Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

*4. 3 Kugelteile - Kugelzweiech - Kugelteil - Kugeldreieck - Kugeldreikant - Kalotte und Kugelsegment - Kugelzone und Kugelschicht

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

$$= \frac{4}{3}\pi\,(3r^2d - 3rd^2 + d^3)$$

$$= \frac{4}{3}\pi d\,(3r^2 - 3rd + d^2)$$

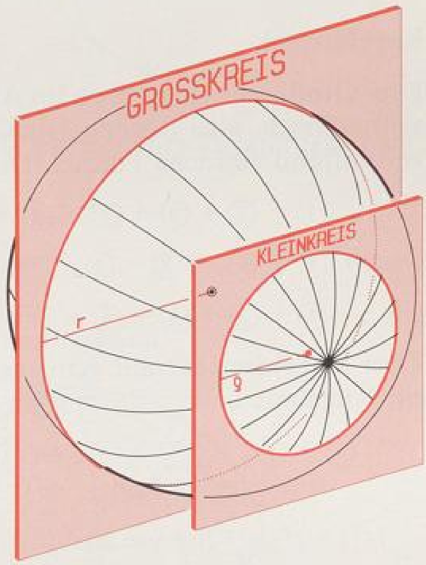
Es gilt näherungsweise: $S \cdot d \approx \frac{4}{3}\pi d\,(3r^2 - 3rd + d^2)$

$$S \approx \frac{4}{3}\pi\,(3r^2 - 3rd + d^2)$$

$$S \approx 4r^2\pi - 4r\pi d + \frac{4}{3}\pi d^2$$

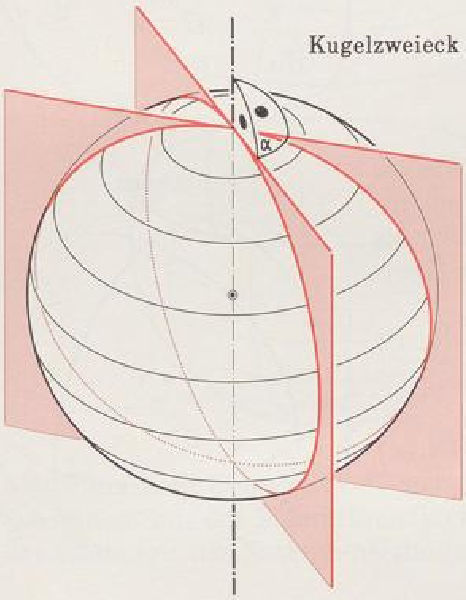
Wenn nun d beliebig klein wird, dann werden auch $4r\pi d$ und erst recht $\frac{4}{3}\pi d^2$ beliebig klein im Vergleich zu $4r^2\pi$. Die Oberfläche S der Kugel unterscheidet sich dann um beliebig wenig von $4r^2\pi$ und es gilt wiederum

$$\boxed{S_{Kugel} = 4r^2\pi}$$



*4.3 Kugelteile

Schneidet eine Ebene eine Kugel, so entsteht als Schnittfigur ein Kreis. Geht die Ebene durch den Kugelmittelpunkt, so ergibt sich ein Großkreis (Kreisradius = Kugelradius), andernfalls ein Kleinkreis (Kreisradius < Kugelradius).



Kugelzweieck

Kugelzweieck

Zwei Großkreise begrenzen vier Kugelzweiecke, davon sind je zwei kongruent. Als Winkel α des Zweiecks bezeichnet man den Winkel zwischen den beiden Großkreisebenen, er ist auch der Winkel zwischen den Kreistangenten im Schnittpunkt. Der Flächeninhalt des Zweiecks ist proportional zu α,

deshalb gilt $\frac{F_{Zweieck}}{S_{Kugel}} = \frac{\alpha}{360°}$

$$F_{Zweieck} = 4r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°} \quad \text{oder wegen } 2\pi = 360°$$

$$F_{Zweieck} = 2r^2\alpha.$$

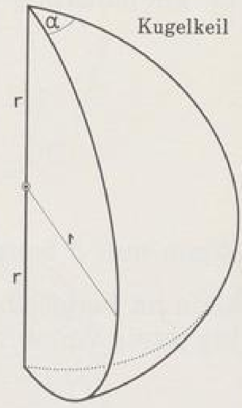
Kugelkeil

Verbindet man alle Punkte eines Zweiecks mit dem Kugelmittelpunkt, so entsteht ein Kugelkeil.

