Anschauliche Geometrie

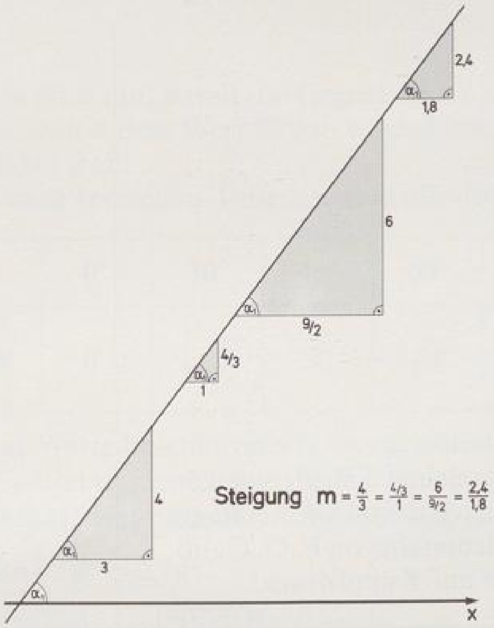
Barth, Friedrich

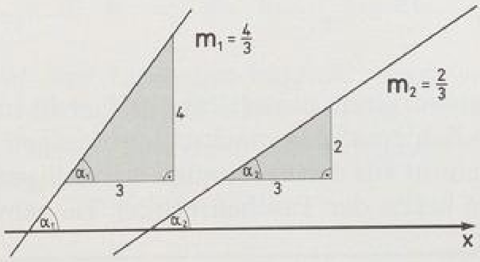
München, 1997

5. 1 Tanges

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

Bei vielen geometrischen Problemen sucht man die Längen von Seiten oder die Größe von Winkeln einer Figur, die durch gegebene Stücke festgelegt ist – zum Beispiel: Wie lang ist a und wie groß ist γ im Dreieck mit $b = 4$, $c = 6$ und $\alpha = 70°$? Solche Aufgaben haben wir bisher durch Konstruktion gelöst. Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt dabei von der Zeichen- und Messgenauigkeit ab. Meistens kann man Strecken höchstens auf 0,5 mm und Winkel höchstens auf 0,5° genau zeichnen und messen. Will man die Genauigkeit steigern, dann hilft nur noch rechnen. Der Strahlensatz und die Flächensätze fürs rechtwinklige Dreieck haben uns manchmal schon die Möglichkeit gegeben, Streckenlängen rechnerisch exakt zu bestimmen.
Die Trigonometrie ist der Zweig der Mathematik, der sich mit der Berechnung von Seiten und Winkeln im allgemeinen Dreieck befasst. Konstruktionen sind dann entbehrlich. Man löst eine Aufgabe algebraisch, das Ergebnis ist ein Rechenausdruck, eine algebraische Formel. Solche Formeln erlauben eine schnelle, sichere und beliebig genaue Berechnung der gesuchten Stücke. Die Trigonometrie ist eine unerlässliche Voraussetzung für viele Berechnungen in der Astronomie, der Landvermessung, der Navigation, im Bauwesen, im Maschinenbau und in der Elektrotechnik.
Das rechtwinklige Dreieck ist die Grundfigur der Trigonometrie. Mit ihm fangen wir an.



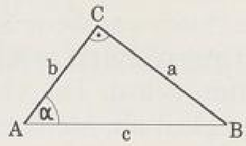


5.1 Tangens

In ähnlichen Dreiecken sind entsprechende Seitenverhältnisse gleich. Beim Steigungsdreieck einer Gerade ($m > 0$) haben wir ein solches Verhältnis schon kennen gelernt: Den Quotienten von senkrechter und waagrechter Kathete haben wir Steigung m genannt. Je größer die Steigung ist, desto größer ist der Winkel α zwischen Gerade und x-Achse. Zu jedem Neigungswinkel α gehört eindeutig eine Steigung m, in der Trigonometrie nennen wir sie den Tangens von α, kurz $m = \tan \alpha$. Dieses Kathetenverhältnis verwenden wir auch in andern rechtwinkligen Dreiecken. Wir bezeichnen die Kathete am Scheitel von α als **Ankathete** (von α) und die gegenüberliegende als **Gegenkathete** (von α) und definieren:

Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ist:

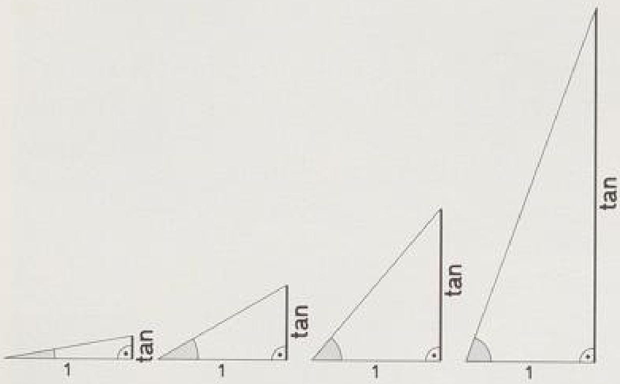
$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$



Merke: Tangens = $\dfrac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Ankathete}}$

Nimmt man ein Dreieck mit der Ankathete 1, dann ist die Länge der Gegenkathete gleich dem Tangens des Winkels; man kann also schon aus der Zeichnung Tangenswerte unmittelbar ablesen, wenn auch nur grob mit Zeichengenauigkeit:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\tan \alpha$	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	gibts nicht



Genauere Werte musste man früher in umfangreichen Tabellenwerken, den »Zahlentafeln«, nachschlagen; einen Eindruck davon vermittelt ein Ausschnitt aus den berühmten vierstelligen Zahlentafeln von F. G. Gauß. Heute liefert der Taschenrechner Tangenswerte auf Knopfdruck.

°	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
0	0, 0000	0029	0058	0087	0116	0145	0175	89	29
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	29
2	0349	0378	0407	0436	0465	0494	0523	87	29
3	0523	0552	0581	0610	0640	0669	0698	86	29
4	0698	0727	0756	0785	0814	0843	0872	85	29
5	0, 0872	0901	0929	0958	0987	1016	1045	84	29
6	1045	1074	1103	1132	1161	1190	1219	83	29
7	1219	1248	1276	1305	1334	1363	1392	82	29
8	1392	1421	1449	1478	1507	1536	1564	81	29
9	1564	1593	1622	1650	1679	1708	1736	80	29

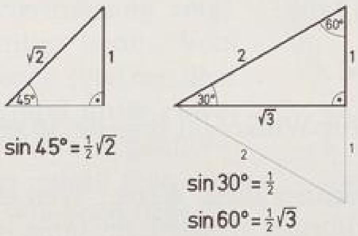
P. P.	30	29
1	3,0	2,9
2	6,0	5,8
3	9,0	8,7
4	12,0	11,6
5	15,0	14,5
6	18,0	17,4
7	21,0	20,3
8	24,0	23,2
9	27,0	26,1

Von einigen besonderen Winkeln finden wir leicht die exakten Tangenswerte:

Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck: $\mathbf{tan\ 45° = \frac{1}{1} = 1}$.

Halbes gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2:
die eine Kathete ist 1,
die andere Kathete ist nach Pythagoras
$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\mathbf{tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}}$ und $\mathbf{tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}}$.



Schrumpft α und damit die Gegenkathete auf null, so ergibt sich als Grenzfall $\mathbf{tan\ 0° = 0}$.
Nähert sich α dem Wert 90°, so wächst tan α über alle Grenzen, das heißt, tan 90° ist keine (endliche) Zahl.
Weil diese speziellen Tangenswerte oft vorkommen, merkt man sie sich:

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
tan α	**0**	$\mathbf{\frac{1}{3}\sqrt{3}}$	**1**	$\mathbf{\sqrt{3}}$	**–**

Andere Werte beschaffen wir uns gewöhnlich mit dem Taschenrechner. Arbeiten wir mit dem Gradmaß, dann muss der Rechner im DEG-Modus sein (DEGree = Grad). Man gibt den Winkelwert ohne das °-Symbol ein, die $\boxed{\text{tan}}$-Taste liefert dann den Tangenswert.

tan 37,8° ≈ 0,78

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{\text{37.8}}$ $\boxed{\text{tan}}$

Anzeige: $\boxed{\text{0.7756795}}$

Umgekehrt finden wir mit dem Taschenrechner auch einen Winkel, dessen Tangens bekannt ist. Zuständig für die Umkehrung ist die $\boxed{\text{INV}}$-Taste (INVers = umgekehrt).

tan φ = 0,24; φ = ?

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{\text{0.24}}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{tan}}$

Anzeige: $\boxed{\text{13.49573328}}$ $\varphi \approx 13{,}5°$

Wir vereinbaren: Näherungswerte für Winkel geben wir auf Zehntelgrad gerundet an.

Arbeiten wir im Bogenmaß, dann muss der Rechner im RAD-Modus sein (RADius = Strahl).

$\tan 0{,}83 \approx 1{,}09$

Tastenfolge: $\boxed{\text{RAD}}$ $\boxed{0.83}$ $\boxed{\tan}$

Anzeige: $\boxed{1.0934329}$

umgekehrt:

$\tan \varphi = 2{,}71;\ \varphi = ?$

Tastenfolge: $\boxed{\text{RAD}}$ $\boxed{2.71}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\tan}$

Anzeige: $\boxed{1.217293}$ $\qquad \varphi = 1{,}22$

Wir vereinbaren: Näherungswerte für Winkel im Bogenmaß geben wir auf Hundertstel gerundet an.
Wie findet eigentlich der Taschenrechner diese Werte? Weil er nur die vier Grundrechenarten beherrscht, muss er mit einer Formel arbeiten, die tan x durch ein Polynom annähert, zum Beispiel

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

Hier muss x im Bogenmaß sein. Gibt man einen Wert im Gradmaß ein, dann wandelt ihn der Rechner vorher erst ins Bogenmaß um. Wir berechnen einen Näherungswert für tan 0,5 und vergleichen ihn mit dem Knopfdruck-Wert des Rechners:

$\tan 0{,}5 \approx 0{,}5462977$ (Polynom vom Grad 9)
$\tan 0{,}5 = 0{,}5463024\ldots$ (Knopfdruck-Wert)

Die Umkehrung des Tangens $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\tan}$ heißt in der Mathematik arc tan (Arkus Tangens). Der Rechner bewältigt sie mit der Formel

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \ldots$$

Auch hier ist arc tan x ein Bogenmaß-Wert. Wir berechnen einen Näherungswert für arc tan 0,456 und vergleichen ihn mit dem Knopfdruck-Wert des Rechners:

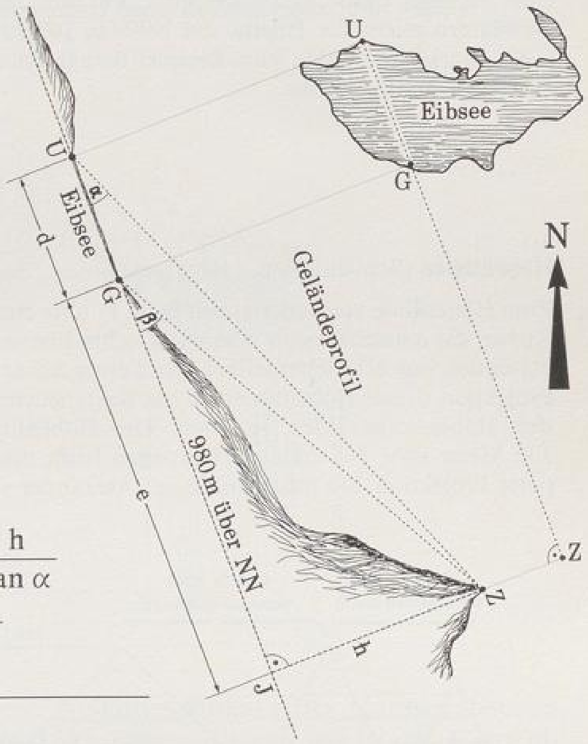
$\arctan 0{,}456 \approx 0{,}427846$ (Polynom vom Grad 9)
$\arctan 0{,}456 = 0{,}427832\ldots$ (Knopfdruck-Wert)

Die letzte Formel klappt nur für x-Werte zwischen -1 und $+1$ und zwar um so besser, je näher der x-Wert bei null liegt.

Die Steilheit von Strecken gibt man mit der Steigung an, also dem Tangens des Neigungswinkels, in Prozent oder Promille. Die berühmt-berüchtigte Zirlerbergstraße hatte vor dem Umbau eine maximale Steigung von 24 %, als größten Neigungswinkel also 13,5°. Wegen der vielen Unfälle hat man sie entschärft und auf eine Höchststeigung von 17 % (9,6°) abgeflacht. Im Folgenden sehen wir eine Übersicht über die üblichen Höchstwerte von Steigungen:

Passstraße:	30 %
Nebenstraße:	20 %
Autobahn:	3 % (wegen langer Bremswege von Lastzügen bei Abwärtsfahrt)
Eisenbahn:	3 % für Personenverkehr, 1 % für Personen- und Güterverkehr
U-Bahn:	10 % (wegen Allradantrieb und wetterunabhängiger Schienenoberfläche)
Zahnradbahn:	25 %, Idealwert (Zugspitzbahn, Jungfrau-Bahn)
	48 % Höchstwert auf der Pilatus-Bahn (Schweiz)
Kabelbahn:	20 % (San Francisco)
Standseilbahn:	90 % (Großglockner-Gletscher-Bahn)
Drahtseilbahn:	100 % und mehr

Ein Beispiel aus der Landvermessung zeigt, was der Tangens noch alles kann. Vom Punkt U am Ufer des Eibsees (980 m) über NN) sieht man einen Berggipfel unter einem Neigungswinkel $\alpha = 22{,}23°$. Vom gegenüberliegenden Uferpunkt G aus misst man den Neigungswinkel $\beta = 28{,}18°$. Wie hoch liegt der Gipfel über NN, wenn die Messpunkte eine Standlinie von $\overline{UG} = 1150$ m Länge festlegen? (NN ist die Abkürzung für Normalnull, das ist der Meeresspiegel.)



Lösung: $\tan\alpha = \dfrac{h}{e+d}$ also I $e + d = \dfrac{h}{\tan\alpha}$

$\tan\beta = \dfrac{h}{e}$ also II $e = \dfrac{h}{\tan\beta}$

$$\text{I–II}\quad d = \frac{h}{\tan\alpha} - \frac{h}{\tan\beta}$$

$$h = \frac{d}{\dfrac{1}{\tan\alpha} - \dfrac{1}{\tan\beta}} = d\,\frac{\tan\alpha\,\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

Messwerte einsetzen:

$$h = 1150\,\text{m} \cdot \frac{\tan 22{,}23°\,\tan 28{,}18°}{\tan 28{,}18° - \tan 22{,}23°} = 1982\,\text{m}$$

Der Berggipfel liegt 1982 m + 980 m = 2962 m über Normalnull.

Für Wanderer und Reisende sind Landkarten das wichtigste Hilfsmittel, um sich in unbekannter Umgebung zurechtzufinden. So gibt es je nach Verwendungszweck Wanderkarten, Autokarten, Seekarten usw. Karten zeigen Landschaften im Grundriss. Alle Merkmale, die eine Landschaft prägen: Berge, Flüsse, Seen, Straßen und Ortschaften sollen gut erkennbar sein. Gewässer und Verkehrsnetze machen keine Schwierigkeiten: Weder dem Benutzer beim Studium der Karte noch dem Kartografen beim Entwerfen der

Karte, denn Flüsse, Küsten, Ufer, Straßen und Bahnlinien verlaufen im Wesentlichen zweidimensional, und zweidimensional ist ja der Grundriss, ist die Karte. Was der Grundriss aber nicht wiedergibt, das sind die Geländeformen: hoch oder tief, steil oder flach, Berg und Tal, also die Höhenunterschiede in der dritten Dimension. Die dritte Dimension auf dem ebenen Kartenblatt festzuhalten, dem Betrachter einen möglichst räumlichen, wirklichkeitsnahen Eindruck von Berg und Tal zu vermitteln, das war seit eh und je die größte Herausforderung an die Kartenzeichner. Erst im letzten Jahrhundert hat man diese Schwierigkeiten gemeistert. Heute verwenden die beiden wichtigsten Techniken Farben oder Höhenlinien zur Darstellung von Geländeformen.

Farben

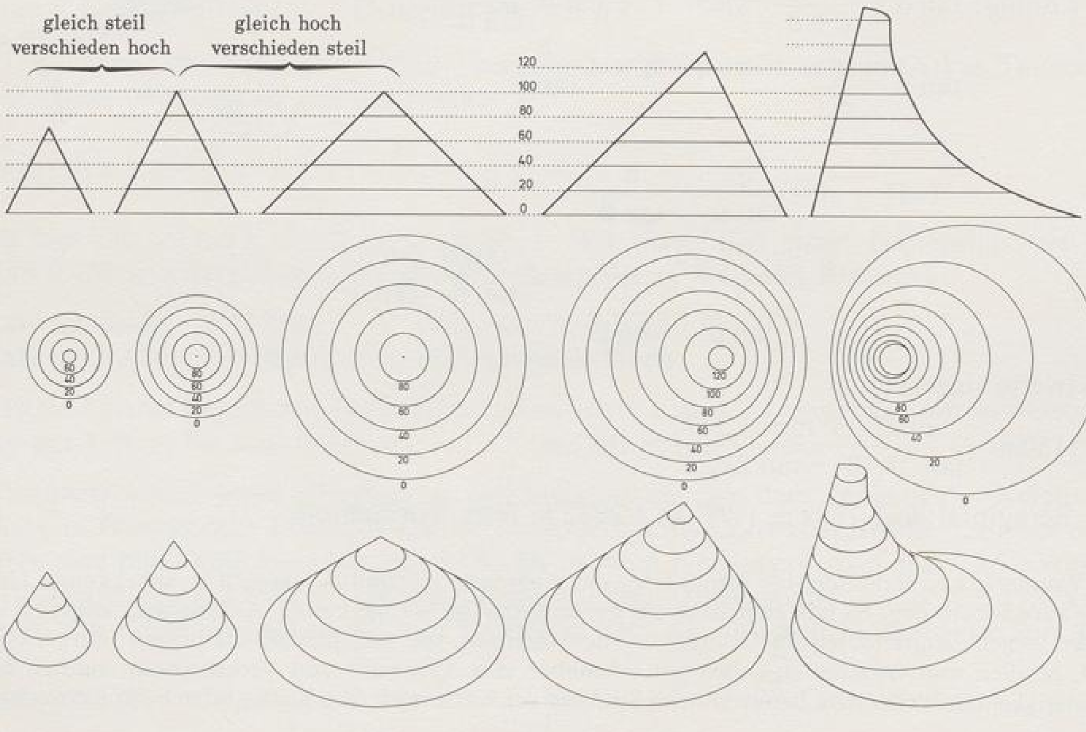
Das Gelände ist in Höhenschichten gegliedert. Jede Schicht ist mit einer eigenen Farbe gekennzeichnet. Für die Tiefenschichten in Gewässern reicht die Palette von hellblau (seicht) bis blauviolett (tief). Markante Punkte, zum Beispiel Berggipfel, sind mit Höhenzahlen (Koten) versehen.

Schicht (Meter)	Farbe
0– 100	Blaugrün
100– 200	Gelbgrün
200– 500	Gelb
500–1000	Hellbraun
1000–2000	Braun
2000–4000	Rotbraun
4000–...	Braunrot

(Zwischenstufen sind möglich)

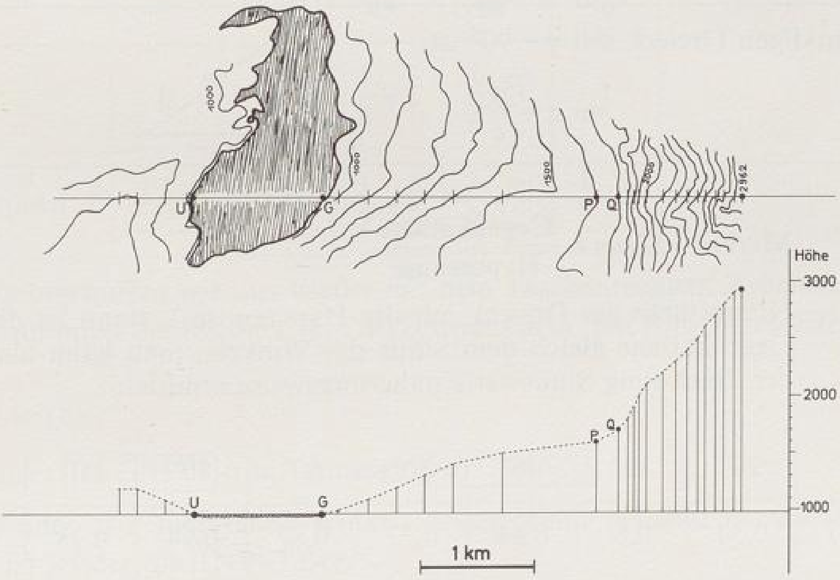
Höhenlinien (Schichtlinien, Isohypsen)

Eine Höhenlinie verbindet gleich hohe Punkte einer Geländefläche. Man kann sie sich auch vorstellen als Kurve, die entsteht, wenn eine waagrechte Ebene die Geländefläche schneidet. Die Höhenlinien sind die Schnittkurven der Geländefläche und einer Schar gleichabständiger, waagrechter Ebenen. Die senkrechte Projektion dieser Höhenlinien in die Kartenebene ergibt das Höhenlinienbild. Die Höhenlinien sind mit den Höhenlinienzahlen versehen. Die Höhenlinienzahl 200 beziehungsweise die Kote 200 bedeutet 200 Meter über Normalnull. Deswegen heißt die Höhenlinien-Darstellung in der Mathematik auch kotierte Projektion. Sie geht zurück auf Alexander von Humboldt, 1804.



Aus der Dichte der Höhenlinien schließt der Kartenleser zurück auf die Gestalt der Geländefläche: je enger, desto steiler – je weiter, desto flacher. Das Höhenlinienbild erlaubt es, ein Geländeprofil zu zeichnen (das ist der Verlauf des Geländes in einer senkrechten **Ebene,** siehe Bild mit Eibsee und Zugspitze S. 101). Das Geländeprofil gibt die verschiedenen Neigungswinkel in wahrer Größe wieder, es zeigt auch, ob es überhaupt möglich ist, vom Punkt G den Berggipfel optisch anzupeilen, ob also kein andrer Gipfel die Sicht behindert.

Ein Geländeprofil konstruiert man so:
Durch die waagrechte Grundlinie UG geht eine zur Karte senkrechte Ebene S. S schneidet die Geländefläche in der Kurve p, diese Schnittkurve p heißt Geländeprofil. Man schneidet UG mit den Höhenlinien; über den Schnittpunkten trägt man senkrecht zu UG die Höhenunterschiede an. Die Linie, die die Endpunkte verbindet, beschreibt näherungsweise den Verlauf des Geländes in dieser Schnittfläche, also das Geländeprofil und zwar um so besser, je kleiner der Unterschied benachbarter Höhenlinien ist.



Mit dem Tangens können wir leicht den mittleren Neigungswinkel eines Hangs zwischen zwei Orten P und Q bestimmen. Die waagrechte Ankathete w messen wir in der Karte ab (Maßstab beachten!), zum Beispiel w = 190 m. Die senkrechte Kathete s ist der Höhenunterschied, ihn zählt man an den Höhenlinien ab, zum Beispiel s = 100 m. Der mittlere Neigungswinkel ist dann $\arctan \frac{s}{w}$ oder im Beispiel $\arctan \frac{100}{190} \approx 27{,}8°$.