Anschauliche Geometrie

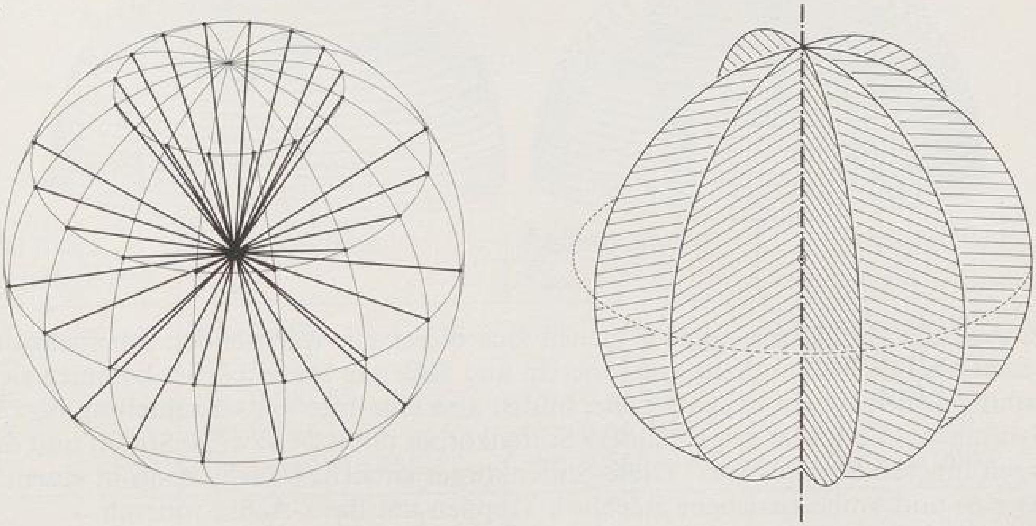
Barth, Friedrich

München, 1997

4. 1 Volumen - Scheibenmethode - Körpervergleich nach Segner - Zufallspunkte - Methode von Archimedes

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

Eine Kugel k mit Mittelpunkt M und Radius r ist die Menge aller Punkte im Raum, die von M die Entfernung r haben. Sie entsteht, wenn ein Halbkreis um seinen Durchmesser als Drehachse rotiert. Die Kugel ist also eine Fläche im Raum, vergleichbar einer Seifenblase.

