Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

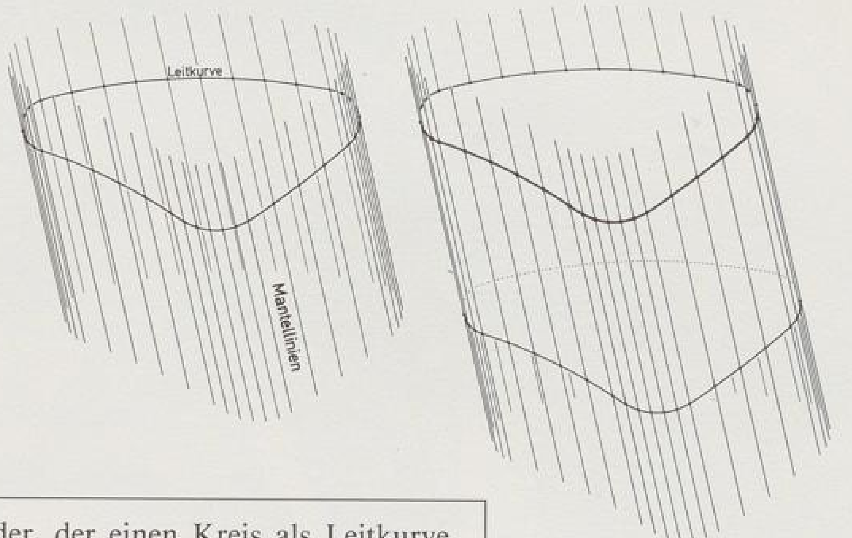
München, 1997

3. 1 Der Zylinder

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

3.1 Der Zylinder

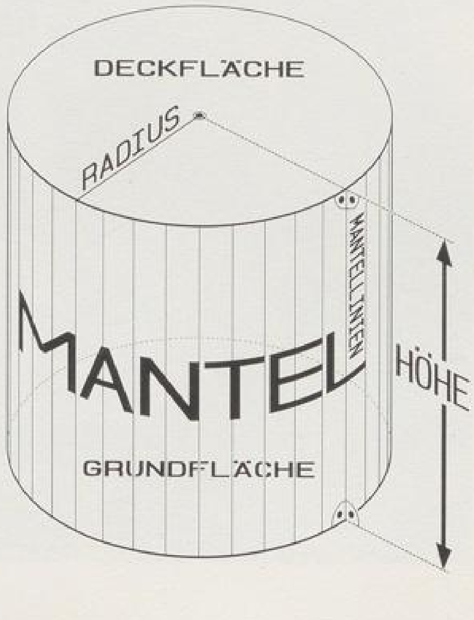
Neben dem Quader ist der Zylinder die häufigste regelmäßige Körperform in unserer Umwelt: Gaskessel, Litfaßsäulen, Münzen usw. In der Mathematik versteht man unter einem Zylinder einen Körper, der entsteht, wenn man eine Gerade parallel zu sich längs einer geschlossenen ebenen Kurve im Raum verschiebt; die Gerade darf nicht in der Ebene der Kurve liegen. Man kann sich auch vorstellen, dass das von der Kurve begrenzte Flächenstück parallel zu sich im Raum verschoben wird. Die ebene Kurve heißt **Leitkurve**, die Gerade heißt **Erzeugende** oder **Mantellinie** des Zylinders. Es gibt also unendlich viele verschiedene Zylinderformen. Wir definieren nur den einfachsten, aber wichtigsten Fall:

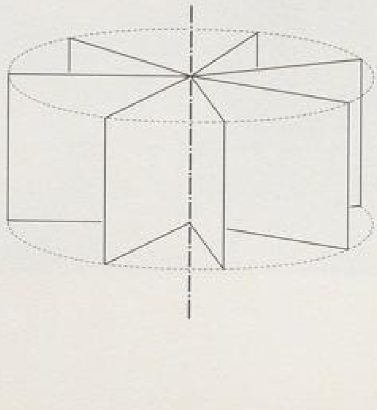


Definition

Ein Zylinder, der einen Kreis als Leitkurve hat und dessen Mantellinien senkrecht auf der Kreisfläche stehen, heißt **gerader Kreiszylinder**.

Im Folgenden beschränken wir uns auf endliche gerade Kreiszylinder, die von zwei parallelen Kreisflächen begrenzt sind, und nennen sie der Einfachheit halber kurz Zylinder. So ein Zylinder entsteht auch, wenn ein Rechteck um eine Seite als Drehachse rotiert.





Schaut man schräg auf den Zylinder, so sieht man Grund- und Deckfläche als Ellipse. Beim Zeichnen eines Schrägbilds muss man also die Kreise von Deck- und Grundfläche zu Ellipsen stauchen.

