Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

5. 3 Kosinus

Beispiel:

$$\sin x = x - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}x^9 - \ldots \qquad \text{(x beliebig)}$$

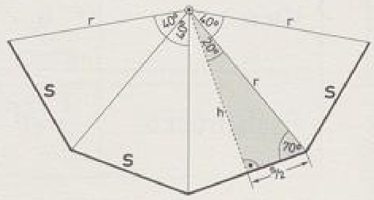
$$\operatorname{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}x^7 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9}x^9 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Mit dem Sinus lassen sich Umfang und Fläche eines regelmäßigen Vielecks berechnen. Gegeben ist ein regelmäßiges Neuneck, das einem Kreis mit Radius r einbeschrieben ist. Gesucht sind Umfang u und Flächeninhalt F in Abhängigkeit von r sowie die Verhältnisse Vieleckumfang : Kreisumfang und Vieleckfläche : Kreisfläche.

Lösung: Weil das halbe Bestimmungsdreieck rechtwinklig ist, gilt $\sin 20° = \frac{s/2}{r}$, also

$s = 2r \sin 20°$

der Umfang u ist dann $\mathbf{u} = 9s = \mathbf{18r \sin 20°}$.



Aus $\sin 70° = \frac{h}{r}$ folgt $h = r \sin 70°$,

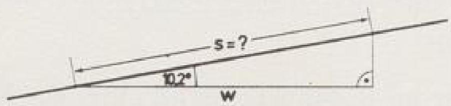
der Inhalt F ist dann

$$\mathbf{F} = 9\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot h = 9\cdot\frac{1}{2}\cdot 2r\sin 20°\cdot r\cdot\sin 70° = \mathbf{9r^2 \sin 20° \sin 70°}.$$

$$\textbf{Umfangsverhältnis} = \frac{18r\sin 20°}{2r\pi} = \frac{9\sin 20°}{\pi} \approx \mathbf{98\,\%}$$

$$\textbf{Flächenverhältnis} = \frac{9r^2\sin 20°\sin 70°}{r^2\pi} = \frac{9\sin 20°\sin 70°}{\pi} \approx \mathbf{92{,}1\,\%}$$

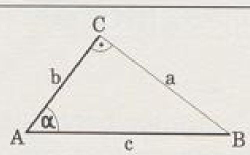
5.3 Kosinus

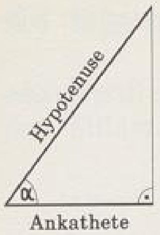


Eine Bergstraße hat laut Autokarte eine Steigung von 18 %, das heißt einen Neigungswinkel von 10,2°. Der Karte entnimmt man eine waagrechte Länge w von 4,8 km. Will man die wirkliche Streckenlänge s wissen, dann wäre es günstig, wenn man einen Zusammenhang zwischen Winkel, Ankathete und Hypotenuse hätte. Wir definieren ihn:

Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ist:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}$$

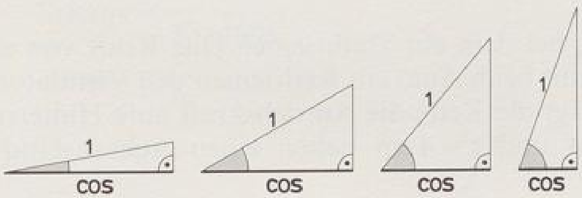


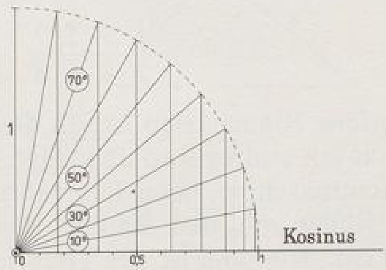


Merke: $\textbf{Kosinus} = \dfrac{\textbf{Ankathete}}{\textbf{Hypotenuse}}$

Nimmt man ein Dreieck mit der Hypotenuse 1, dann ist die Länge der Ankathete gleich dem Kosinus des Winkels; man kann also schon aus der Zeichnung Kosinuswerte näherungsweise ermitteln:

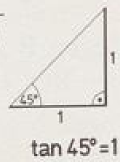
α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\cos\alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,5	0,34	0,17	0