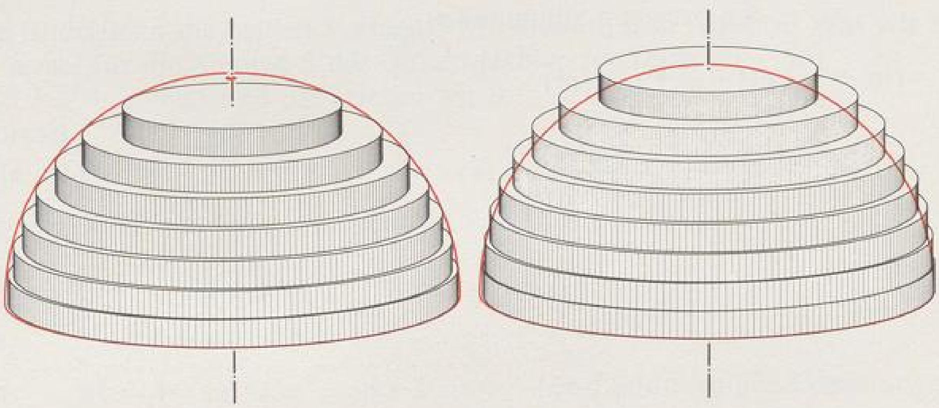


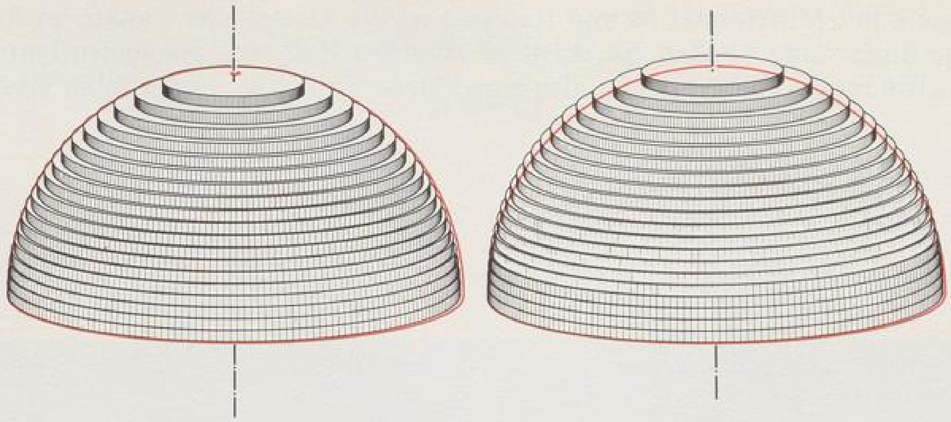
4.1 Volumen

Das Kugelvolumen zu berechnen, hat den alten Mathematikern einiges Kopfzerbrechen gemacht. EUKLID (um 300 v. Chr.) wusste zwar schon, dass sich die Inhalte zweier Kugeln so verhalten wie die dritten Potenzen ihrer Radien, aber die genaue Formel kannte er nicht. Etwa ein halbes Jahrhundert später ist es ARCHIMEDES (285 bis 212) gelungen, das Volumen einer Kugel zu bestimmen; er verwendete physikalische Überlegungen, nämlich das von ihm selber gefundene Hebelgesetz. Bevor wir seine Methode vorführen, suchen wir das Kugelvolumen zunächst mit rein mathematischen Mitteln.

Scheibenmethode

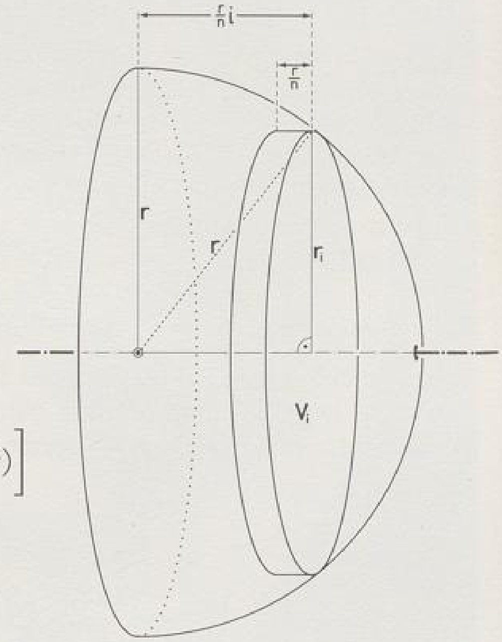
Wir schneiden eine Halbkugel mit Radius r parallel zum Grundkreis in gleichen Abständen r/n. Die Zylinderscheiben bilden zwei Stufenkörper: Der innere liegt ganz in der Halbkugel, er füllt sie um so besser, je größer die Anzahl der Scheiben ist – und der äu-





ßere enthält die Halbkugel, auch er gleicht sich dieser mit wachsender Scheibenzahl immer besser an. Die Rauminhalte von innerem und äußerem Stufenkörper kommen sich bei wachsender Scheibenzahl beliebig nahe, bilden also eine Intervallschachtelung fürs halbe Kugelvolumen. Die Bilder zeigen äußere Stufenkörper mit acht bzw. 20 Stufen und die zugehörigen inneren Stufenkörper. Diese Stufenkörper entstehen auch, wenn in einem Viertelkreis ein- und umbeschriebene Rechteck-Treppen um die x-Achse rotieren.

