Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

2. 1 Umfang

2.1. Umfang

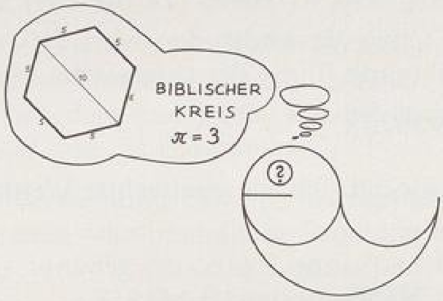
Die Frage, wie man bei gegebenem Durchmesser den Umfang eines Kreises bestimmt, hat den Menschen schon immer beschäftigt. So finden wir in der Bibel im ersten Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23: »Hierauf fertigte er ein kreisrundes Becken an, das von einem Rand bis zum andern 10 Ellen maß ..., eine Schnur von 30 Ellen umspannte es.«
Will man bei beliebigen Kreisen den Umfang aus dem Durchmesser ermitteln, so braucht man eine Formel. Um sie zu finden, erinnern wir uns zuerst daran, dass alle Kreise ähnlich sind und dass in ähnlichen Figuren gleich liegende Stücke im gleichen Verhältnis stehen. Man kann zeigen (aber das ist hier zu kompliziert), dass diese Stücke auch krummlinig sein dürfen. Demnach ist das Verhältnis Umfang : Durchmesser bei allen Kreisen dieselbe Zahl. Seit 1737 verwendet man nach Leonhard EULER (1707 bis 1783) für diese Zahl als Symbol den kleinen griechischen Buchstaben π.
Ist u der Umfang, d der Durchmesser und r der Radius eines Kreises, so gilt

$$\frac{u}{d} \text{ ist konstant, als Gleichung } \frac{u}{d} = \pi \quad \text{oder} \quad u = d\pi$$

Gewöhnlich ersetzt man d durch 2r und bekommt so die **Umfangsformel** $\mathbf{u = 2\pi r}$.

Wie groß ist π?

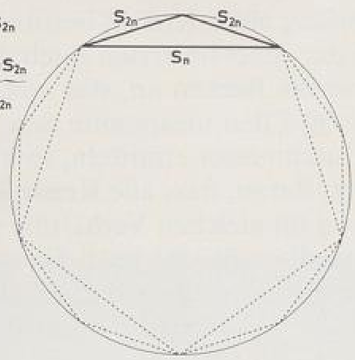
Wir machen einen kleinen Spaziergang durch die Geschichte der Berechnung von Näherungswerten für π. In den folgenden Dezimalzahlen sind die für π gültigen Werte **fett** gedruckt.



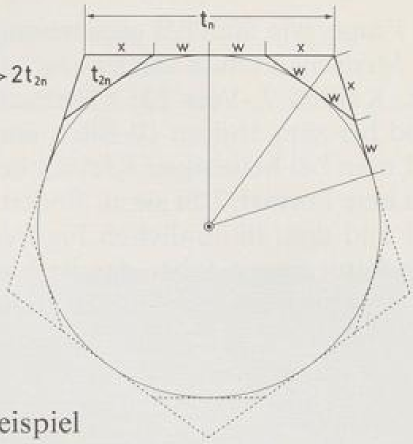
Die Bibel verwendet für π den Wert **3**. Und mit diesem Wert rechnet man auch im alten Babylon. Eine einfache Überprüfung (Maßband rumlegen oder Kreis abrollen) zeigt, dass der Wert in Wirklichkeit etwas größer ist.
Schon um 1900 v. Chr. kennen die Ägypter den Wert $(16/9)^2 =$ **3,1**604..., wie im Papyrus RHIND nachzulesen ist.
Um 500 v. Chr. rechnet man in den indischen Sulbasutras (das sind Schnurregeln zur Konstruktion von Altären) mit dem Wert $(26/15)^2 =$ **3**,0044...
PLATON (427 bis 348) gebraucht $\sqrt{2} + \sqrt{3} =$ **3,14**62...
Als erster berechnet ARCHIMEDES (287 bis 212) die Kreiszahl π systematisch, indem er den Kreis zwischen regelmäßige Vielecke einzwängt:
Man sieht leicht ein, dass der Umfang eines einbeschriebenen Vielecks kürzer ist als der Kreisumfang, denn eine Strecke ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Man kann auch zeigen (aber das ist hier zu kompliziert), dass der Umfang eines umbeschriebenen Vielecks größer ist als der Kreisumfang. Beim Verdoppeln der Eckenzahl wird der Um-

fang u_n des einbeschriebenen n-Ecks größer, der Umfang v_n des umbeschriebenen n-Ecks kleiner

$$s_n < 2s_{2n}$$
$$\underbrace{ns_n}_{u_n} < \underbrace{2ns_{2n}}_{u_{2n}}$$



$$t_{2n} = 2w < 2x$$
$$t_n = 2w + 2x > 2t_{2n}$$
$$\underbrace{nt_n}_{v_n} > \underbrace{2nt_{2n}}_{v_{2n}}$$



innen: $u_{2n} > u_n$ außen: $v_{2n} < v_n$, also ist zum Beispiel
$u_6 < u_{12} < u_{24} < u_{48} < u_{96} < \ldots < u < \ldots < v_{96} < v_{48} < v_{24} < v_{12} < v_6$

Archimedes rechnet bis zum 96-Eck. Daraus folgt: $6{,}282\,063\ldots < u < 6{,}285\,429\ldots$
wegen $r = 1$ ist $u = 2\pi$, und es ergibt sich für π die Ungleichung
$\mathbf{3{,}141}\,031\ldots < \pi < \mathbf{3{,}142}\,2714\ldots$
Weil Archimedes rationale Näherungswerte für die Wurzeln verwendet, findet er die Ungleichung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Noch heute schätzt man als gute Näherung $\pi \approx \frac{22}{7}$ oder $\pi \approx \mathbf{3{,}14}$.
Der chinesische Astronom Zhang Heng (78 bis 139) und der indische Mathematiker Brahmagupta (7. Jh. n. Chr.) verwenden den Wert $\sqrt{10} = \mathbf{3{,}1622}\ldots$
Eine ausgezeichnete Näherung findet der chinesische Mathematiker Zu Chong-Zhi (430 bis 501): $\frac{355}{113} = \mathbf{3{,}141\,592}\,920\,3\ldots$

In der Folgezeit entwickelt sich ein regelrechter Wettkampf um möglichst viele gültige Stellen von π.

Leonardo Pisano, auch Leonardo Fibonacci genannt, (etwa 1180 bis um 1250) berechnet aus dem 96-Eck den Näherungswert **3,141** 818…

1427 arbeitet der arabische Astronom Al-Kasi mit dem $6 \cdot 2^{27}$-Eck und bekommt **3,141 592 653 589** 873…
1610 erreicht der Fechtmeister und Mathematiker Ludolph van Ceulen mit einem $4 \cdot 2^{60}$-Eck 35 Dezimalen. Viele sind von dieser Leistung so beeindruckt, dass sie π fortan als Ludolf'sche Zahl bezeichnen.
1699 bringt es Abraham Sharp (1651 bis 1742) auf 71 Dezimalen.
1841 schafft William Rutherford in mühseliger Rechnung 208 Stellen, von denen leider nur die ersten 152 richtig sind.
1873 stellt William Shanks einen neuen Rekord auf: Fleiß und Ausdauer lassen ihn bis zur 707. Stelle vordringen, doch ach, bloß die ersten 527 Stellen stimmen!

Bis jetzt sind alle Näherungswerte noch Ergebnisse anstrengender Kopf- und Schreibarbeit.

1949 schließlich treten die ersten elektronischen Großrechner in die Arena. Und nun überschlagen sich die Ereignisse:

1949	2073 Stellen in 70 Stunden
1958	10000 Stellen in 100 Minuten
1961	100000 Stellen in 8,75 Stunden
1973	1000000 Stellen in 23,3 Stunden
1983	16000000 Stellen in 30 Stunden

Für π-Fans geben wir hier nur die ersten tausend Dezimalen an:

3,1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510
5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3282306647	0938446095	5058223172	5359408128
4811174502	8410270193	8521105559	6446229489	5493038196
4428810975	6659334461	2847564823	3786783165	2712019091
4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436
7892590360	0113305305	4882046652	1384146951	9415116094
3305727036	5759591953	0921861173	8193261179	3105118548
0744623799	6274956735	1885752724	8912279381	8301194912
9833673362	4406566430	8602139494	6395224737	1907021798
6094370277	0539217176	2931767523	8467481846	7669405132
0005681271	4526356082	7785771342	7577896091	7363717872
1468440901	2249534301	4654958537	1050792279	6892589235
4201995611	2129021960	8640344181	5981362977	4771309960
5187072113	4999999837	2978049951	0597317328	1609631859
5024459455	3469083026	4252230825	3344685035	2619311881
7101000313	7838752886	5875332083	8142061717	7669147303
5982534904	2875546873	1159562863	8823537875	9375195778
1857780532	1712268066	1300192787	6611195909	2164201989

Wer sich die ersten 23 Stellen merken will, lerne Geobolds Gedicht und zähle die Buchstaben.

Für die Praxis ist eine Rekordjagd nach möglichst vielen Dezimalen völlig unnütz: Um den Umfang eines Kreises von der Größe des Erdäquators auf 1 mm genau zu berechnen genügen 11 Dezimalen. Trotzdem sind solche Rekordergebnisse sinnvoll: Man testet damit die Computer und die Programme.

Heute verwendet man zur π-Berechnung nicht mehr regelmäßige Vielecke, sondern zum Beispiel unendliche Summen oder unendliche Produkte wie:

1579 VIETA: $$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

1655 WALLIS: $$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots$$

1665 NEWTON: $$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 32}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 128} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9\cdot 512}+\ldots$$

1671 GREGORY: $$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

1734 EULER: $$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

1766 beweist Johann Heinrich LAMBERT (1728 bis 1777), dass π eine irrationale Zahl ist, sich also nicht als Quotient zweier natürlicher Zahlen schreiben lässt.

1882 weist Ferdinand LINDEMANN (1852 bis 1939) nach, dass »die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung irgendwelchen Grades mit rationalen Coefficienten sein kann«. Das bedeutet: Es gibt keine Gleichung der Form

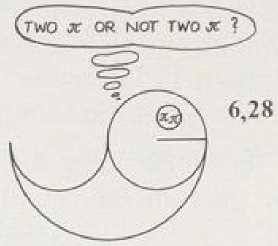
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

mit rationalem Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots$, die π als Lösung hat.

Solche Zahlen nennt man **transzendent**.

Mit seinem Beweis findet LINDEMANN auch die Antwort auf die uralte Frage, ob es allein mit Zirkel und Lineal möglich ist, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln (Quadratur des Kreises). Weil π transzendent ist, gilt:

Die Quadratur des Kreises ist unmöglich.



Noch heute verwendet man den Ausdruck ›Quadratur des Kreises‹ für scheinbar oder tatsächlich unlösbare Probleme.

Nun aber zu einem lösbaren Problem. Es zeigt eine verblüffende Folgerung aus der Kreisumfangsformel.

Wir haben einen Globus von 0,25 m Radius. Um seinen Äquator biegen wir einen Draht so, dass er eng anliegt. Die Drahtlänge ist (in Meter) $s = 2\pi r = 1{,}57\dots$. Dann nehmen wir einen Draht, der 1 m länger ist, biegen auch ihn zu einem Kreis und legen ihn konzentrisch in die Äquatorialebene. Wie groß ist der Abstand a zwischen Kreis und Kugel?

Neuer Umfang: $s^* = 1 + 1{,}57\dots = 2{,}57\dots$

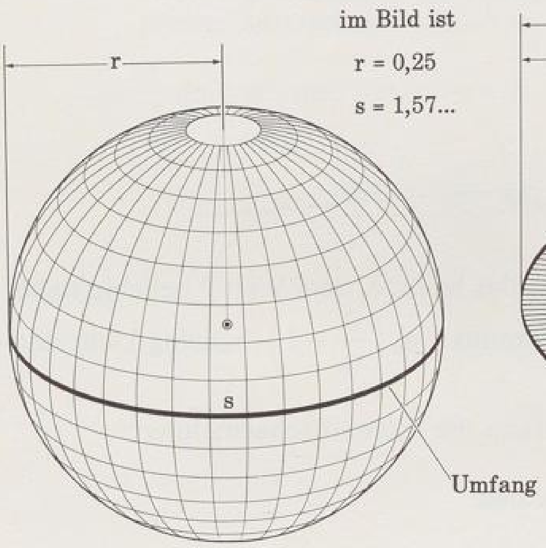
neuer Radius: $r^* = \frac{s^*}{2\pi} = 0{,}409\dots$

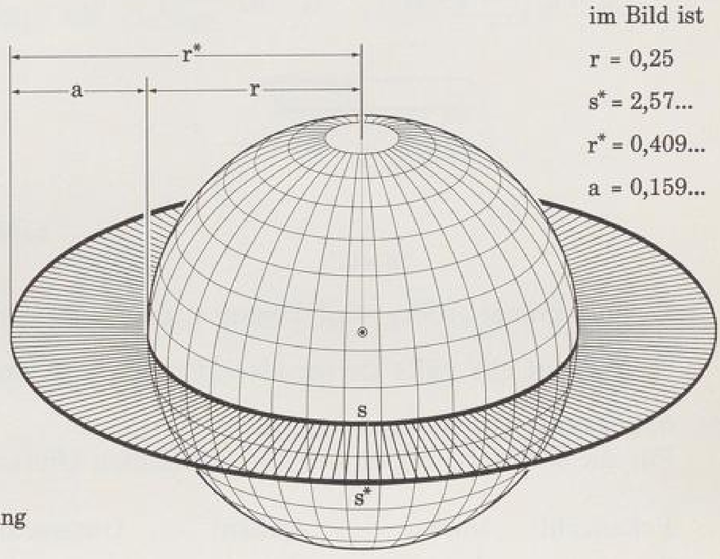
Abstand: $a = r^* - r = 0{,}159\dots$.

Der längere Drahtring steht also etwa 16 cm ab.

Jetzt machen wir dasselbe mit der großen Erdkugel.

$$\begin{aligned} \text{Radius (in Meter): } & r &= 6\,378\,388 \\ \text{Äquatorlänge: } & u &= 2r\pi = 40\,076\,593{,}765\ldots \\ \text{um 1 m längerer Umfang: } & u^* &= 1 + 40\,076\,593{,}756\ldots = 40\,076\,594{,}756\ldots \\ \text{neuer Radius: } & r^* &= \frac{u^*}{2\pi} = 6\,378\,388{,}159\ldots \\ \text{Abstand: } & a &= r^* - r = 0{,}159\ldots . \end{aligned}$$





Seltsam: Obwohl die Verlängerung von 1 Meter bei einer Länge von 40 Millionen Meter praktisch nicht erkennbar ist, steht der Drahtring wieder 16 cm von der Erde ab! Was ist da los? Das Rätsel löst sich, wenn wir die Rechnung allgemein machen.

$$\begin{aligned} \text{Radius: } & r \\ \text{Umfang: } & u = 2r\pi \\ \text{neuer Umfang: } & u^* = u + 1 = 2r\pi + 1 \\ \text{neuer Radius: } & r^* = \frac{u^*}{2\pi} = \frac{2r\pi + 1}{2\pi} = r + \frac{1}{2\pi} \\ \text{Abstand: } & a = r^* - r = r + \frac{1}{2\pi} - r = \frac{1}{2\pi} = 0{,}159\ldots \end{aligned}$$

Der Abstand a hängt nicht vom Radius ab, er ist bei jeder Kugel gleich groß!

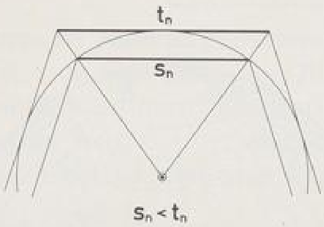
Mathematischer Hintergrund

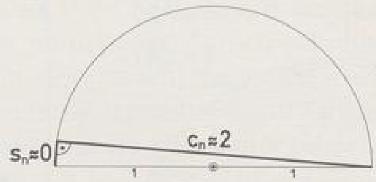
Wir haben so getan, als ob es klar wäre, was unter der Länge einer krummen Linie zu verstehen sei. Bisher können wir aber eigentlich nur die Längen von Strecken bestimmen. Bevor der Mathematiker Kreisumfänge berechnet, muss er sich überlegen, was ein Kreisumfang überhaupt sein soll. Weil ARCHIMEDES keinen Anspruch mehr auf Copyright erheben kann, benutzen wir seine gute Idee zu folgender Definition:

Der Kreisumfang ist das Ergebnis der Intervallschachtelung $[u_n; v_n]$ für unbegrenzt wachsendes n. u_n und v_n sind die Umfänge des ein- und umbeschriebenen n-Ecks.

Für den Sonderfall der Verdopplung der Eckenzahl sieht man leicht, dass eine Intervallschachtelung vorliegt:
Von Seite 22 wissen wir $u_{2n} > u_n$ und $v_{2n} < v_n$
außerdem gilt $s_n < t_n$
und damit $n \cdot s_n < n \cdot t_n$ also $u_n < v_n$ und schließlich wegen

$$t_n = s_n \cdot \frac{2}{c_n} \quad \| \cdot n \; ; \qquad v_n = u_n \cdot \frac{2}{c_n} \quad \| - u_n \; ; \qquad v_n - u_n = u_n \left(\frac{2}{c_n} - 1 \right).$$



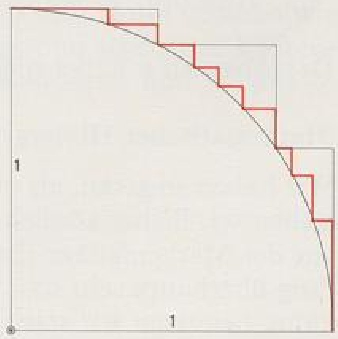


Wenn n immer größer wird, kommt s_n dem Wert 0, das heißt, c_n dem Wert 2 beliebig nahe. Weil u_n auf alle Fälle kleiner als v_3 ist, wird das Produkt $u_n \left(\frac{2}{c_n} - 1 \right)$ beliebig klein und damit auch die Differenz $v_n - u_n$.
Für die 3-er Serie ergibt sich für den halben Umfang die Intervallschachtelung:

Eckenzahl n	Innen: $\frac{1}{2} u_n$	Außen: $\frac{1}{2} v_n$	Unterschied $\frac{1}{2}(v_n - u_n)$
3	2,598 08…	5,196 15…	2,598 07…
6	**3,000** 00…	**3,464** 10…	0,464 10…
12	**3,1**05 82…	**3,**215 39…	0,109 56…
24	**3,1**32 62	**3,1**59 65…	0,027 03…
48	**3,1**39 35…	**3,14**6 08…	0,006 73…
96	**3,141** 03…	**3,14**2 71…	0,001 68…
192	**3,141** 45…	**3,141** 87…	0,000 42…

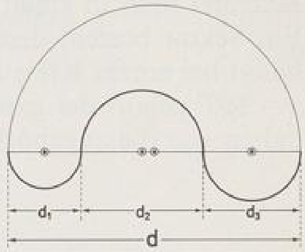
Die abstrakte und komplizierte Definition des Kreisumfangs ist deshalb nötig, weil anschauliche Überlegungen in die Irre führen können, wenn das Unendliche mit im Spiel ist. Dazu zwei Beispiele:

$\pi = \mathbf{4}$ (?) Beim Viertelkreis ist die Länge der Außentreppe auch bei beliebiger Verfeinerung immer gleich 2. Folglich ist der Kreisumfang gleich 8 und damit $\pi = 4$.



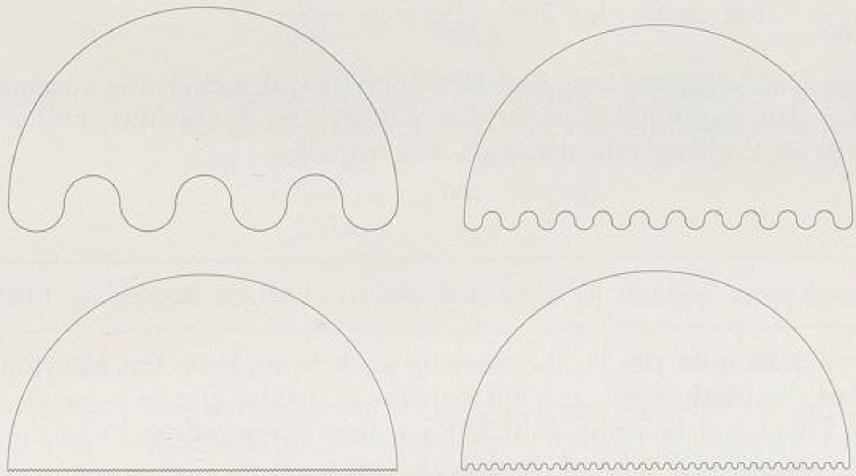
$\pi = \mathbf{2}$ (?) Die Wellenlinie besteht aus lauter Halbkreisen. Bei einer Unterteilung in drei Halbkreise gilt zum Beispiel (Durchmesser d):

$$\text{Länge der Wellenlinie} = \frac{1}{2}\,d_1\pi + \frac{1}{2}\,d_2\pi + \frac{1}{2}\,d_3\pi$$
$$= \frac{1}{2}\,(d_1 + d_2 + d_3)\,\pi = \frac{1}{2}\,d\pi$$



Das gilt auch bei beliebig vielen, beliebig kleinen Halbkreisen. Schließlich kann das Auge die Wellenlinie nicht mehr vom Durchmesser unterscheiden. Also ist

$$\frac{1}{2}\,d\pi = d \quad \text{und somit} \quad \pi = 2.$$



Das letzte von Geobold: Er meint, alle Kreise hätten denselben Kreisumfang. Zum Beweis rollt er eine Kreisscheibe ab, auf der eine kleine (rote) Kreisscheibe befestigt ist.