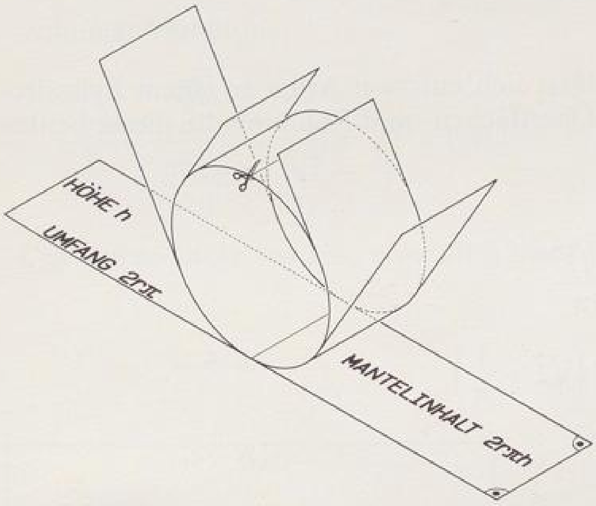
Bezeichnungen am Zylinder:	D	Deckfläche	r	Radius
	G	Grundfläche	h	Höhe
	M	Mantelfläche	m	Mantellinie
	S	Oberfläche		

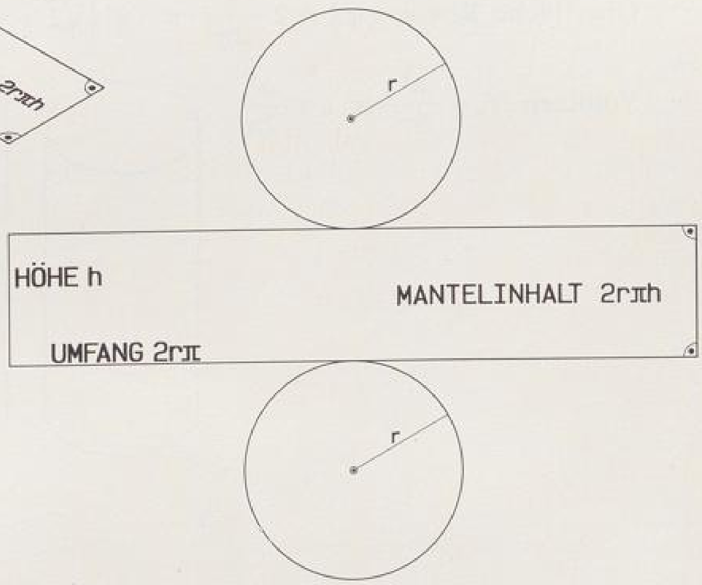
Oberfläche

Schneidet man den Mantel längs einer Mantellinie auf, so lässt er sich zu einer Rechteckfläche aufbiegen. Die Rechteckseiten sind die Höhe h und der Grundkreisumfang $2r\pi$. Deshalb gilt für

Mantelinhalt $\boxed{\mathbf{M = 2r\pi h}}$

Oberflächeninhalt $\boxed{\mathbf{S = 2r\pi h + 2r^2\pi}}$

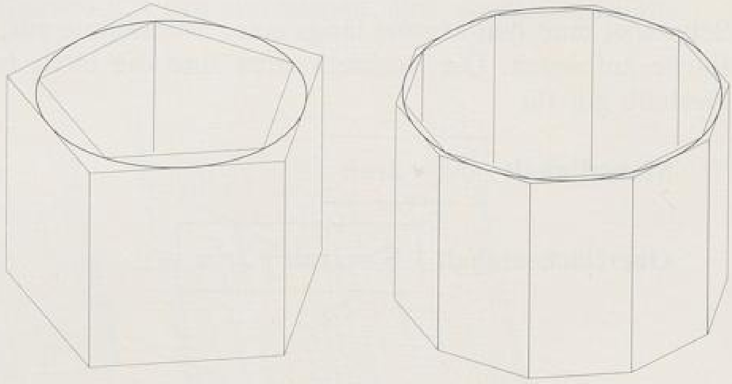




Volumen

Den Kreisinhalt haben wir bestimmt, indem wir die Kreisfläche zwischen ein- und umbeschriebene regelmäßige Vielecke eingesperrt haben. In ähnlicher Weise nähern wir den Zylinder durch ein- und umbeschriebene Prismen an. Die Prismen entstehen, wenn man Grund und Deckfläche des Zylinders durch ein- und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke ersetzt. Für alle diese Prismen gilt: **Volumen = Grundfläche mal Höhe**. Weil sich bei genügend großer Eckenzahl die Prismen beliebig wenig vom Zylinder unterscheiden, verwenden wir diese Formel auch für Zylinder:

