)^2 + 2 \sin 2x = 3(\cos x)^2$

   b) $(\cos x)^2 + 3 \cos 2x = (\sin x)^2$

   c) $24(\cos x)^2 - 12(\sin x)^2 = \sin 2x$

   d) $6(\sin x)^2 + 8(\cos x)^2 = 7 \sin 2x$

:6. a) $\sin x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ b) $\cos x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

7. a) $15 \cos x = 16 \tan x$ b) $6 \sin 2x - 3 \tan x = 5 \sin x$

:8. a) $\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{\tan x}{\tan 2x} = 2$ b) $2\frac{\tan x}{\tan 2x} + 12\frac{\tan 2x}{\tan x} + 11 = 0$

9. a) $\sin 11x = \sin 5x$ b) $\cos 13x = \cos 5x$

   :c) $\sin 7x = \cos 3x$ d) $\tan 15x = \tan 9x$

   e) $\sin 5x - \sin 3x = \cos 9x - \cos 7x$

10. a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

    b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

11. a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

    :b) $\cos x - \cos 2x - \cos 3x - \cos 4x = 0$