Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

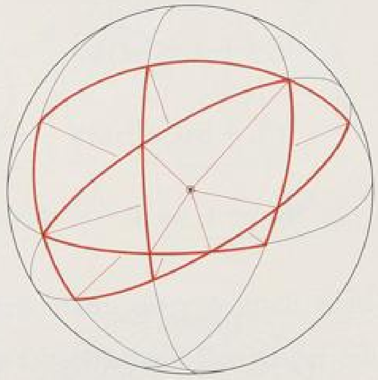
München, 1997

4. 2 Oberfläche - Pyramiden-Methode - Seifenblasenmethode

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

4.2 Oberfläche

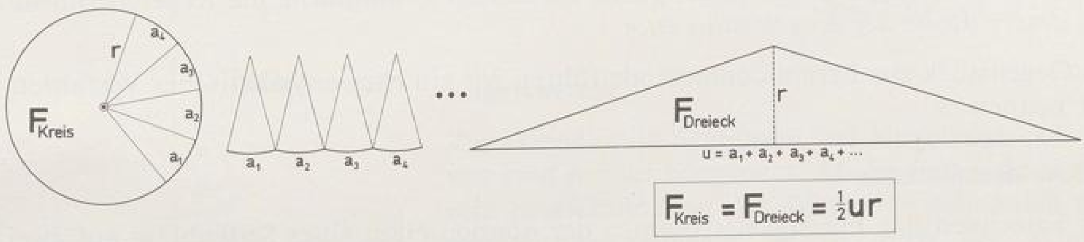
Auch den Inhalt der Kugeloberfläche hat ARCHIMEDES als erster bestimmt. Kern seiner Überlegung ist die

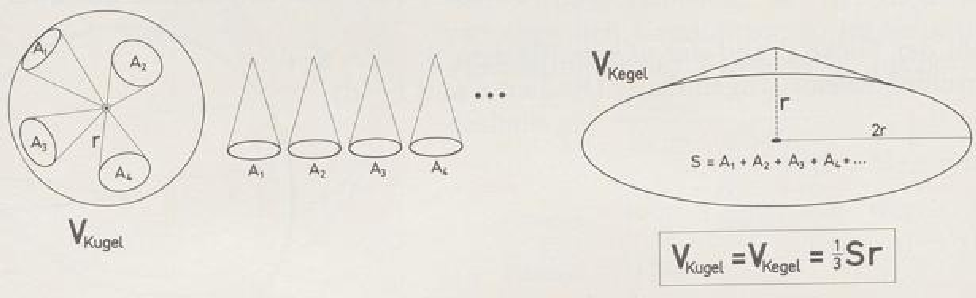


Pyramiden-Methode

Wir denken uns die Kugeloberfläche in n kleine Flächenstücke A_i zerlegt. Verbindet man alle Randpunkte mit dem Kugelmittelpunkt, so entstehen pyramidenartige Körper mit der »Höhe« r, ihre Grundflächen ergeben zusammen die Kugeloberfläche S, und ihre Rauminhalte bilden zusammen das Kugelvolumen:

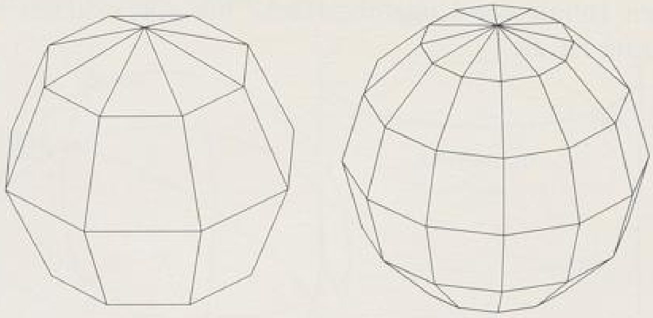
$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + \dots + V_n &= \frac{4}{3} r^3 \pi \\ \frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \dots + \frac{1}{3} A_n r &\approx \frac{4}{3} r^3 \pi \quad \| \cdot \frac{3}{r} \\ \underbrace{A_1 + A_2 + \dots + A_n}_{S} &\approx 4r^2\pi \\ &\approx 4r^2\pi \end{aligned}$$

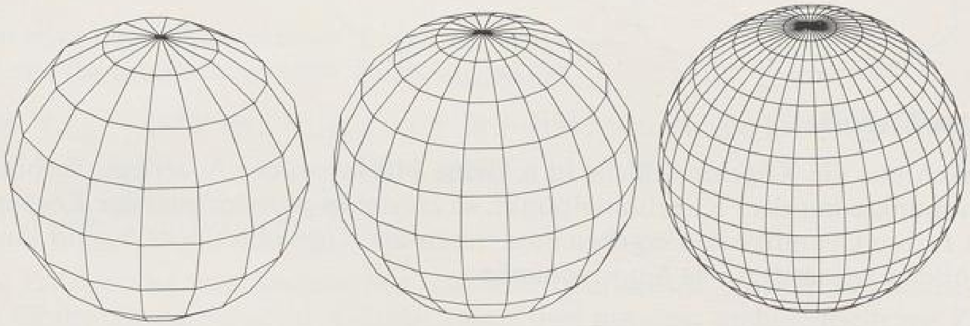




Je kleiner die Flächenstücke werden, desto besser wird die Näherung, und man kann beweisen, dass gilt

$$\boxed{S_{\text{Kugel}} = 4r^2\pi}$$





ARCHIMEDES findet dieses Ergebnis so: Er überträgt einen Flächenvergleich bei Kreis und Dreieck auf einen Volumenvergleich bei Kugel und Kegel. Seine Überlegung im Wortlaut:

