Anschauliche Geometrie

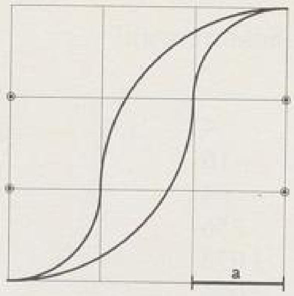
Barth, Friedrich

München, 1997

2. 4 π-Berechnung - Treppenverfahren - Gitterpunktverfahren - Zufallregen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

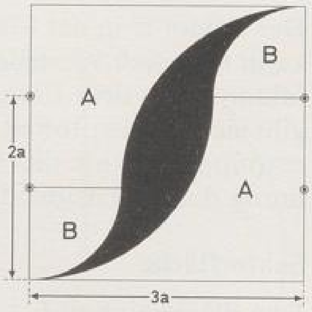
Gegeben ist eine Kreisbogenfigur im Quadratgitter mit der Gitterkonstante a. Berechne Umfang und Flächeninhalt in Abhängigkeit von a.



Umfang: Die Figur besteht aus vier Viertelkreisen, davon haben zwei den Radius a, die andern beiden den Radius 2a.

$$u = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2a\pi + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\,(2a)\,\pi = 3a\pi$$

Fläche: Den Flächeninhalt F findet man, wenn man vom Quadrat der Seitenlänge 3a die Flächenstücke A und B zweimal abzieht



$$A = \text{Rechteck} - \text{Viertelkreis}$$

$$A = 3a \cdot 2a - \frac{1}{4} \cdot (2a)^2\pi = 6a^2 - a^2\pi$$

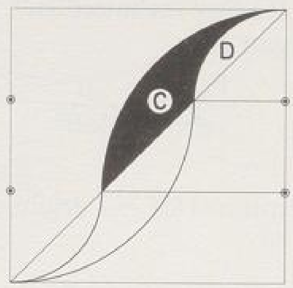
$$F = (3a)^2 - 2A - 2B \qquad \text{Viertelkreis } B = \frac{1}{4}\,a^2\pi$$

$$F = 9a^2 - 2\,(6a^2 - a^2\pi) - 2 \cdot \frac{1}{4}\,a^2\pi$$

$$F = 9a^2 - 12a^2 + 2a^2\pi - \frac{1}{2}\,a^2\pi$$

$$= \frac{3}{2}\,a^2\pi - 3a^2 = \frac{3}{2}\,a^2\,(\pi - 2)$$

Es geht auch anders: Weil die Figur punktsymmetrisch ist, wird sie von der Diagonale halbiert, das heißt $F = 2C$.



$$D = \text{kleiner Viertelkreis} - \text{kleinesDreieck}$$

$$D = \frac{1}{4}\,a^2\pi - \frac{1}{2}\,a^2$$

$$C = \text{großer Viertelkreis} - \text{großes Dreieck} - D$$

$$C = \frac{1}{4}\,(2a)^2\pi - \frac{1}{2}\,2a \cdot 2a - \left(\frac{1}{4}\,a^2\pi - \frac{1}{2}\,a^2\right)$$

$$C = a^2\pi - 2a^2 - \frac{1}{4}\,a^2\pi + \frac{1}{2}\,a^2 = \frac{3}{4}\,a^2\pi - \frac{3}{2}\,a^2$$

$$F = 2\left(\frac{3}{4}\,a^2\pi - \frac{3}{2}\,a^2\right) = \frac{3}{2}\,a^2 = \frac{3}{2}\,a^2(\pi - 2)$$

2.4 π-Berechnung

Weil die Kreiszahl π auch in der Flächenformel auftaucht, eignen sich zur π-Bestimmung auch alle Verfahren, mit denen man die Kreisfläche näherungsweise berechnet, zum Beispiel:

Treppenverfahren

Wir zerschneiden einen Viertelkreis mit Radius 1 in n gleich breite Streifen. Jeder Schnitt bestimmt zwei Rechtecke der Breite 1/n. Die Rechtecke bilden zwei Treppen: Die innere liegt ganz im Viertelkreis, sie füllt ihn um so besser, je größer die Anzahl der Rechtecke ist – und die äußere enthält den Viertelkreis, auch sie gleicht sich diesem mit wachsender Streifenzahl immer besser an. Die Inhalte von Innen- und Außentreppe kommen sich bei wachsender Streifenzahl beliebig nahe, bilden also eine Intervallschachtelung für den Viertelkreis-Inhalt. Die Bilder zeigen Außentreppen mit acht bzw. 20 Streifen und die zugehörigen Innentreppen.