Volumen $\boxed{V = Gh = r^2\pi h}$



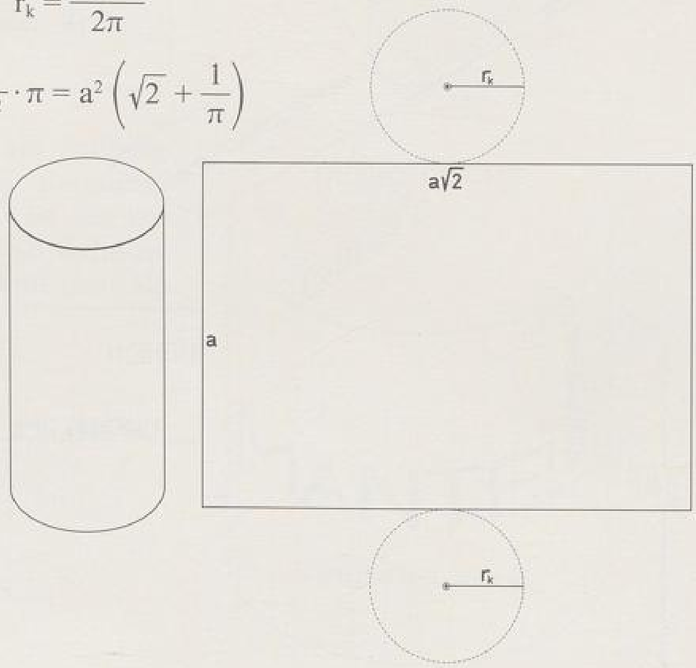
Beispiel: Ein Blatt Papier im DIN-Format lässt sich auf zwei Arten zu einem Zylindermantel biegen. Wie verhalten sich Oberflächen- und Rauminhalte dieser beiden Zylinder?

Zuerst der Kurze-Dicke:

Umfang $2r_k\pi = a\sqrt{2}$ Radius $r_k = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\pi}$

Oberfläche $S_k = a \cdot a\sqrt{2} + 2 \cdot \dfrac{a^2}{2\pi^2} \cdot \pi = a^2\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\pi}\right)$

Volumen $V_k = \dfrac{a^2}{2\pi^2} \cdot \pi \cdot a = \dfrac{a^3}{2\pi}$

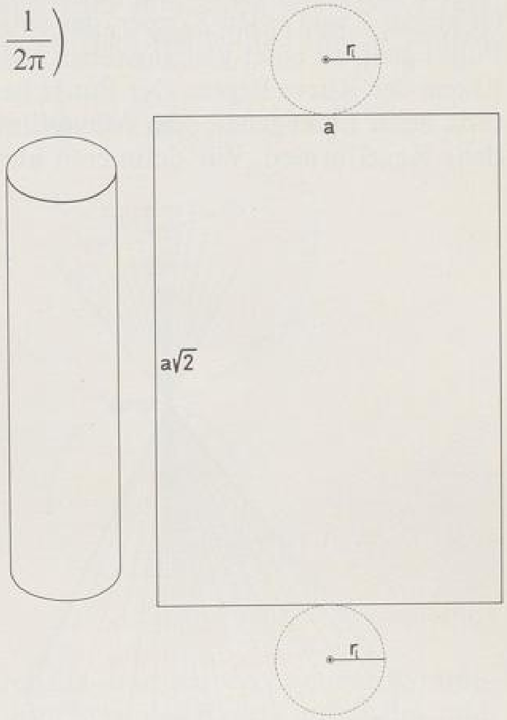


Jetzt der Lange-Dünne:

$$\text{Umfang } 2r_l\pi = a \qquad \text{Radius } r_l = \frac{a}{2\pi}$$

$$\text{Oberfläche } S_l = a \cdot a\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot \pi = a^2\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2\pi}\right)$$

$$\text{Volumen } V_l = \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot \pi a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4\pi}$$



Oberflächen-Verhältnis:

$$\frac{S_k}{S_l} = \frac{a^2\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\pi}\right)}{a^2\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2\pi}\right)} = \frac{2\pi\sqrt{2} + 2}{2\pi\sqrt{2} + 1} = 1{,}10\ldots$$

Volumen-Verhältnis:

$$\frac{V_k}{V_l} = \frac{\frac{a^3}{2\pi}}{\frac{a^3\sqrt{2}}{4\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1{,}41\ldots$$

Der Kurze-Dicke hat also etwa 10 % mehr Oberfläche und etwa 41 % mehr Rauminhalt.