Der Rauminhalt des Kugelkeils ist proportional zu α, deshalb gilt $\dfrac{V_{\text{Kugelkeil}}}{V_{\text{Kugel}}} = \dfrac{\alpha}{360°}$

$V_{\text{Kugelkeil}} = \dfrac{4}{3} r^3\pi \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$ oder wegen $2\pi = 360°$ $V_{\text{Kugelkeil}} = \dfrac{2}{3} r^3\alpha$

oder auch $V_{\text{Kugelkeil}} = \dfrac{1}{3} F_{\text{Zweieck}} \cdot r$.



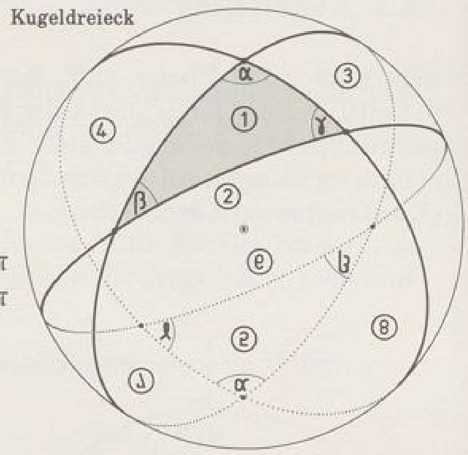
Kugeldreieck

Drei Großkreise begrenzen im Allgemeinen acht Kugeldreiecke, davon sind je zwei punktsymmetrisch, also flächengleich. Für den Flächeninhalt eines Kugeldreiecks gibt es eine verblüffend einfache Formel. Die acht Dreiecke ergeben zusammen die Kugeloberfläche

$$① + ② + ③ + ④ + ⑤ + ⑥ + ⑦ + ⑧ = 4r^2\pi$$

wegen ① = ⑤, ② = ⑥, ③ = ⑦ und ④ = ⑧

gilt $① + ② + ③ + ④ = 2r^2\pi$.

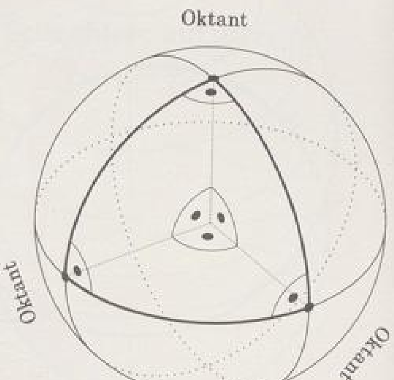


Zwei Kugeldreiecke mit gemeinsamer Seite bilden ein Kugelzweieck:

$$(① + ②) + (① + ③) + (① + ④) - ① - ① = 2r^2\pi$$
$$2r^2\alpha \quad + \quad 2r^2\beta \quad + \quad 2r^2\gamma \quad - \quad 2 \cdot ① \quad = 2r^2\pi$$
$$① = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

$$\boxed{\mathbf{F_{Kugeldreieck} = r^2(\alpha + \beta + \gamma - 180°)}}$$

Auf ein und derselben Kugel bestimmten allein die Winkel die Größe eines Kugeldreiecks. Weil Flächeninhalte positiv sind, muss die Winkelsumme in einem Kugeldreieck größer als 180° sein. Der Flächeninhalt ist sogar proportional zum Überschuss (Exzess) der Winkelsumme über 180°.
Als Beispiel berechnen wir den Inhalt eines Oktanten; das ist ein Kugeldreieck mit drei rechten Winkeln:



$$F_{\text{Oktant}} = r^2(90° + 90° + 90° - 180°) = r^2\frac{\pi}{2} \qquad \left(= \frac{1}{8} F_{\text{Kugel}}\right)$$

Kugeldreikant

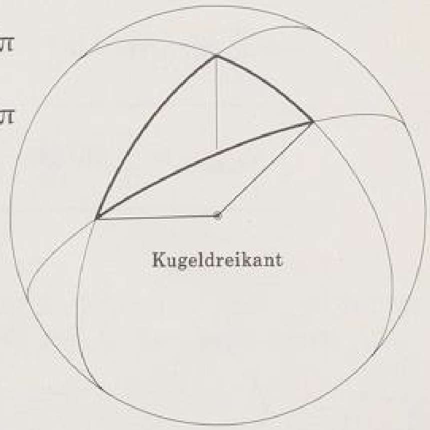
Verbindet man alle Punkte eines Kugeldreiecks mit dem Kugelmittelpunkt, so entsteht ein Kugel-Dreikant. Wir finden die Formel für sein Volumen mit der gleichen Überlegung wie oben bei der Berechnung des Inhalts von Kugeldreiecken. ①, ②, ③ ... bedeuten jetzt Dreikantvolumina.

$$(\textcircled{1} + \textcircled{2}) + (\textcircled{1} + \textcircled{3}) + (\textcircled{1} + \textcircled{4}) - \textcircled{1} - \textcircled{1} = \frac{2}{3} r^3 \pi$$

$$\frac{2}{3} r^3 \alpha + \frac{2}{3} r^3 \beta + \frac{2}{3} r^3 \gamma - 2 \cdot \textcircled{1} = \frac{2}{3} r^3 \pi$$

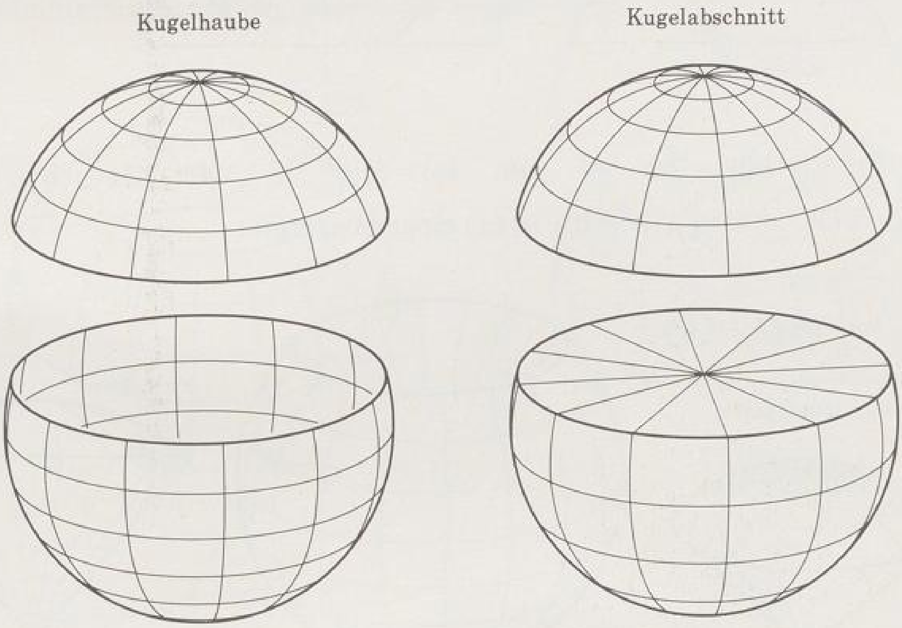
$$\textcircled{1} = \frac{1}{3} r^3 (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

$$\boxed{V_{\text{Kugeldreikant}} = \frac{1}{3} r^3 (\alpha + \beta + \gamma - \pi) = \frac{1}{3} F_{\text{Kugeldreieck}} \cdot r}$$



Der letzte Ausdruck im Kasten erinnert (zu Recht!) an die Formel fürs Pyramiden- bzw. Kegelvolumen.

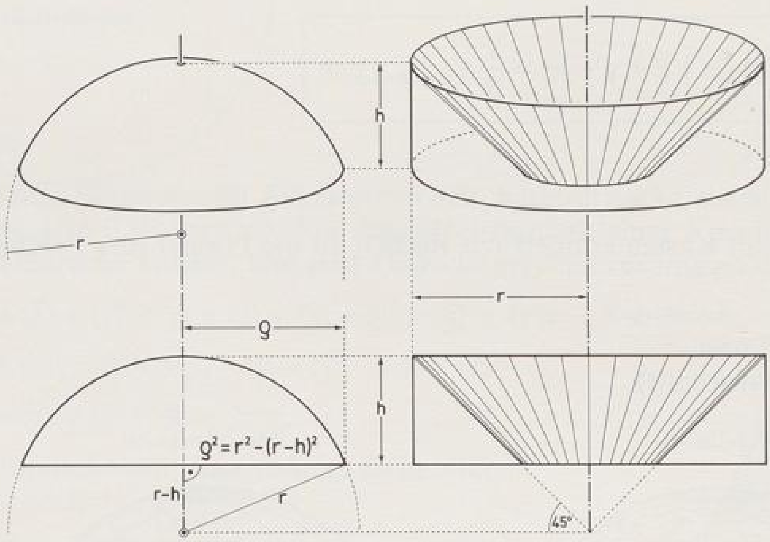
Kalotte (Kugelhaube) und
Kugelsegment (Kugelabschnitt)



Schneidet eine Ebene eine Kugel, so entstehen zwei Kugelhauben. Jede Haube begrenzt zusammen mit der Schnittkreisfläche ein Kugelsegment. Wir bestimmen das Volumen des Segments mit der SEGNER-Methode.

$$
\begin{aligned}
V_{Segment} &= V_{Zylinder} - V_{Kegelstumpf} \\
&= r^2\pi h - \frac{1}{3}\pi h\,[r^2 + (r-h)r + (r-h)^2] \\
&= \frac{1}{3}\pi h\,[3r^2 - r^2 - r^2 + rh - r^2 + 2rh - h^2] \\
&= \frac{1}{3}\pi h\,[3rh - h^2]
\end{aligned}
$$

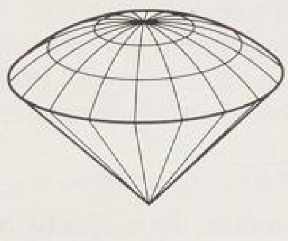
$$
\boxed{\mathbf{V_{Segment} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)}} \qquad (\blacklozenge)
$$

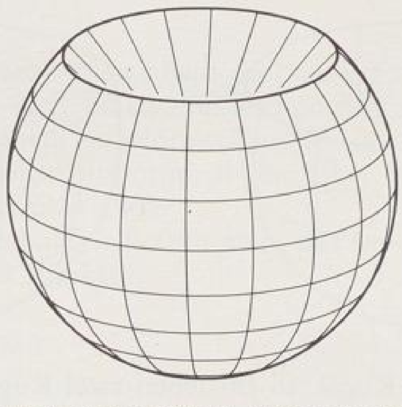


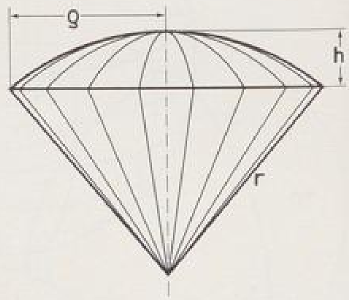
Wegen $\varrho^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$ gilt $3\varrho^2 = 6rh - 3h^2$ oder $3\varrho^2 + h^2 = 6rh - 2h^2 = 2h(3r-h)$. $h(3r-h) = \frac{1}{2}(3\varrho^2 + h^2)$ in ($\blacklozenge$) eingesetzt, ergibt

$$
\boxed{\mathbf{V_{Segment} = \frac{1}{6}\pi h\,(3\varrho^2 + h^2)}}
$$

Kugelausschnitt







Ergänzt man den Kugelabschnitt mit einem Kegel, dessen Spitze der Kugelmittelpunkt ist, so entsteht ein **Kugelsektor (Kugelausschnitt)**. Für sein Volumen gilt

$$V_{Sektor} = V_{Segment} + V_{Kegel}$$
$$= \frac{1}{3} h^2\pi (3r - h) + \frac{1}{3} \varrho^2\pi (r - h),$$

wegen $\varrho^2 = r^2 - (r - h)^2 = 2rh - h^2$ ergibt sich

$$V_{Sektor} = \frac{1}{3} \pi [3rh^2 - h^3 + (2rh - h^2)(r - h)]$$
$$= \frac{1}{3} \pi h [3rh - h^2 + 2r^2 - 2rh - rh + h^2]$$

$$\boxed{\mathbf{V_{Sektor} = \frac{2}{3} \pi h r^2}}$$

Mit dieser Formel bestimmen wir den Flächeninhalt einer Kalotte. Wir gehen so vor wie bei der Pyramiden-Methode zur Berechnung der Kugeloberfläche und bekommen