Flächeninhalt der Innentreppe F_{innen}

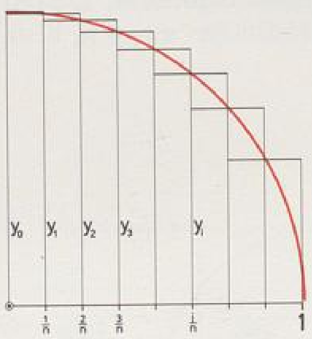
Nach PYTHAGORAS gilt für die Höhe y_i des i-ten Rechtecks

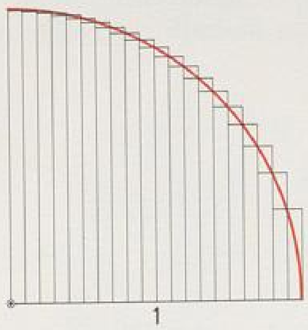
$$y_i^2 = 1^2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{n^2 - i^2}{n^2} \quad \text{also} \quad y_i = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - i^2}$$

Das i-te Rechteck hat den Inhalt $F_i = \frac{1}{n} y_i = \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2 - i^2}$

$$F_{innen} = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n$$

$$F_{innen} = \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \sqrt{n^2 - 3^2} + \ldots + \sqrt{n^2 - n^2}\right)$$

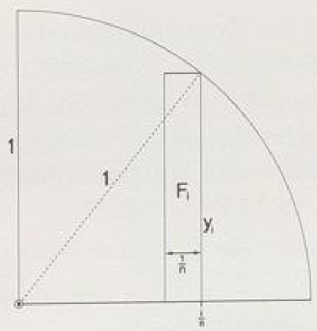




Flächeninhalt der Außentreppe $F_{außen}$

Die Außentreppe unterscheidet sich um ein Rechteck von ihrer kleineren Schwester, es ist das Rechteck mit der Höhe 1 (= Radius); sein Inhalt ist 1/n.

$$F_{außen} = F_{innen} + \frac{1}{n}$$



$4 \cdot F_{innen}$ und $4 \cdot F_{außen}$ sind Näherungswerte für den Inhalt des Einheitskreises und deshalb zugleich auch für π:

$$4 \cdot F_{innen} < \pi < 4 \cdot F_{außen}$$

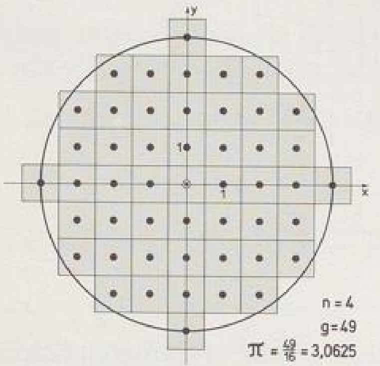
Die Tabelle machts deutlich: der Kreis im Würgegriff von Innen- und Außentreppe:

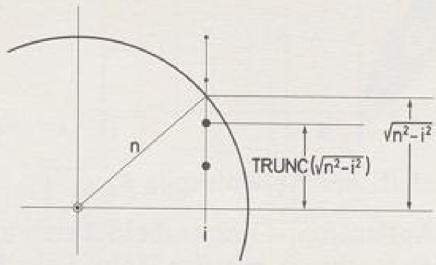
Anzahl n der Streifen	vierfacher Inhalt der Innentreppe	vierfacher Inhalt der Außentreppe	Unter-schied
8	2,83…	**3**,33…	0,5
10	2,90…	**3**,90…	0,4
20	**3**,02…	**3**,22…	0,2
100	**3,1**20…	**3,1**60…	0,04
1 000	**3,1**39 5…	**3,14**35…	0,004
10 000	**3,141** 39…	**3,141** 79…	0,000 4
100 000	**3,141 5**72…	**3,141** 612…	0,000 04
1 000 000	**3,141 59**06…	**3,141 59**46…	0,000 004

Die Mittelwerte von Außen- und Innentreppe ergeben bessere Näherungswerte für π, so zum Beispiel **3,141 592 265** 24… bei einer Million Außenstreifen.