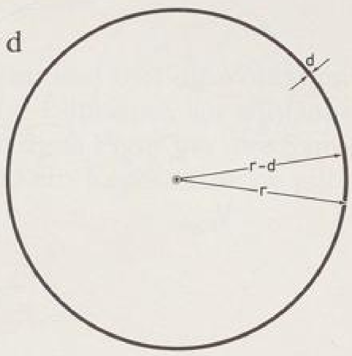
> *»... ist mir der Gedanke gekommen, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist wie deren größter Kreis, indem ich mir vorgestellt habe, daß, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie der Kreisumfang und dessen Höhe der Kreisradius ist, ebenso die Kugel einem Kegel gleich ist, dessen Grundfläche die Kegeloberfläche und dessen Höhe der Kugelradius ist.«*

Als Gegenstück zur Pyramidenmethode führen wir ein eher physikalisches Verfahren vor. Wir nennen es

Seifenblasenmethode

Wir berechnen das Flüssigkeitsvolumen der dünnen Haut einer Seifenblase auf zwei Arten:

1. als Schicht der Dicke d und der »Grundfläche« S: $V \approx S \cdot d$
2. als Unterschied zweier Kugelinhalte (Radien r und r − d)



$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} r^3\pi - \frac{4}{3}(r-d)^3\pi \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - (r-d)^3\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - (r^3 - 3r^2d + 3rd^2 - d^3)\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}\pi(3r^2d - 3rd^2 + d^3)$$

$$= \frac{4}{3}\pi d(3r^2 - 3rd + d^2)$$

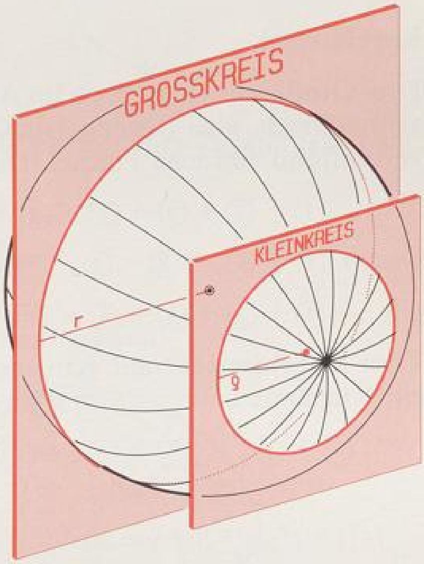
Es gilt näherungsweise: $S \cdot d \approx \frac{4}{3}\pi d(3r^2 - 3rd + d^2)$

$$S \approx \frac{4}{3}\pi(3r^2 - 3rd + d^2)$$

$$S \approx 4r^2\pi - 4r\pi d + \frac{4}{3}\pi d^2$$

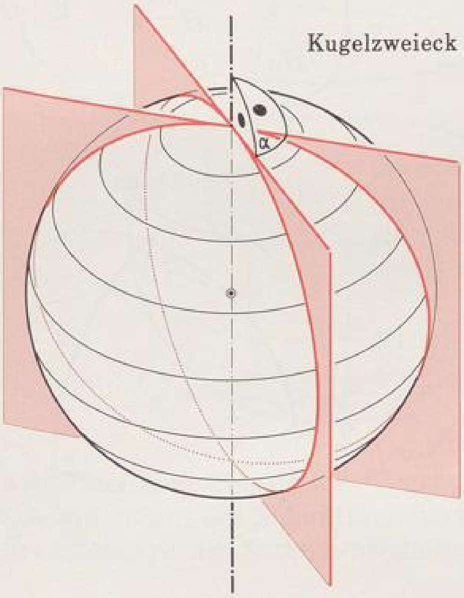
Wenn nun d beliebig klein wird, dann werden auch $4r\pi d$ und erst recht $\frac{4}{3}\pi d^2$ beliebig klein im Vergleich zu $4r^2\pi$. Die Oberfläche S der Kugel unterscheidet sich dann um beliebig wenig von $4r^2\pi$ und es gilt wiederum

$$\boxed{\mathbf{S_{Kugel} = 4r^2\pi}}$$



*4.3 Kugelteile

Schneidet eine Ebene eine Kugel, so entsteht als Schnittfigur ein Kreis. Geht die Ebene durch den Kugelmittelpunkt, so ergibt sich ein Großkreis (Kreisradius = Kugelradius), andernfalls ein Kleinkreis (Kreisradius < Kugelradius).



Kugelzweieck

Kugelzweieck

Zwei Großkreise begrenzen vier Kugelzweiecke, davon sind je zwei kongruent. Als Winkel α des Zweiecks bezeichnet man den Winkel zwischen den beiden Großkreisebenen, er ist auch der Winkel zwischen den Kreistangenten im Schnittpunkt. Der Flächeninhalt des Zweiecks ist proportional zu α, deshalb gilt $\frac{F_{Zweieck}}{S_{Kugel}} = \frac{\alpha}{360^\circ}$

$$F_{Zweieck} = 4r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \text{oder wegen } 2\pi = 360^\circ$$

$$F_{Zweieck} = 2r^2\alpha.$$