Volumen des inneren Stufenkörpers V_{innen}



Nach PYTHAGORAS ist $r_i^2 = r^2 - \left(i \cdot \frac{r}{n}\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$

$$
\begin{aligned}
V_{\text{innen}} &= V_1 + V_2 + \ldots + V_n \\
&= r_1^2\pi \cdot \frac{r}{n} + r_2^2\pi \cdot \frac{r}{n} + \ldots + r_n^2\pi \cdot \frac{r}{n} \\
&= r^2\left(1 - \frac{1^2}{n^2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{r}{n} + r^2\left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{r}{n} \\
&\quad + \ldots + r^2\left(1 - \frac{n^2}{n^2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{r}{n} \\
&= \frac{r^3\pi}{n}\left[\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{= n \text{ (wegen n Summanden)}} - \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right] \\
&= r^3\pi - \frac{r^3\pi}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)
\end{aligned}
$$

$$V_{\text{innen}} = r^3\pi\left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}\right) \qquad (*)$$

Volumen des äußeren Stufenkörpers $V_{außen}$

Der äußere Stufenkörper unterscheidet sich um eine Scheibe von seinem kleineren Bruder, es ist der Zylinder überm Grundkreis der Halbkugel mit dem Volumen $V' = r^2\pi \cdot r/n = r^3\pi/n$.

$$V_{außen} = V_{innen} + V' = r^3\pi\left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}\right) + \frac{r^3\pi}{n}$$

$$V_{außen} = r^3\pi\left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} + \frac{1}{n}\right)$$

Anzahl n der äußeren Scheiben	Innenvolumen V_{innen}	Außenvolumen $V_{außen}$	Unterschied $V_{außen} - V_{innen}$
8	$r^3\pi \cdot 0{,}601\ldots$	$r^3\pi \cdot 0{,}726\ldots$	$r^3\pi \cdot 0{,}125$
10	$r^3\pi \cdot 0{,}615$	$r^3\pi \cdot 0{,}715$	$r^3\pi \cdot 0{,}1$
100	$r^3\pi \cdot 0{,}661\,65$	$r^3\pi \cdot 0{,}671\,65$	$r^3\pi \cdot 0{,}01$
1 000	$r^3\pi \cdot 0{,}666\,166\,5$	$r^3\pi \cdot 0{,}667\,166\,5$	$r^3\pi \cdot 0{,}001$
10 000	$r^3\pi \cdot 0{,}666\,616\,665$	$r^3\pi \cdot 0{,}666\,716\,665$	$r^3\pi \cdot 0{,}000\,1$
n	$r^3\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)$	$r^3\pi\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)$	$\frac{r^3\pi}{n}$

Die Werte in den ersten fünf Zeilen der Tabelle lassen vermuten, dass das Volumen der Halbkugel $r^3\pi \cdot 0{,}\overline{6} = r^3\pi \cdot \frac{2}{3}$ ist. Letzte Sicherheit geben uns die Formeln fürs Innen- und Außenvolumen in der letzten Zeile: Wächst n über alle Grenzen, dann unterscheiden sich in jeder Formel die beiden von n abhängigen Brüche beliebig wenig von 0, das Halbkugel-Volumen wird immer mehr in die Enge ($= r^3\pi/n$) getrieben

$$r^3\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right) < V_{Halbkugel} < r^3\pi\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)$$

und unterscheidet sich immer weniger vom Wert $r^3\pi \cdot \frac{2}{3}$. Eine Kugel mit Radius r hat deshalb das Volumen

$$\boxed{\mathbf{K_{Kugel} = \frac{4}{3}\, r^3\pi}}$$

Doch wie findet man die beiden Formeln? Mit Geduld und Algebra! Was wir brauchen, ist eine Formel für die Summe S der Quadratzahlen im Term (*):
$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ und die kriegen wir so:
In die Formel

$$a^3 - (a-1)^3 = 3a^2 - 3a + 1$$

setzen wir der Reihe nach für a die Zahlen 1, 2, 3, …, n ein:

$$\begin{array}{ll} a = 1: & 1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\ a = 2: & 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\ a = 3: & 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \\ \cdots & \cdots \\ a = n: & n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1 \end{array}$$

und addieren alle Gleichungen.

Auf der linken Seite fallen bis auf n^3 alle Potenzen (Differenzen!) raus

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$
$$n^3 = \quad 3S \quad - \quad 3S' \quad + n \qquad (\spadesuit)$$

die erste Klammer enthält die Summe S der Quadratzahlen, die zweite die Summe S' der natürlichen Zahlen. S' findet man schnell mit dem Vorwärts-Rückwärts-Trick:

$$\begin{array}{lll} \text{vorwärts:} & S' = & 1 + \quad 2 + \quad 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\ \text{rückwärts:} & S' = & n + (n-1) + (n-2) + \ldots + \quad 3 + \quad 2 + 1 \\ \hline & 2S' = & (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1) = n(n+1) \\ & S' = & \frac{1}{2} n(n+1) \end{array}$$

Gleichung ($\spadesuit$) nach S auflösen: $S = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + S'$

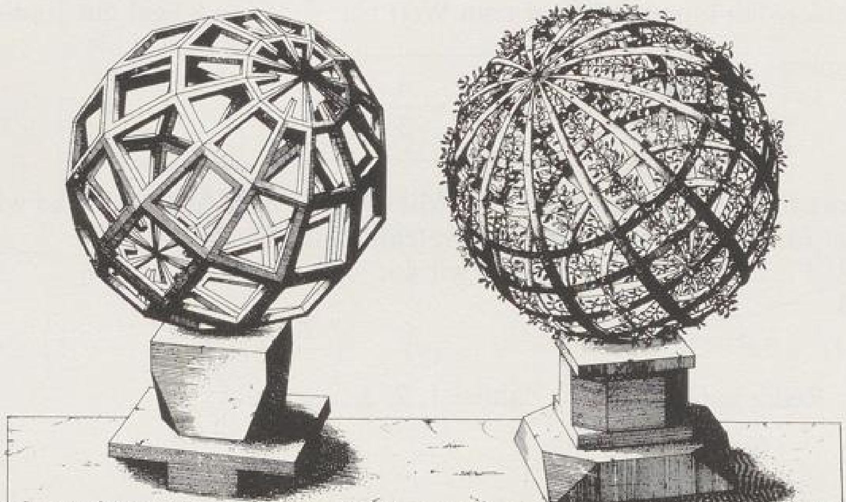
$$S = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$S = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$V_{\text{innen}} = r^3\pi\left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}\right)$$

den Zähler ersetzen wir durch den Term von S

$$V_{\text{innen}} = r^3\pi\left(1 - \frac{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}{n^3}\right) = r^3\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)$$

$$V_{\text{außen}} = V_{\text{innen}} + \frac{r^3\pi}{n} = r^3\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n}\right) = r^3\pi\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)$$



Wenzel JAMNITZER, 1568, Perspektiva Corporum Regularium

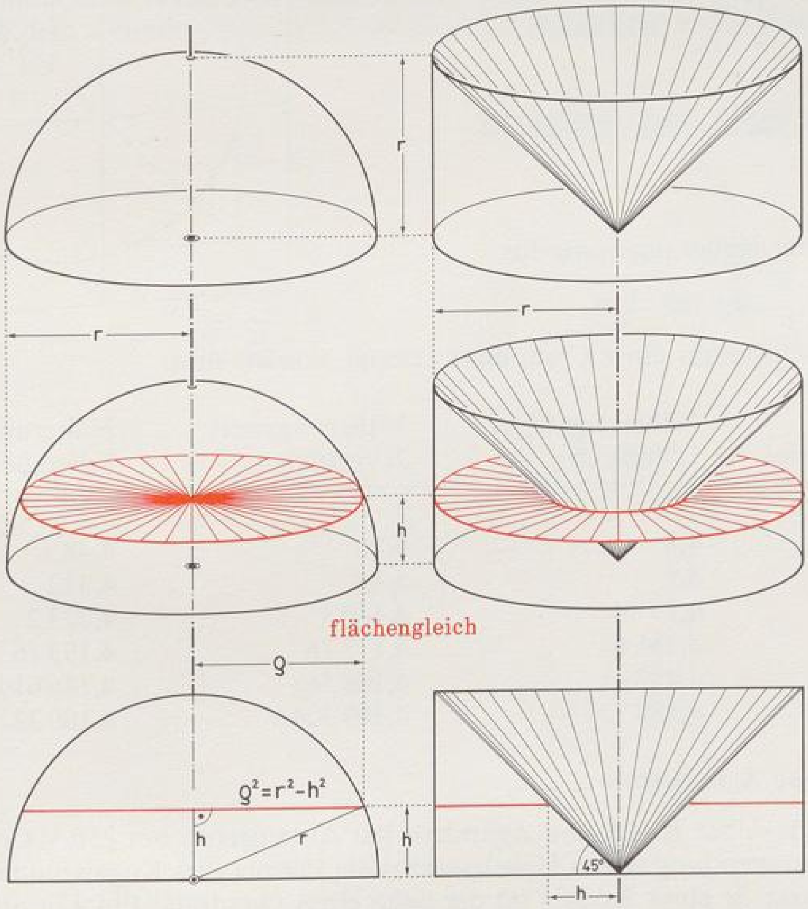
Körpervergleich nach SEGNER

Der deutsche Mathematiker und Physiker Johann Andreas von SEGNER (Preßburg 9.10.1704 bis 5.10.1777 Halle) hat 1747 einen Weg zur Bestimmung des Kugelvolumens beschrieben. SEGNER wandelt zwar in Archimedes' Spuren, doch sein Weg ist leichter verständlich. In seinem Buch »Vorlesungen über Rechenkunst und Geometrie« vergleicht er eine Halbkugel (Radius r) mit einem kegelförmig ausgebohrten Zylinder (Radius r, Höhe r). Er stellt die beiden Körper wie im Bild nebeneinander und schneidet sie in gleicher Höhe h mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen. Bei der Halbkugel ergibt sich als Schnittfigur ein Kreis (Radius ϱ) vom Inhalt $\varrho^2\pi = (r^2 - h^2)\pi$ und beim ausgebohrten Zylinder ein konzentrischer Kreisring (Radien r und h) vom Inhalt $r^2\pi - h^2\pi$. Die beiden Schnittfiguren sind in jeder Höhe flächengleich. Denkt man sich beide Körper aus dünnen Scheiben aufgebaut, dann haben zwei Scheiben in gleicher Höhe auch gleiches Volumen. Folglich haben Halbkugel und ausgebohrter Zylinder denselben Rauminhalt (Prinzip von CAVALIERI).

$$V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}}$$

$$\frac{1}{2}V_{\text{Kugel}} = r^2\pi \cdot r - \frac{1}{3}r^2\pi \cdot r = \frac{2}{3}r^3\pi$$

$$\boxed{\mathbf{V_{Kugel} = \frac{4}{3}r^3\pi}}$$



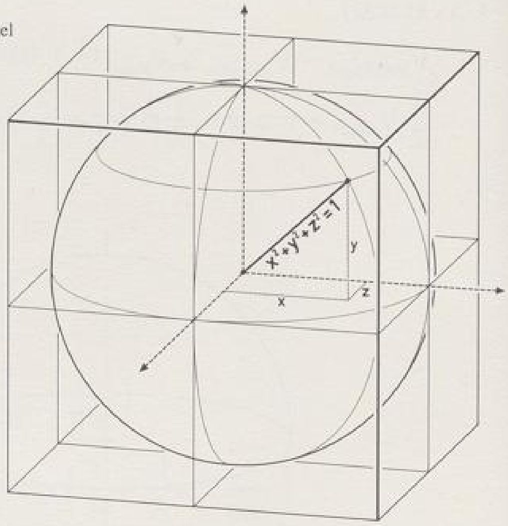
Zufallspunkte (Monte-Carlo-Methode)

Mit einem Computer erzeugen wir Tripel $(x|y|z)$ von Zufallszahlen zwischen -1 und 1 und deuten sie als Punktkoordinaten. Solche Zufallspunkte liegen in einem Würfel der Kantenlänge 2, der Ursprung ist der Mittelpunkt des Würfels. Wenn $e^2 = x^2 + y^2 + z^2$ das Entfernungsquadrat Punkt – Ursprung ist, dann liegen Punkte mit $e \leqq 1$ in oder auf der Kugel. Weil der Zufall auf lange Sicht keine Gegend im Würfel bevorzugt, verhält sich die Anzahl k der Punkte innerhalb der Kugel zur Gesamtanzahl n der Punkte im Würfel annähernd wie das Volumen der Einheitskugel zum Würfelvolumen:

$$\frac{V_{\text{Einheitskugel}}}{V_{\text{Würfel}}} \approx \frac{k}{n}, \qquad V_{\text{Würfel}} = 8, \quad \text{also} \quad V_{\text{Einheitskugel}} \approx 8 \cdot \frac{k}{n}$$

Weil alle Kugeln ähnlich sind, gilt fürs Volumen V_{Kugel} einer Kugel mit Radius r

$$\frac{V_{\text{Kugel}}}{V_{\text{Einheitskugel}}} = \frac{r^3}{1^3}, \quad \text{das heißt} \quad V_{\text{Kugel}} = r^3 V_{\text{Einheitskugel}}$$



Von den beiden Verfahren (Scheiben- und SEGNER-Methode) kennen wir schon den exakten Wert für $V_{\text{Einheitskugel}}$:

$$V_{\text{Einheitskugel}} = \frac{4}{3}\pi = 4{,}188\,790\,204\,7\ldots$$

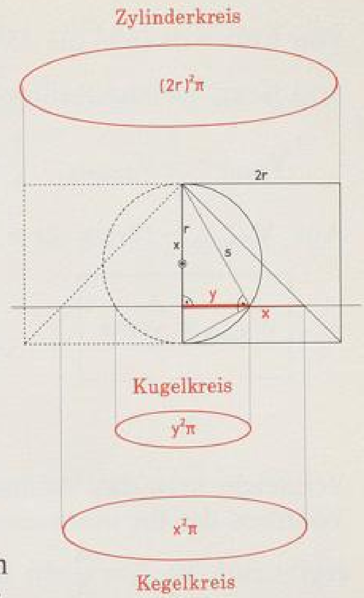
Die Tabelle zeigt Näherungswerte für $V_{\text{Einheitskugel}} \approx 8 \cdot \frac{k}{n}$, die mit dem Zufallszahlen-Generator eines Computers erzeugt worden sind.

Anzahl n der Punkte im Würfel	Näherungswert 1. Versuch	Näherungswert 2. Versuch	Näherungswert 3. Versuch
10	5,6	**4**	3,2
100	**4,**8	**4,**56	**4,**48
1 000	**4,**2	**4,1**6	**4,**312
10 000	**4,1**77 4	**4,1**40 8	**4,**223 2
100 000	**4,1**95 68	**4,1**77 76	**4,1**93 76
1 000 000	**4,1**93 48	**4,188** 568	**4,18**6 616
10 000 000	**4,188** 726 4	**4,18**9 304 8	**4,18**9 222 4

Die Methode von ARCHIMEDES

In seinem Buch »Über Kugel und Zylinder« hat ARCHIMEDES um 250 v. Chr. durch eine ausgeklügelte Anwendung seines Hebelgesetzes die Formel fürs Kugelvolumen hergeleitet. Der Durchmesser 2r eines Kreises ist die Seite eines Quadrats. Ein Lot auf dem Kreisdurchmesser schneidet den Kreis und die Diagonale des Quadrats. Es gilt

$$x^2 + y^2 = s^2 \qquad \text{(PYTHAGORAS)}$$
$$s^2 = 2rx \qquad \text{(EUKLID)}$$
also $$x^2 + y^2 = 2rx \quad \| \cdot 2r\pi$$
$$(x^2\pi + y^2\pi) \cdot 2r = (2r)^2\pi \cdot x \qquad (\blacksquare)$$



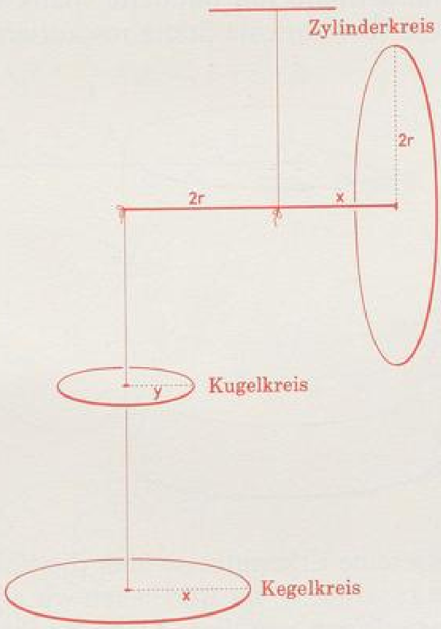
Rotiert die Figur um den Durchmesser, so entstehen ein Zylinder, ein Kegel und eine Kugel.

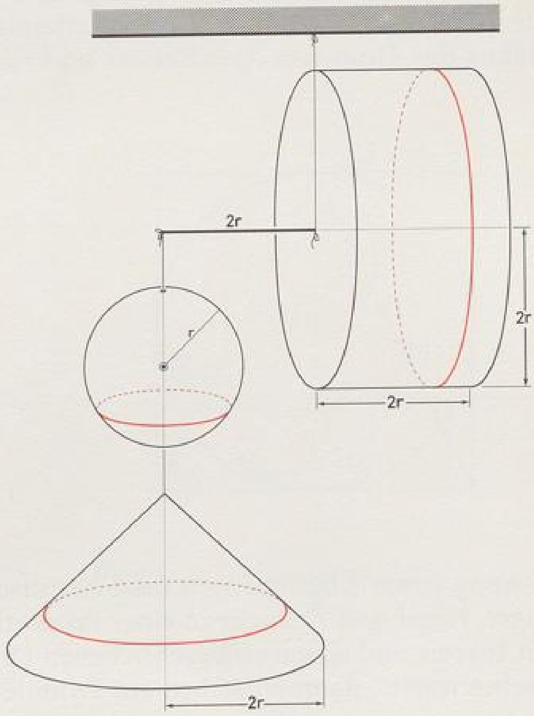
$(2r)^2\pi$ ist der Inhalt eines Zylinderkreises,
$x^2\pi$ ist der Inhalt eines Kegelkreises,
$y^2\pi$ ist der Inhalt eines Kugelkreises.

Die Gleichung ($\blacksquare$) bedeutet dann

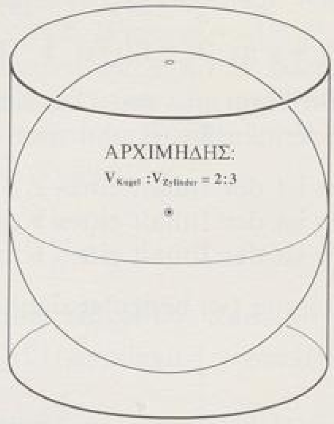
$$(\text{Kegelkreis} + \text{Kugelkreis}) \cdot 2r = (\text{Zylinderkreis}) \cdot x$$

Nach dem Hebelgesetz von ARCHIMEDES heißt das:
Die Kreisscheiben von Kegel und Kugel, die im Abstand 2r vom Drehpunkt hängen, sind im Gleichgewicht mit der Zylinderkreisscheibe, die den Abstand x vom Drehpunkt hat. Dies gilt für jedes x zwischen 0 und 2r. Folglich halten auch Kegel und Kugel, die im Abstand 2r vom Drehpunkt hängen, das Gleichgewicht dem Zylinder, dessen Schwerpunkt den Abstand r vom Drehpunkt hat.





Von Eudoxos (408 bis 355) wusste Archimedes, dass $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} V_{\text{Zylinder}}$ ist (falls Zylinder und Kegel gleiche Radien und gleiche Höhen haben).



$$V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{2} V_{\text{Zylinder}} - \frac{1}{3} V_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{6} V_{\text{Zylinder}}$$

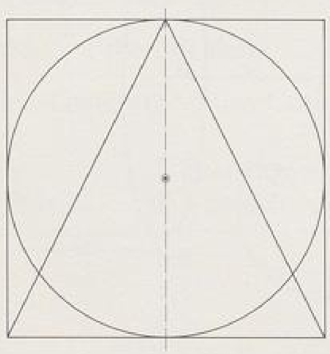
Aus $V_{\text{Zylinder}} = (2r)^2\pi \cdot 2r = 8r^3\pi$ folgt

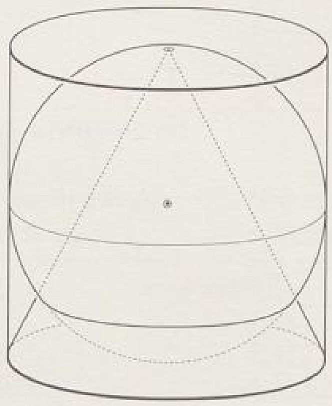
$$\boxed{\mathbf{V_{Kugel} = \frac{4}{3} r^3 \pi}}$$

Vergleicht man das Volumen einer Kugel mit dem Volumen des ihr umbeschriebenen Zylinders, so ergibt sich $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} r^3\pi$ und $V_{\text{Zylinder}} = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$, oder als Verhältnis geschrieben

$$\mathbf{V_{Kugel} : V_{Zylinder} = \frac{4}{3} : 2 = 4 : 6 = 2 : 3}$$

Auf diese Entdeckung war Archimedes sehr stolz. Auf seinen Wunsch hin meißelte man in seinen Grabstein ein Sinnbild. Es zeigt eine Kugel mit dem umbeschriebenen Zylinder und das Volumenverhältnis 2 : 3. Daran erkannte anderthalb Jahrhunderte später Cicero bei Syrakus das Grab von Archimedes und ließ die verwahrloste Stätte restaurieren.





Als Krönung seiner Überlegungen fasst Archimedes seine Erkenntnisse über die Volumina von Kugel, Kegel und Zylinder in einer Proportion zusammen. Im Bild sehen wir ein Quadrat mit Inkreis und einem einbeschriebenen Dreieck. Wenn nun diese Figur um ihre Symmetrieachse rotiert, dann entstehen ein Zylinder, eine Kugel und ein Kegel – für sie gilt

$$\begin{aligned} &\mathbf{V_{Zylinder} : V_{Kugel}} && \mathbf{= 3 : 2} \\ &\mathbf{V_{Zylinder} \quad : \quad V_{Kegel}} && \mathbf{= 3 : 1} \end{aligned}$$

zusammengefasst $\mathbf{V_{Zylinder} : V_{Kugel} : V_{Kegel} = 3 : 2 : 1}$