Gitterpunktverfahren

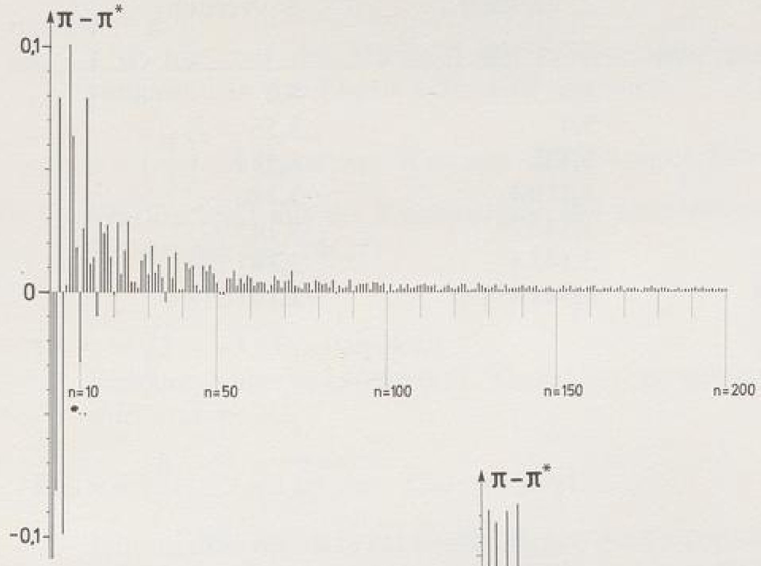
Wir zählen alle Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten in oder auf einem Kreis mit Radius $n (n \in \mathbb{N})$. Jeder Gitterpunkt repräsentiert ein Einheitsquadrat. Die Anzahl g der Gitterpunkte ist deshalb ein Näherungswert für die Kreisfläche: $g \approx n^2\pi$, also $\pi \approx g/n^2$.

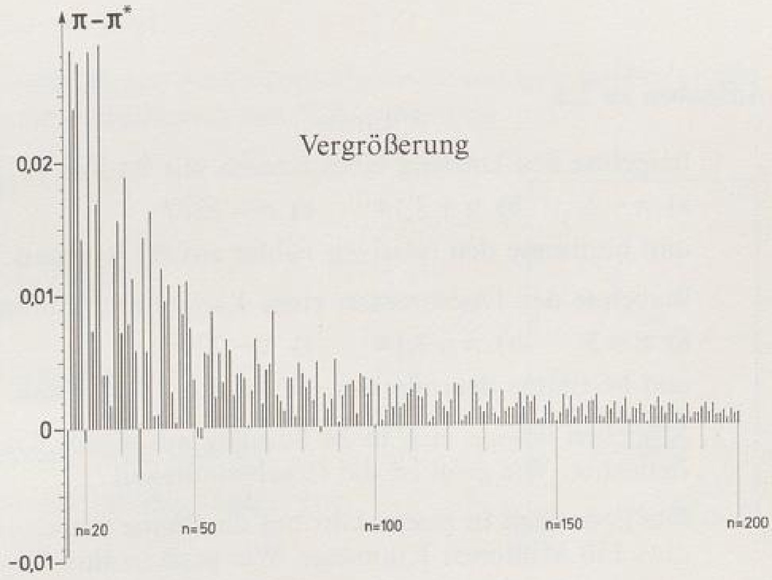




Wir zeichnen den Kreis mit Radius n in ein Koordinatensystem um M(0|0). Zuerst zählen wir alle Gitterpunkte mit positiven Koordinaten. Über dem x-Wert i liegen alle Gitterpunkte, deren y-Wert kleiner oder gleich $\sqrt{n^2 - r^2}$ ist. Solche Werte lassen sich bequem mit der TRUNC-Funktion der Computersprache Pascal berechnen.
TRUNC(x) schneidet von der Dezimalzahl x alle Nachkommastellen ab,
Beispiel: TRUNC(1,87) = 1 oder TRUNC(−3,1415) = −3.
Folglich liegen TRUNC $\left(\sqrt{n^2 - i^2}\right)$ Gitterpunkte überm x-Wert i im Viertelkreis. Insgesamt liegen $v = \text{TRUNC}\left(\sqrt{n^2 - 1^2}\right) + \text{TRUNC}\left(\sqrt{n^2 - 2^2}\right) + \ldots + \text{TRUNC}\left(\sqrt{n^2 - (n-1)^2}\right)$ Gitterpunkte mit positiven Koordinaten in oder auf dem Viertelkreis.
Zählt man die Achsenpunkte noch dazu, so ergibt sich für alle Gitterpunkte in oder auf dem Kreis die Anzahl $g = 4 \cdot v + 4 \cdot n + 1$. Die Näherungswerte g/n^2 zappeln unregelmäßig um π, kommen aber auf lange Sicht der Kreiszahl π dennoch beliebig nahe.

