Anschauliche Geometrie

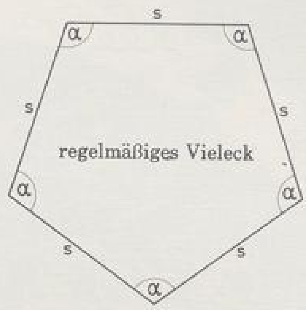
Barth, Friedrich

München, 1997

1. 1 Grundlagen

1.1 Grundlagen

Wegen ihres ästhetischen Reizes haben die einfach konstruierbaren regelmäßigen Vielecke schon immer als Zierfiguren in Ornamenten gedient. Die ältesten Darstellungen verwendeten vor allem Quadrate, Achtecke, Sechzehnecke usw. Dann tauchten das Sechseck und seine Abkömmlinge wie Zwölfeck und 24-Eck usw. auf, bis es schließlich den Pythagoräern gelang, das regelmäßige Fünfeck, Zehneck usw. zu konstruieren.



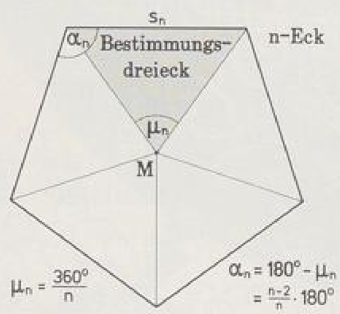
Mathematisch beschreiben wir ein regelmäßiges n-Eck mit der

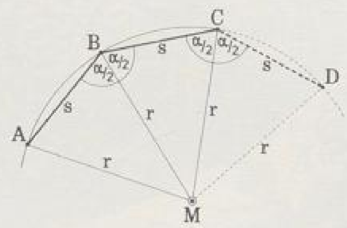
Definition

> Ein n-Eck heißt **regelmäßig,**
> **wenn alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind.**

Ab $n = 4$ genügt eine Bedingung allein nicht: Eine Raute muss nicht lauter gleich große Winkel haben, und ein Rechteck muss nicht lauter gleich lange Seiten haben.

Jedes regelmäßige n-Eck besteht aus n kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Ein solches Dreieck nennen wir **Bestimmungsdreieck.**

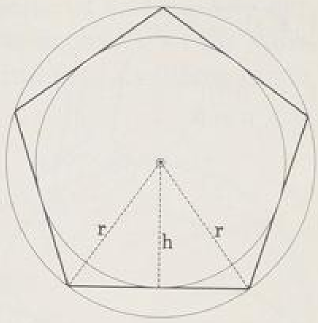




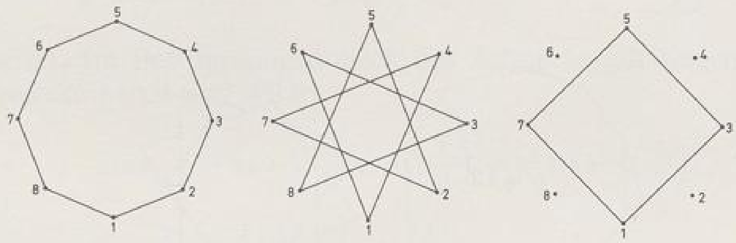
Begründung: Je drei benachbarte Ecken haben einen Umkreis (Mittelpunkt M), also gilt $\Delta AMB \cong \Delta BMC$ (SSS)
Verbindet man M mit der nächsten Ecke (D), so entsteht das Dreieck CMD, es ist wegen SWS kongruent zu den andern beiden Dreiecken. Diese Überlegung lässt sich auf die andern Ecken fortsetzen.

Damit ist auch gezeigt, dass jedes regelmäßige Vieleck einen Umkreis und einen Inkreis hat (Inkreisradius = Höhe auf der Basis des Bestimmungsdreiecks). Wegen der kongruenten Bestimmungsdreiecke gilt

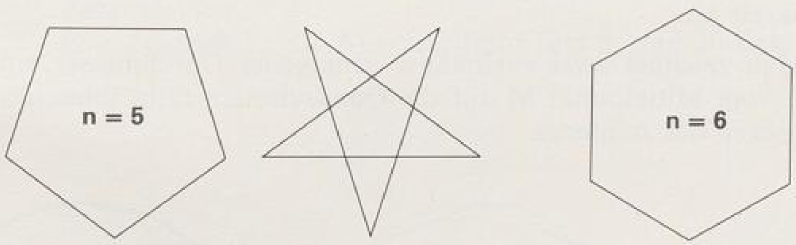
$$\mu_n = \frac{360^\circ}{n}, \quad \alpha_n = 180^\circ - \mu_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$



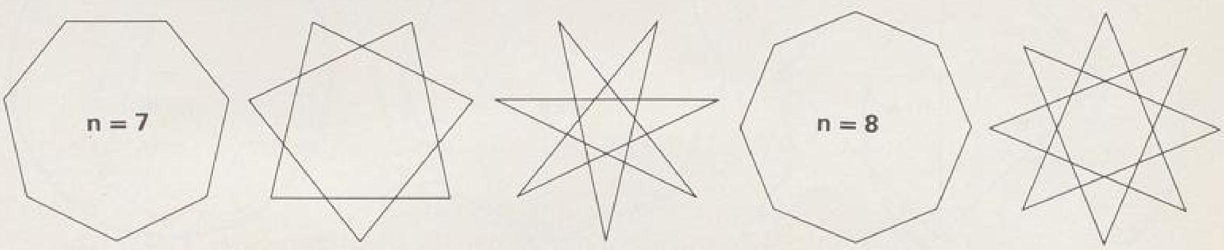
Lässt man auch überschlagene n-Ecke zu, dann entstehen regelmäßige **Sternvielecke.** Sie sind schon von Thomas BRADWARDINE (1290 bis 1349), dem späteren Erzbischof von Canterbury, untersucht worden.

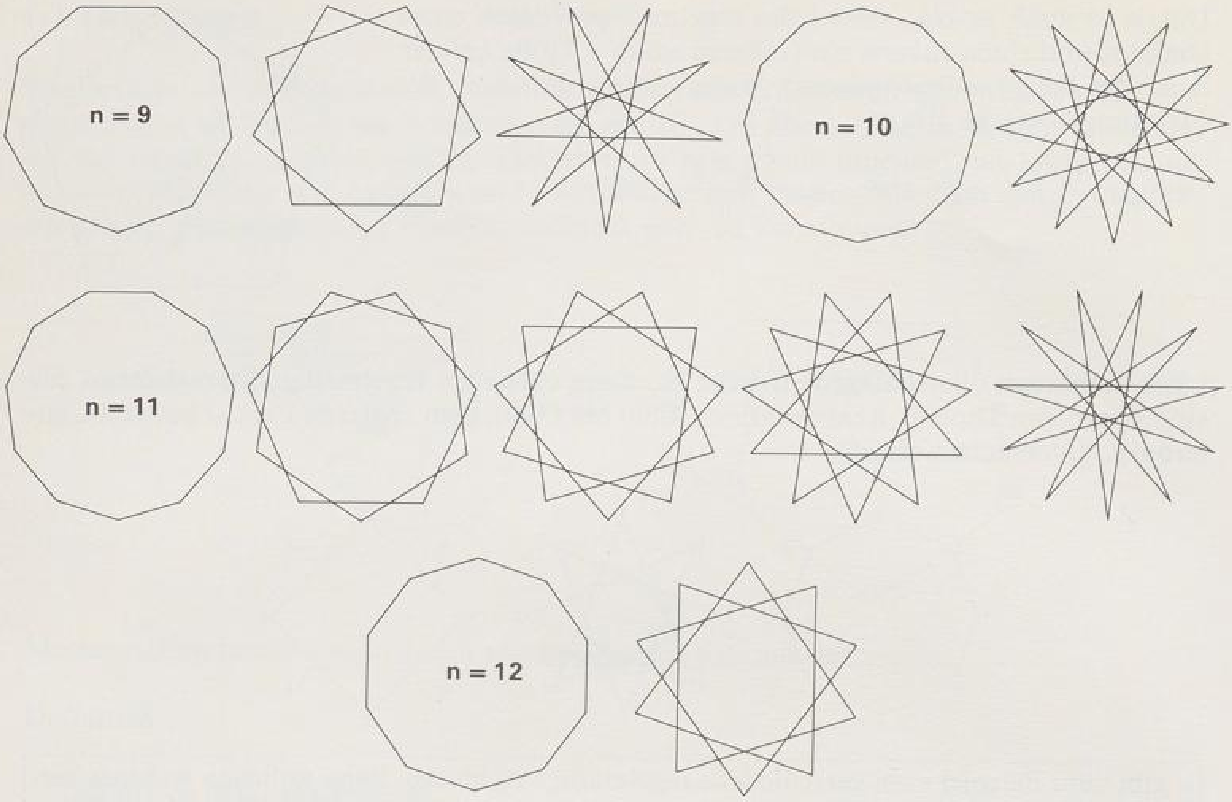


Es gibt zum Beispiel zwei verschiedene regelmäßige Achtecke. Beim üblichen Achteck verbindet man jede Ecke mit der nächsten, beim Sternachteck mit der überübernächsten Ecke. Verbindet man dagegen jede Ecke mit der übernächsten Ecke, so ergibt sich ein Quadrat.
Allgemein gilt: Ein n-Eck ergibt sich genau dann, wenn man jede Ecke mit der k-ten darauf folgenden Ecke verbindet und n und k teilerfremd sind. Die Verbindung der Ecken n und k liefert dasselbe n-Eck wie die Verbindung der Ecken n und n − k.



Kein Stern!





*1.2 Konstruktionen

Ein regelmäßiges Vieleck ist genau dann konstruierbar, wenn der Mittelpunktswinkel μ_n konstruierbar ist. Kann man ein n-Eck konstruieren, dann klappt es auch bei einem mit der doppelten Eckenzahl (Winkel lassen sich ja verdoppeln und halbieren). Am besten fängt man mit dem Umkreis an.

Quadrat (4er Serie): Man zeichnet zwei zueinander senkrechte Durchmesser ein. Die Lote, die man vom Mittelpunkt M auf die Quadratseiten fällt, schneiden den Kreis in den Ecken des Achtecks.