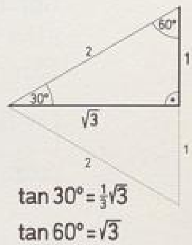


Weil die Ankathete immer kleiner ist als 1, ist der Kosinus nicht größer als 1. Wenn α immer kleiner wird, dann nähert sich die Ankathete der Hypotenuse und ist im Grenzfall $\alpha = 0°$ so lang wie sie. Deshalb legt man fest, $\cos 0° = 1$. Nähert sich α dem Wert 90°, dann schrumpft die Ankathete auf 0 und als Grenzfall ergibt sich $\cos 90° = 0$.
Von den drei Winkeln 30°, 45° und 60° finden wir leicht die exakten Kosinuswerte:

Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck: $\mathbf{\cos 45°} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{2}}$



Halbes gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2:
die eine Kathete ist 1,
die andere Kathete ist nach Pythagoras $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$



$$\mathbf{\cos 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{3}} \quad \text{und} \quad \mathbf{\cos 60°} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

Weil diese speziellen Kosinuswerte oft vorkommen, merkt man sie sich:

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
$\mathbf{\cos\alpha}$	**1**	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
Eselsbrücke	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Andre Werte beschaffen wir uns wieder mit dem Taschenrechner. Das funktioniert so wie beim Sinus, bloß drückt man statt der $\boxed{\text{sin}}$-Taste jetzt die $\boxed{\text{cos}}$-Taste.
Taschenrechner und Computer berechnen den Kosinus und seine Umkehrung, den Arkus Kosinus, mit Näherungspolynomen; x bzw. arc cos x ist der Winkel im Bogenmaß.

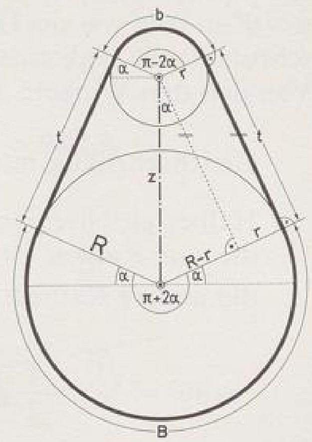
Beispiel:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^8 - \dots \qquad (x \text{ beliebig})$$

$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}x^7 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9}x^9 - \dots \qquad (|x|<1)$$

Der offene Riementrieb ist ein Getriebe, bei dem ein Treibriemen eine Kraft von einem Rad auf ein andres Rad überträgt. So treibt beim Auto ein Keilriemen den Ventilator und die Lichtmaschine, beim Fahrrad überträgt die Kette die Antriebskraft aufs Hinterrad.
Zwei Räder mit den Radien R = 11 cm und r = 4 cm haben einen Achsabstand von z = 17 cm. Wie lang ist der Treibriemen?

Lösung: Die Riemenlänge l setzt sich zusammen aus einem großen Bogen B, einem kleinen Bogen b und zwei Tangentenstücken t: l = B + b + 2t.



Der Winkel α ergibt sich aus $\sin\alpha = \frac{R-r}{z}$.

Für ein Tangentenstück t gilt $\frac{t}{z} = \cos\alpha$, also $t = z\cos\alpha$.

Der Bogen B gehört zum Mittelpunktswinkel $\pi + 2\alpha$,
also $B = R(\pi + 2\alpha)$,

der Bogen b gehört zum Mittelpunktswinkel $\pi - 2\alpha$,
also $b = r(\pi - 2\alpha)$.
Der Riemen hat die Länge

$$l = B + b + 2t = \mathbf{R(\pi + 2\alpha) + r(\pi - 2\alpha) + 2z\cos\alpha},$$

setzen wir die gegebenen Werte ein, so ergibt sich

$$\sin\alpha = \frac{11-4}{17} = \frac{7}{17}, \quad \text{also} \quad \alpha = 0{,}4243\dots \quad \text{(Bogenmaß!)}$$

$l = 43{,}89\dots + 9{,}17\dots + 30{,}98\dots = \mathbf{84{,}04}\dots$
Der Riemen ist etwa 84 cm lang.

Weil Hypotenuse und ein anliegender Winkel die Katheten festlegen, bietet sich die Merkregel an:

Gegenkathete = Hypotenuse mal Sinus
Ankathete = Hypotenuse mal Kosinus