Radius n	Anzahl g der Gitterpunkte	Näherungswert π^* für π	$\pi - \pi^*$
2	13	**3,**25	−0,10…
3	29	**3,**22…	−0,080…
4	49	**3,**06…	0,079…
5	81	**3,**24	0,098…
6	113	**3,1**38…	0,0027…
7	149	**3,**04…	0,10…
8	197	**3,**07…	0,063…
9	253	**3,1**23…	0,018…
10	317	**3,1**7	−0,028
100	31 417	**3,141** 7	−0,000 10…
1 000	3 141 549	**3,141 59**	0,000 043…
10 000	314 159 053	**3,141 590** 53	0,000 002 1…
100 000	31 415 925 457	**3,141 592** 54…	0,000 000 10…
1 000 000	31 451 592 649 625	**3,141 592 6**49…	0,000 000 003 9…





Vergrößerung

Zufallsregen (Monte-Carlo-Methode)

Mit einem Computer erzeugen wir Paare von Zufallszahlen zwischen 0 und 1 und deuten sie als Punktkoordinaten. Solche Zufallspunkte liegen in einem Quadrat mit den Gegenecken (0|0) und (1|1). Weil der Zufall auf lange Sicht keine Gegend im Quadrat bevorzugt, verhält sich die Anzahl v der Punkte im Viertelkreis zur Anzahl q der Punkte im Quadrat annähernd wie der Inhalt des Viertelkreises zum Inhalt des Quadrats

$$\frac{v}{q} \approx \frac{\frac{1}{4}\pi}{1} \quad \text{also} \quad \pi \approx 4\frac{v}{q}.$$

Die Tabelle enthält die Ergebnisse dreier Versuche mit je 10 Millionen Tropfen und die Zwischenergebnisse in Abständen von Zehnerpotenzen. Der Zufall verteilt die Tropfen nicht so gleichmäßig, wie die Gitterpunkte liegen. Deshalb sind die Näherungswerte im Durchschnitt nicht so gut wie die im Gitterpunktverfahren.

Anzahl q der Punkte im Quadrat	Näherungswert 1. Versuch	Näherungswert 2. Versuch	Näherungswert 3. Versuch
10	4	1,6	**3**,6
100	**3**,24	**3**,4	**3**,56
1 000	**3,1**24	**3,1**32	**3,1**84
10 000	**3,1**55 6	**3,1**10 4	**3,14**6
100 000	**3,14**7 76	**3,14**5 24	**3,14**5 92
1 000 000	**3,142** 904	**3,14**3 4	**3,141** 104
10 000 000	**3,141 56**4 4	**3,141** 871 6	**3,141** 218 4

Aufgaben zu 2.1

1. Berechne den Umfang eines Kreises mit Radius 10. Verwende dazu

a) $\pi \approx 3$ **b)** $\pi \approx 3{,}14$ **c)** $\pi \approx 22/7$

und bestimme den relativen Fehler auf 0,1 % genau.

2. Berechne den Durchmesser eines Kreises mit Umfang 10. Verwende dazu

a) $\pi \approx 3$ **b)** $\pi \approx 3{,}14$ **c)** $\pi \approx 22/7$

und bestimme den relativen Fehler auf 0,1 % genau.

3. München bewegt sich in 24 Stunden auf einem Kreis mit 4260 km Radius um die Erdachse. Wie groß ist die Geschwindigkeit?

4. Die Erde läuft in einem Jahr um die Sonne auf einer kreisähnlichen Bahn vom Radius 150 Millionen Kilometer. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit?