Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

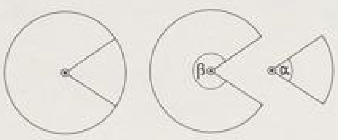
2. 2 Bogen und Bogenmaß

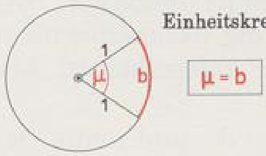
urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

2.2. Bogen und Bogenmaß

Zeichnet man in einen Kreis zwei Radien ein, so entstehen zwei Sektoren (Ausschnitte). Ein Sektor besteht demnach aus zwei Radien und einem Kreisbogen. Die Bogenlänge b hängt bei einem Kreis mit festem Radius nur vom Mittelpunktswinkel μ ab. Zum Winkel $\mu = 360°$ gehört der ganze Umfang $2r\pi$ als Bogen. Weil sich die Längen zweier Bögen verhalten wie die zugehörigen Mittelpunktswinkel, gilt

Sektoren





$$\frac{b}{2r\pi} = \frac{\mu}{360°} \quad \text{und damit} \quad b = 2r\pi \cdot \frac{\mu}{360°} = r\mu \cdot \frac{\pi}{180°}$$

Weil bei festem Radius Bogenlänge und Mittelpunktswinkel eindeutig zusammengehören, verwendet man den Bogen als Maß für den Winkel: Der Einfachheit halber nimmt man die Bogenlänge im Einheitskreis gleich als Winkelmaß.

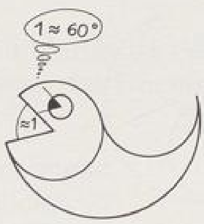
Definition

Das **Bogenmaß** eines Winkels ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis.

Im Alltag verwendet man zur Winkelmessung auch heute noch das babylonische Gradmaß. Weil aber die Mathematik nur mit Zahlen misst (hier gibt es keine Benennungen!), stellt sich die Frage, welche reelle Zahl 360° ist. Jetzt wissen wir's: Es ist die Zahl 2π! In einer Tabelle vergleichen wir Grad- und Bogenmaß:

Gradmaß	=	Bogenmaß
360°	=	2π
180°	**=**	π
90°	=	$\pi/2$
60°	=	$\pi/3$
45°	=	$\pi/4$
30°	=	$\pi/6$

$$\boxed{\begin{aligned} 1° &= \frac{\pi}{180} = 0{,}017\ldots \\ 1 &= \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3° \end{aligned}}$$



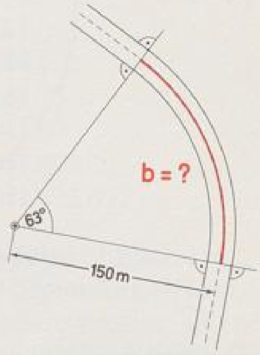
Der hochgestellte Kringel im babylonischen Winkelmaß lässt sich als Faktor $\frac{\pi}{180}$ deuten. So kann man einen Winkel leicht von einem Maß ins andre umrechnen:

$$35° = 35 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{36} \approx 0{,}61 \qquad 2{,}5 = 2{,}5 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 143{,}2°$$

Mit dem Bogenmaß wird die Formel für die Bogenlänge viel einfacher:

$$b = r\mu \cdot \frac{\pi}{180°}, \quad \text{wegen} \quad \frac{\pi}{180°} = 1 \quad \text{ergibt sich}$$

Bogenlänge $\boxed{\mathbf{b = r \cdot \mu}}$ μ im Bogenmaß



Zwei Beispiele:
Wie lang ist die Kurve? $b = 150\,\text{m} \cdot 63° = 150\,\text{m} \cdot 63 \cdot \pi/180 \approx 165\,\text{m}$

Wie lang ist eine Seemeile?

Eine Seemeile (1 sm) ist so lang wie ein Bogen eines Längenkreises der Erde (Meridian), der zum Mittelpunktswinkel 1′ gehört.

$$\begin{aligned} 1\,\text{sm} &= 6368\,\text{km} \cdot 1' = 6386\,\text{km} \cdot (1°/60) \\ &= 6386\,\text{km} \cdot (1/60) \cdot (\pi/180) \\ &= 1{,}852\,\text{km} \end{aligned}$$

2.3 Fläche

Seit 1882 (Lindemann!) wissen wir, dass die Quadratur des Kreises unmöglich ist: Mit Zirkel und Lineal allein lässt sich kein Quadrat konstruieren, das denselben Inhalt hat wie ein gegebener Kreis. Wir suchen jetzt eine Formel, mit der wir den Kreisinhalt wenigstens berechnen können.
Auf Seite 12 steht die Formel $F_n = u_n h_n/2$ für ein regelmäßiges n-Eck, das einem Kreis einbeschrieben ist. Wächst n über alle Grenzen, so kommt der Umfang u_n des n-Ecks dem Kreisumfang $u = 2r\pi$ beliebig nahe. Ebenso kommt die Höhe h_n des Bestimmungsdreiecks dem Kreisradius r beliebig nahe. Die Fläche F_n wird zur Kreisfläche und es gilt: