Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

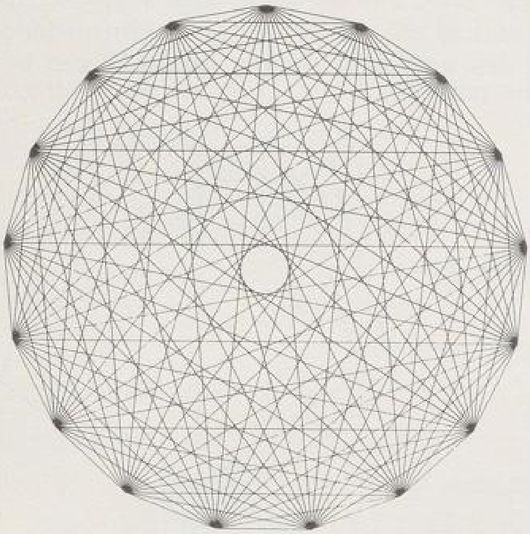
München, 1997

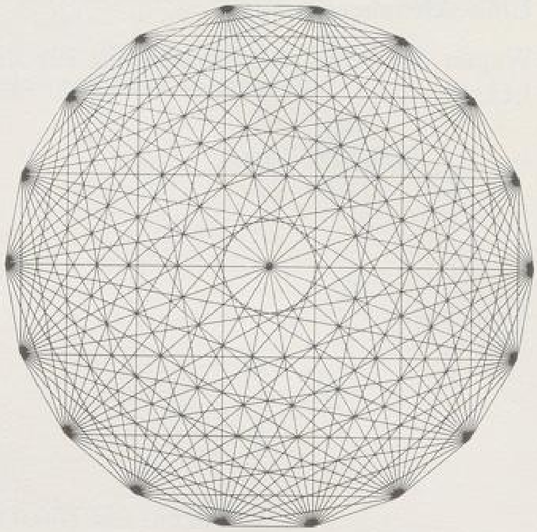
Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

Aufgaben zu 1.1

Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n-Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n-Eck) gemeint.





1. Welche Vielecke haben keine parallelen Seiten?
2. Bei welchen Vielecken schneiden sich Diagonalen im Mittelpunkt des Vielecks? Wie viele Diagonalen schneiden sich dann?
3. **a)** Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem Zwölfeck?
   b) Welches n-Eck hat die Winkelsumme 17 640°?
   Wie groß ist ein Innenwinkel?
4. Wie groß ist jeweils ein Innenwinkel im n-Eck?
   a) n = 3 **b)** n = 4 **c)** n = 5 **d)** n = 15 **e)** n = 17
   f) n = 51 **g)** n = 85 **h)** n = 255 **i)** n = 257
5. Zeichne ein Fünfeck, das nicht regelmäßig ist:
   a) mit lauter gleich langen Seiten
   b) mit lauter gleich großen Winkeln.
6. Wie groß ist im n-Eck
   a) ein Innenwinkel
   b) die Innenwinkelsumme
   c) die Außenwinkelsumme
   d) ein Basiswinkel im Bestimmungsdreieck
   e) der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks (Zentriwinkel)?

• 7. **a)** Wie viele Diagonalen hat ein n-Eck?
   b) In wie viele Dreiecke wird ein n-Eck durch die Diagonalen von einer Ecke aus zerlegt?

8. **a)** Wie viele Symmetrieachsen hat ein n-Eck? Beschreibe die Lage der Achsen.
   b) Welche n-Ecke sind punktsymmetrisch?

9. Welche Sätze sind falsch? (Gegenbeispiel!)
   - **a)** Für einen Innenwinkel α im Vieleck gilt: $60° \leqq \alpha \leqq 120°$.
   - **b)** Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
   - **c)** Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Inkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
   - **d)** Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich große Winkel hat.
   - **e)** Ein n-Eck und ein k-Eck sind genau dann ähnlich, wenn $n = k$ ist.
   - **f)** Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie denselben Umkreis haben.

• 10. Wie viele Sternvielecke gibt es mit
   a) 15 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 100 Ecken?

: 11. Zeige: Ist p eine Primzahl, dann gibt es in einem Kreis $(p-1)/2$ regelmäßige p-Ecke.

12. **a)** In welchem n-Eck gibt es 1175 Diagonalen?
   b) In welchem n-Eck ist ein Innenwinkel $\alpha_n = 178{,}2°$?

Aufgaben zu 1.2

Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n-Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n-Eck) gemeint.

1. Konstruiere in einen Kreis mit $r = 8$ ein
   a) Dreieck und Zwölfeck **b)** Achteck
   c) Zehneck und Fünfeck **d)** Fünfzehneck.

• 2. Begründe, warum das n-Eck konstruierbar ist:
   a) $n = 192$ **b)** $n = 512$ **e)** $n = 8\,589\,934\,594$
   c) $n = 920$ **d)** $n = 17\,408$

• 3. Das 51-Eck lässt sich über das 17-Eck und das gleichseitige Dreieck konstruieren, das 85-Eck über das 17-Eck und Fünfeck. Gib jeweils die Gleichung für die Konstruktion des Mittelpunktswinkels an. (Keine Konstruktion!)

4. Bei der Konstruktion von Vielecken gibt es zwei Aufgabentypen:
   I Der Umkreisradius ist gegeben,
   II die Seitenlänge s ist gegeben.
   a) Warum und wie kann man Aufgaben vom Typ II mit Hilfe von Typ I lösen?
   b) Konstruiere nach **a)** ein Fünfeck mit $s = 6$.

5. **a)** Konstruiere ein Achteck mit $s = 5$.
   b) Konstruiere ein Zwölfeck mit $s = 3$.

• **6.** »Konstruktion« des Siebenecks mit dem Einschiebelineal (nach BREIDENBACH)
Ein Einschiebelineal ist ein Lineal, auf dem man zwei Punkte markiert. Man legt das Lineal so durch einen gegebenen Punkt, dass die beiden markierten Punkte auf gegebenen Linien liegen (einschieben).
Das Siebeneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
- Zeichne $H(-4|6)$ und OH.
- Markiere auf einem Lineal R und S so, dass $\overline{RS} = 6$ ist.
  Einschiebung: Lege das Lineal so durch $L(-4|2)$, dass R auf HO und S auf der positiven x-Achse zu liegen kommen.
- Die Mittelsenkrechte von [OS] schneidet den Kreis in P (über der x-Achse). P und $Q(4|0)$ bilden eine Seite des Siebenecks.
  Konstruiere nach diesem Verfahren ein Siebeneck.

• **7.** »Konstruktion« des Neunecks mit dem Einschiebelineal (nach BREIDENBACH)
Das Neuneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
- Zeichne den Kreispunkt $H(2|y>0)$.
- Einschiebung: Passe die Strecke [RS] der Länge 8 so ein, dass R auf der y-Achse, S auf der x-Achse und H auf RS zu liegen kommen.
- Die Mittelsenkrechte von [OS] schneidet den Kreis in P (über der x-Achse). P und $Q(4|0)$ bilden eine Seite des Neunecks. Konstruiere nach diesem Verfahren ein Neuneck.

Aufgaben zu 1.3

Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n-Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n-Eck) gemeint.

1. Im Kreis mit Radius r gilt für das einbeschriebene Sechseck $s_6 = r$.
Berechne für diesen Kreis c_6, c_3 und s_3.

2. Kreise um Quadratecken durch den Quadratmittelpunkt schneiden die Quadratseiten. Zeige: Die Schnittpunkte bilden ein Achteck.

3. Nach C. F. GAUSS gilt für die Seite des 17-Ecks im Einheitskreis

$$s_{17} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(17 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) - \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}$$

Ermittle mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für s_{17} im Umkreis mit $r = 9$ und zeichne damit das 17-Eck.

