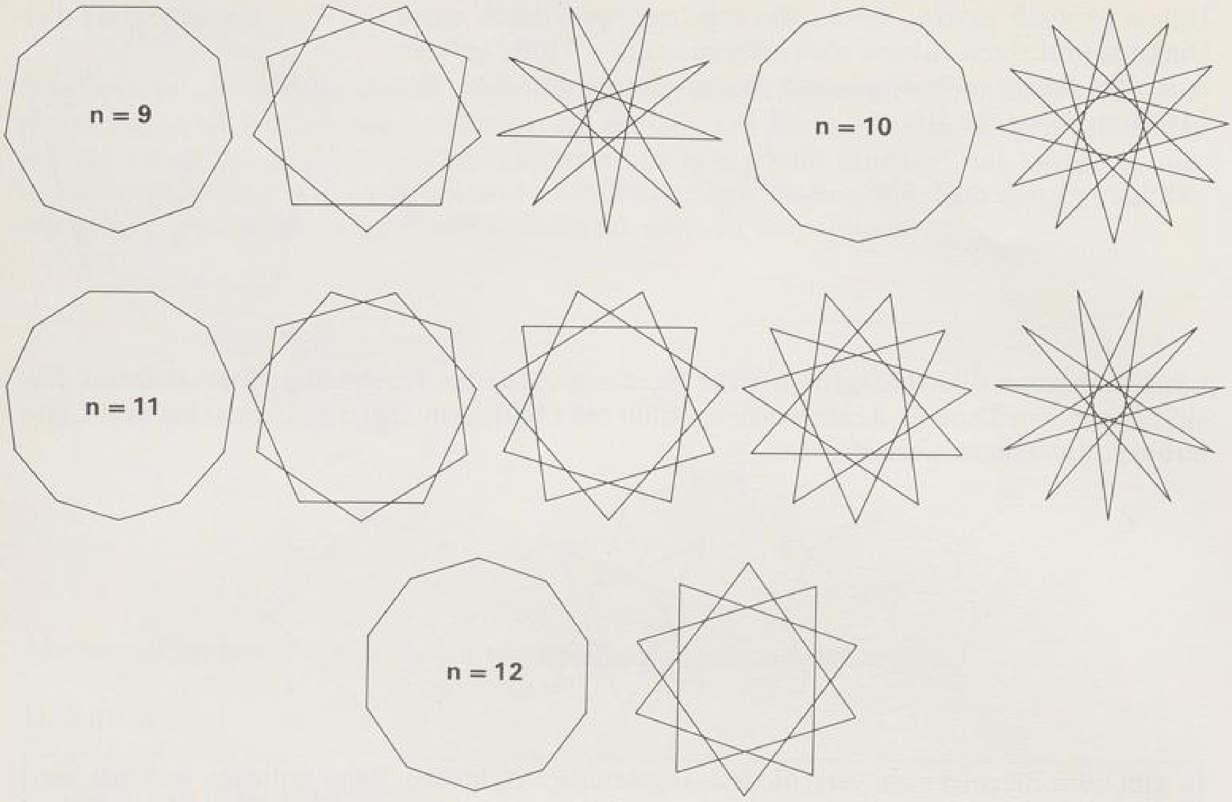
Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

*1. 2 Konstruktionen

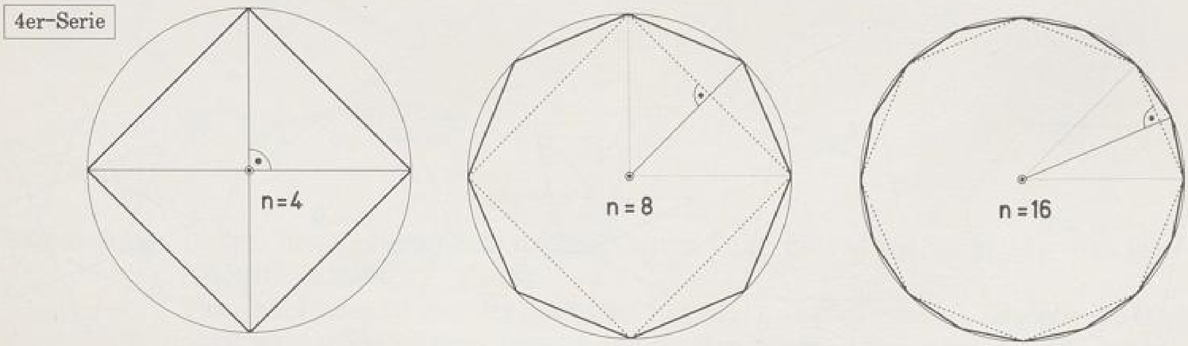
urn:nbn:de:hbz:466:1-83463



* 1.2 Konstruktionen

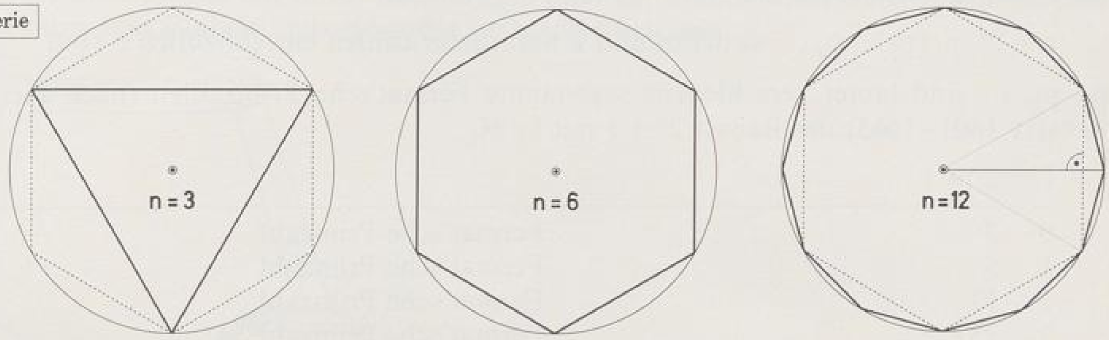
Ein regelmäßiges Vieleck ist genau dann konstruierbar, wenn der Mittelpunktswinkel μ_n konstruierbar ist. Kann man ein n-Eck konstruieren, dann klappt es auch bei einem mit der doppelten Eckenzahl (Winkel lassen sich ja verdoppeln und halbieren). Am besten fängt man mit dem Umkreis an.

Quadrat (4er Serie): Man zeichnet zwei zueinander senkrechte Durchmesser ein. Die Lote, die man vom Mittelpunkt M auf die Quadratseiten fällt, schneiden den Kreis in den Ecken des Achtecks.



Sechseck (3er Serie): Die Konstruktion ist noch einfacher. Eine Seite ist so lang wie der Radius, weil das Bestimmungsdreieck gleichseitig ist. Das Sechseck ist die Ausgangsfigur fürs Dreieck (übernächste Ecken verbinden) und fürs Zwölfeck (Lote fällen).

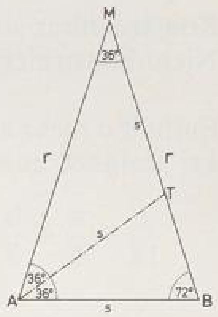
3er–Serie



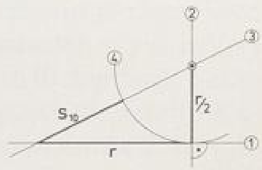
Zehneck (5er Serie): Im Bestimmungsdreieck des Zehnecks gilt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MAB und ABT

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}, \quad \text{also} \quad r^2 - rs = s^2, \quad r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = s^2 + rs + \left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

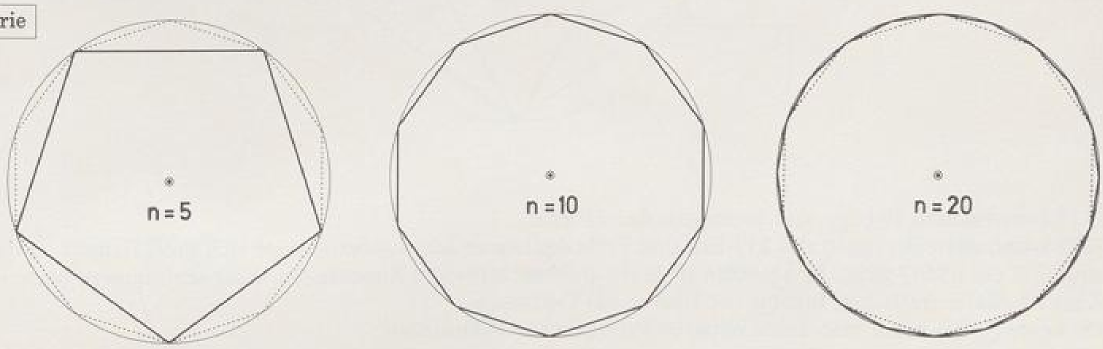
$$\text{also} \quad r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(s + \frac{r}{2}\right)^2$$



Nach Pythagoras lassen sich r, $\frac{r}{2}$ und $s + \frac{r}{2}$ deuten als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Ist der Umkreisradius r bekannt, so findet man die Seite s des Zehnecks so:
Das Zehneck ist die Ausgangsfigur fürs 5- und 20-Eck.



5er–Serie



Lange Zeit hat man geglaubt, dass nur Vieleckserien mit $n = 4 \cdot 2^k$, $n = 3 \cdot 2^k$ und $n = 5 \cdot 2^k$ konstruierbar seien, bis schließlich der deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUSS (Braunschweig 30.4.1777 bis 23.2.1855 Göttingen) im Jahr 1801 in seinen »Disquisitiones arithmeticae« bewies, dass auch noch andere regelmäßige n-Ecke konstruierbar sind. Für die Eckenzahl n muss gelten

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_m, \quad \text{wobei m und k natürliche Zahlen einschließlich 0 sind}$$

$p_1, p_2, \ldots$ sind lauter verschiedene sogenannte Fermat'sche Primzahlen (nach Pierre de FERMAT 1601–1665) der Bauart $2^{2^i} + 1$ mit $i \in \mathbb{N}_0$

i	$2^{2^i} + 1$	
0	3	Fermat'sche Primzahl
1	5	Fermat'sche Primzahl
2	17	Fermat'sche Primzahl
3	257	Fermat'sche Primzahl
4	65 537	Fermat'sche Primzahl
5	$4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$	keine Primzahl

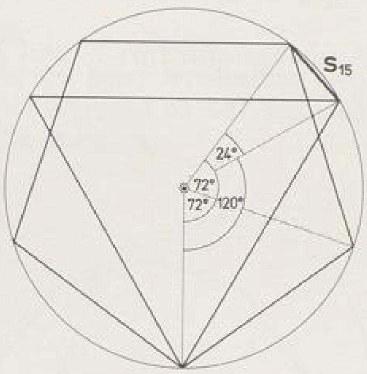
Konstruierbar sind demnach die n-Ecke mit $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10\ 12, 15, 16, 17, 20, \ldots$
Nicht konstruierbar sind die n-Ecke mit $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, \ldots$

Enthält n mehr als eine Fermat'sche Primzahl, dann kombiniert man die Mittelpunktswinkel geeignet, zum Beispiel mit $n = 15$

$$\frac{1}{15} = \frac{a}{5} + \frac{b}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{15} = \frac{3a + 5b}{15} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 3a + 5b$$

wir wählen $a = 2$ und $b = -1$

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{5} + \frac{-1}{3} \quad \| \cdot 360°, \quad \text{also} \quad 24° = 2 \cdot 72° - 120°$$



1825 konstruierten PAUKER und ERDINGER das 17-Eck.
1832 konstruierte RICHELOT das 257-Eck und Ende des letzten Jahrhunderts wagte sich Prof. HERMES an die Konstruktion des 65 537-Ecks. Er brauchte 10 Jahre und beschrieb 250 Riesenseiten, diese schlummern heute in einer Kiste im Mathematischen Institut der Universität Göttingen.
Bis heute (1995) kennt man keine weiteren Fermat'schen Primzahlen.