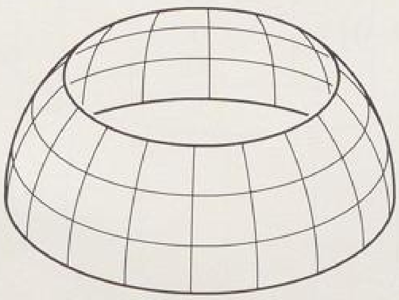
$$V_{Sektor} = \frac{1}{3} F_{Haube} \cdot r = \frac{2}{3} \pi r^2 h, \quad \text{also}$$

$$\boxed{\mathbf{F_{Haube} = 2r\pi h}}$$

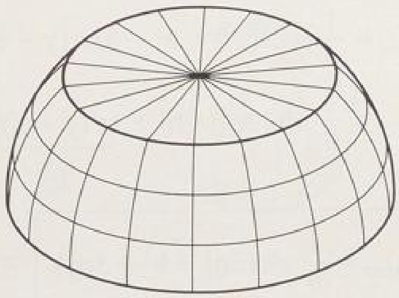
Kugelzone und **Kugelschicht**

Zwei parallele Ebenen schneiden aus einer Kugel eine Kugelzone aus. Die Zone und die beiden Schnittkreisflächen begrenzen eine Kugelschicht.

Kugelzone



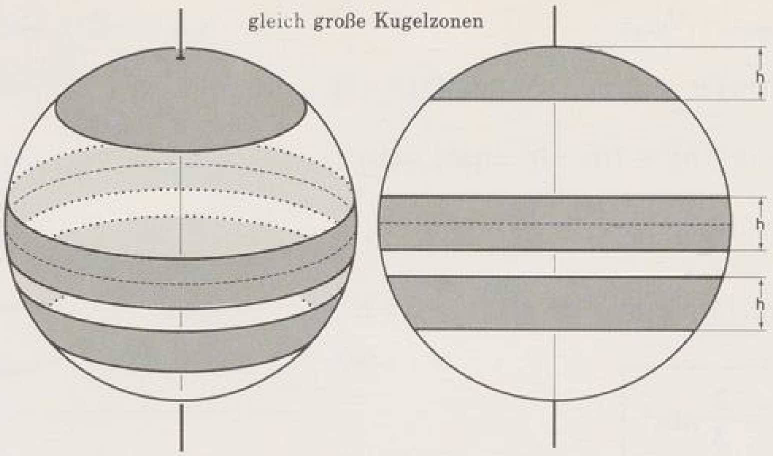
Kugelschicht



$$F_{Zone} = S_{Kugel} - F_{Haube\,x} - F_{Haube\,y}$$
$$= 4r^2\pi - 2rx\pi - 2ry\pi$$
$$= 2r\pi (2r - x - y)$$

$$\boxed{\mathbf{F_{Zone} = 2r\pi h}}$$

Erstaunlicherweise hängt der Flächeninhalt einer Zone nur von ihrer Höhe und gar nicht von ihrer Lage auf der Kugel ab. Die Formel enthält auch den Sonderfall der Kugelhaube.

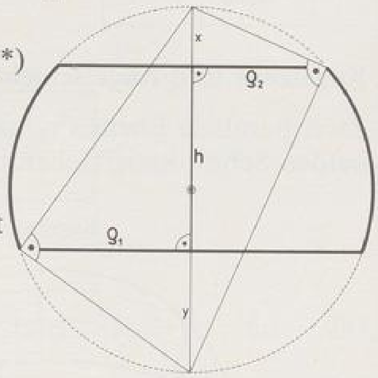


Die Herleitung der Formel fürs Volumen der Kugelschicht dagegen ist mühsam und trickreich. Vom Segment der Höhe h + x schneiden wir das Segment der Höhe x ab: übrig bleibt die Schicht der Höhe h

$$V_{\text{Schicht}} = \frac{1}{6}\pi(h+x)\left[3\varrho_1^2 + (h+x)^2\right] - \frac{1}{6}\pi x(3\varrho_2^2 + x^2)$$

$$= \frac{1}{6}\pi\left[3\varrho_1^2 h + 3\varrho_1^2 x + h^3 + 3h^2x + 3hx^2 + x^3 - 3\varrho_2^2 x - x^3\right]$$

$$= \frac{1}{6}\pi\left[3\varrho_1^2 h + h^3 + 3x(\varrho_1^2 - \varrho_2^2) + 3hx(h+x)\right] \qquad (*)$$



Höhensatz: $\varrho_1^2 = (h+x)y$

$\varrho_2^2 = (h+y)x$

$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = h(y-x)$ eingesetzt in (*) ergibt

$$V_{\text{Schicht}} = \frac{1}{6}\pi\left[3\varrho_1^2 h + h^3 + 3xh(y-x) + 3xh(h+x)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\pi h\left[3\varrho_1^2 + h^2 + 3\underbrace{x(y+h)}_{\varrho_2^2}\right]$$

$$\boxed{\mathbf{V_{Schicht} = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + h^2 + 3\varrho_2^2)}}$$

Zum Schluss wenden wir diese Formeln in zwei Beispielen an.

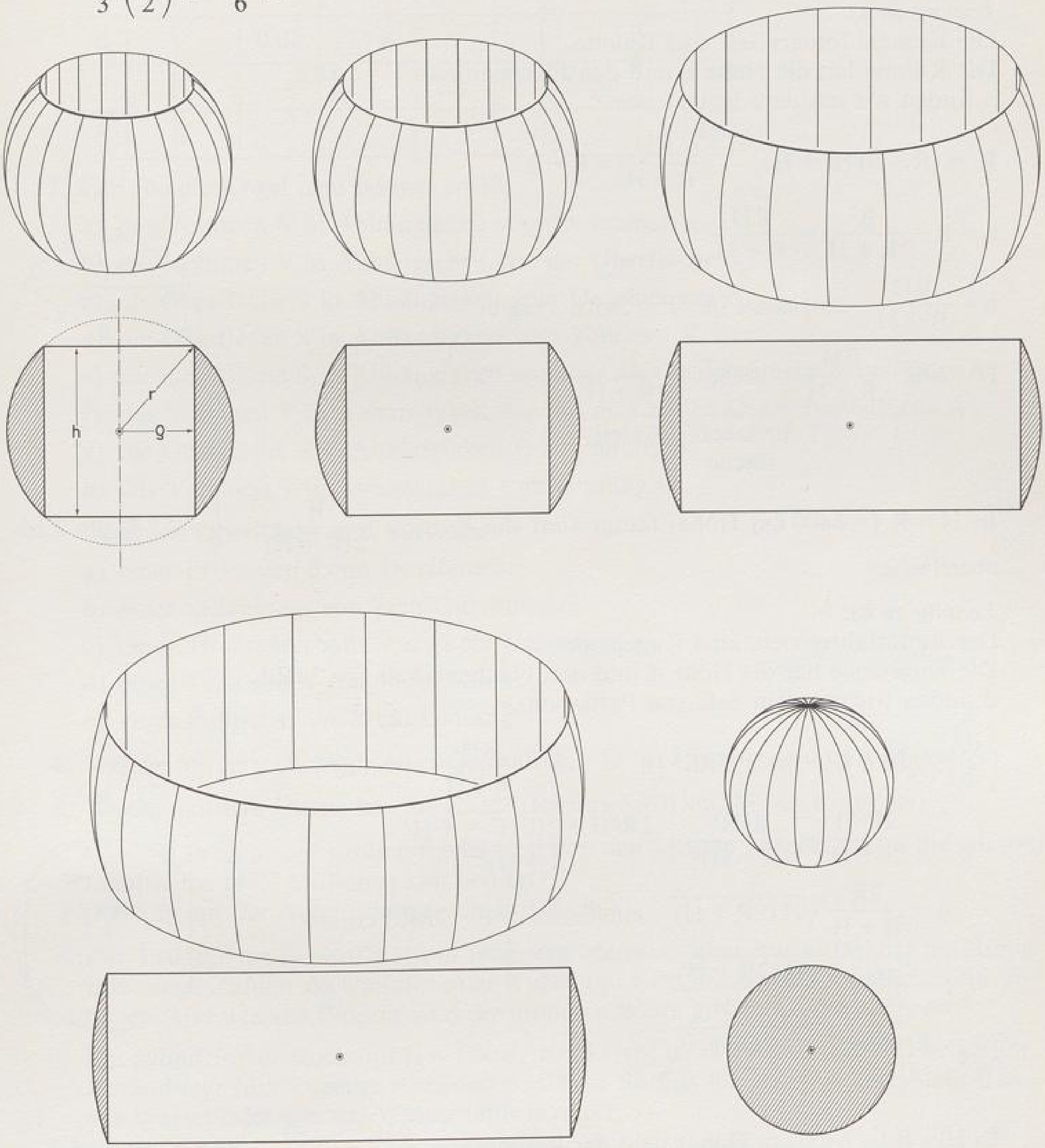
1. Eine kugelige Perle mit Radius r wird zentrisch so durchbohrt, dass der Restkörper die Höhe h hat. Berechne das Volumen des Restkörpers.
Den Restkörper stellen wir uns vor als Kugelschicht, aus der ein Zylinder herausgebohrt worden ist

$$V_{\text{Rest}} = V_{\text{Schicht}} - V_{\text{Zylinder}}$$

$$= \frac{1}{6}\pi h(6\varrho^2 + h^2) - \varrho^2\pi h = \frac{1}{6}\pi h^3$$

Der Kugelradius r kommt im Ergebnis überhaupt nicht vor! Das heißt, bei allen Kugeln haben gleich hohe Restkörper dasselbe Volumen. Im Grenzfall $h = 2r$ ist der »Restkörper« die Kugel selber, sein Volumen ist

$$\frac{4}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3\pi = \frac{1}{6}\pi h^3$$

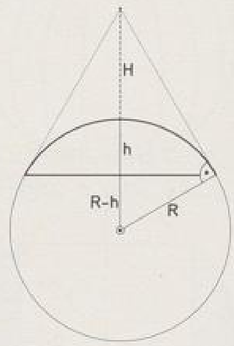


2. In der Höhe H überm Äquator umkreist eine Raumfähre die Erde (Erdradius R = 6400 km).

a) Wie viel Prozent der Erdoberfläche fotografiert eine Kamera?

b) Wie viel Prozent der Erdoberfläche sieht der Raumfahrer während seines Umlaufs?

Lösung zu **a)**:
Die Kamera fotografiert eine Kalotte.
Die Kalotte hat die Höhe h und den Flächeninhalt $F = 2\pi Rh$.
h finden wir mit dem Kathetensatz.



$$R^2 = (R-h)(R+H), \qquad \frac{R^2}{R+H} = R - h$$

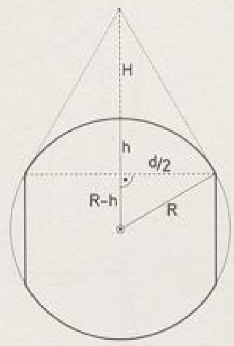
$$h = R - \frac{R^2}{R+H} = \frac{RH}{R+H}$$

$$h = \frac{RH}{R+H} \quad \text{eingesetzt in} \quad F = 2\pi Rh \quad \text{ergibt}$$

$$F = 2\pi R \cdot \frac{RH}{R+H} = \underbrace{4R^2\pi}_{\text{Erdober-fläche}} \cdot \underbrace{\frac{H}{2(R+H)}}_{\text{Anteil}}$$

In H = R (= 6400 km Höhe) fotografiert die Kamera $\frac{R}{2(R+R)} = \frac{1}{4} = 25\,\%$ der Erdoberfläche.

Lösung zu **b)**:
Der Raumfahrer sieht eine Kugelzone.
Die Kugelzone hat die Höhe d und den Flächeninhalt $F = 2\pi Rd$.
d finden wir mit dem Satz von PYTHAGORAS:



$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2, \qquad h = \frac{RH}{R+H} \quad (\text{von } \mathbf{a})$$

$$= \frac{2R^2H}{R+H} - \frac{R^2H^2}{(R+H)^2} = \frac{2R^3H + 2R^2H^2 - R^2H^2}{(R+H)^2}$$

$$d = \frac{2R}{R+H}\sqrt{H(2R+H)} \quad \text{eingesetzt in } F = 2\pi Rd \text{ ergibt}$$

$$F = \underbrace{4R^2\pi}_{\text{Erdober-fläche}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{H(2R+H)}}{R+H}}_{\text{Anteil}}$$

In H = R (= 6400 km Höhe) sieht der Raumfahrer $\frac{\sqrt{3R^2}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 86{,}6\,\%$ der Erdoberfläche.