4. **a)** Wie lang ist die Seite s_4 des Vierecks mit dem Umkreisradius 1?
b Berechne die Seite s_{128} des 128-Ecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist.

⁝ 5. Verbindet man in einem n-Eck jeweils zwei Ecken so, dass die Verbindungsstrecke parallel ist zu einer Seite, so rahmen die Verbindungsstrecken ein kleines n-Eck ein. Berechne für $n = 5$, $n = 6$ und $n = 8$

a) aus der Seitenlänge s des n-Ecks die Seitenlänge a des kleineren n-Ecks.
b) das Verhältnis der Flächeninhalte (groß : klein).

• 6. Setze auf die Seiten der Länge s eines n-Ecks kongruente Rechtecke mit den Seitenlängen s und x. Die äußern Ecken der Rechtecke bilden ein 2n-Eck. Berechne das Seitenverhältnis $s : x$ der Rechtecke und das Flächenverhältnis $F_{2n} : F_n$ der Vielecke für

a) $n = 3$ **b)** $n = 4$ **c)** $n = 5$ **d)** $n = 6$.

• 7. Zeichne in den Einheitskreis ein Dreieck:
Die eine Seite ist so lang wie die eines Quadrats mit Umkreisradius 1, die andre Seite ist so lang wie die eines gleichseitigen Dreiecks mit Umkreisradius 1.
Bestimme die Dreieckswinkel und die Länge der dritten Seite.

• 8. Zeichne in den Einheitskreis ein Trapez:
Die eine Basis ist so lang wie die Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit Umkreisradius 1,
die andre Basis ist so lang wie die Seite eines Sechsecks mit Umkreisradius 1,
der Kreismittelpunkt liegt im Trapez.

a) Zeige: Die Schenkel sind so lang wie die Seiten eines Quadrats mit Umkreisradius 1.
b) Zeige: Die Diagonalen schneiden sich rechtwinklig.
c) Zeige: Der Diagonalenschnittpunkt S hat von einer Basis den Abstand 0,5.
d) Berechne Winkel und Flächeninhalt des Trapezes.

9. Für die Seitenlänge des Zehnecks mit Umkreisradius 1 gilt $s_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

a) Berechne daraus die Seitenlänge des zugehörigen Fünfecks.
b) Wie lang ist s_{80} im Einheitskreis?
c) Wie lang ist der Inkreisradius des 80-Ecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist?
d) Wie lang ist s_{80} im Kreis mit Radius r?

10. Zeichne einen Kreis mit Radius 5 und konstruiere ein fast regelmäßiges Siebeneck mit der Näherung von

a) HERON: $s_7 \approx \frac{1}{2} s_3$ **b)** ESTREMOW: $s_7 \approx s_{10} + \frac{1}{4} r$.

11. Dem Einheitskreis ist ein 3-, 6- und 12-Eck ein- bzw. umbeschrieben.

a) Berechne Umfang u_n und Flächeninhalt F_n des einbeschriebenen n-Ecks.
b) Berechne Umfang v_n und Flächeninhalt G_n des umbeschriebenen n-Ecks.

12. Berechne Umfang und Flächeninhalt eines 16-Ecks, das einem Kreis mit Radius r ein- bzw. umbeschrieben ist.

⁝ 13. Berechne die Seite des 15-Ecks im Einheitskreis.

14. NAHDRAN

Für alle n-Ecke mit $n \geqq 5$ gibt es bei gegebenem Umkreis folgende Näherungskonstruktion:

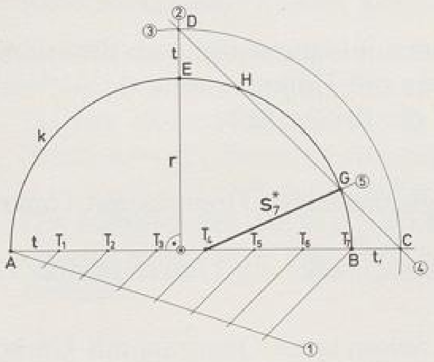
① Ein Durchmesser [AB] des Umkreises k (Mittelpunkt M, Radius r) wird in n gleiche Teile t zerlegt (Teilpunkte: $A = T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n = B$).

② Das Lot auf AB in M schneidet k in E und F.

③ Der Kreis um M mit Radius $r + t$ schneidet [MB in C und [ME in D.

④ CD schneidet k in G und H $(\overline{CG} < \overline{CH})$.

⑤ $\overline{GT_{n-3}}$ ist näherungsweise die gesuchte n-Eckseite.



Konstruiere mit diesem Verfahren

a) ein Neuneck mit $r = 9$

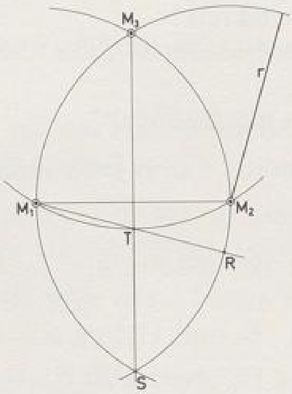
b) ein Fünfeck mit $r = 5$ und vergleiche rechnerisch den exakten Wert von s_5 mit dem Näherungswert s_5^*.

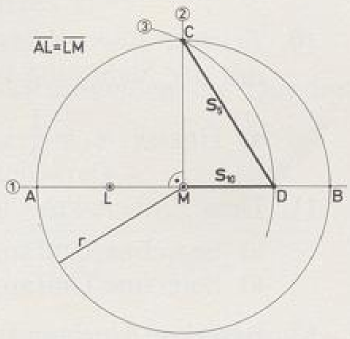
15. Konstruiere die Figur für $r = 4$ und begründe, dass für die n-Ecke mit Umkreisradius r gilt:

a) $\overline{SM_3} = s_3$ **b)** $\overline{SM_2} = s_6$

c) $\overline{SR} = s_8$ **d)** $\overline{M_1T} = s_{12}$

e) $\overline{M_2R} = s_{24}$





• 16. a) Konstruiere die Figur für $r = 4$.

b) Zeige: [MD] ist genau so lang wie die Seite s_{10} des einbeschriebenen Zehnecks, [CD] ist genau so lang wie die Seite s_5 des einbeschriebenen Fünfecks.

c) Zeige: $s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2$.

17. Dem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a ist ein Halbkreis so umbeschrieben, dass die Ecken A und B auf dem Durchmesser [UV] liegen.

a) Zeige: $\overline{UA}$ ist Seitenlänge in einem Zehneck mit Umkreisradius a.

b) Zeige: $\overline{UD}$ ist Seitenlänge in einem Fünfeck mit Umkreisradius a.

18. Beweise die Formel von J. Gregory (Drumoak 1638 bis 1675 Edinburgh):
$s_{2n}^3 = (2s_{2n} + s_n)s_{4n}^2$.

19. **a)** Zeige: $u_{2n} = \sqrt{u_n v_{2n}}$ (geometrisches Mittel) **b)** Zeige: $v_{2n} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ (harmonisches Mittel)

20. Die Formeln von J. C. Schwab:
Sind R_n und r_n die Radien von Um- und Inkreis eines n-Ecks und R_{2n} und r_{2n} die entsprechenden Radien beim 2n-Eck mit gleichem Umfang ($u_n = u_{2n}$), so gilt

$$r_{2n} = \frac{1}{2}(r_n + R_n) \qquad R_{2n} = \sqrt{R_n \cdot r_{2n}}$$

Beweise die Formeln von Schwab.

21. Zeige: $\overline{AB} = s_{15}$
$\overline{BC} = s_{10}$