Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

5. 4 Das trigonometrische Sextett

5.4 Das trigonometrische Sextett

Mit den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks lassen sich sechs Seitenverhältnisse bilden. Drei kennen wir schon, nämlich:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

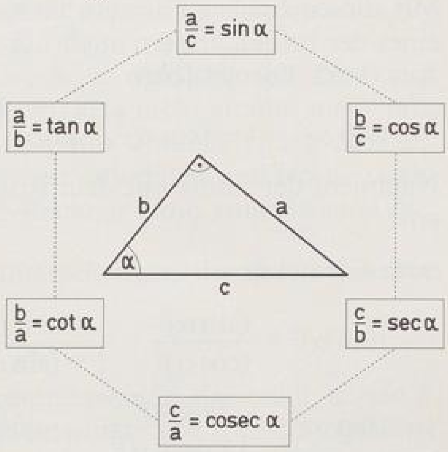
Die drei Neulinge sind davon die Kehrwerte:

$$\text{Kotangens} = \frac{1}{\text{Tangens}} \qquad \text{Kosekans} = \frac{1}{\text{Sinus}}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{Sekans} = \frac{1}{\text{Kosinus}}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}$$



Weil sich Kotangens, Kosekans und Sekans so einfach mit Tangens, Sinus und Kosinus ausdrücken lassen, verwendet man sie kaum. Auch wir werden künftig nur mit den drei wichtigen Verhältnissen Tangens, Sinus und Kosinus arbeiten; auch sie sind eng miteinander verwandt.

Zusammenhang zwischen Tangens, Sinus und Kosinus

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad 0° \leqq \alpha < 90°}$$

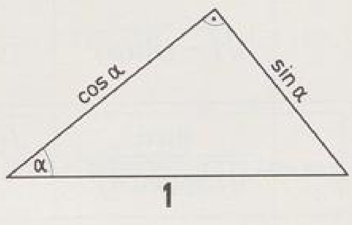
Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1}$$

Trigonometrischer Pythagoras



Die Schreibung $(\sin\alpha)^2$ bedeutet $(\sin\alpha)\cdot(\sin\alpha)$. Aus Bequemlichkeit verwendet man jedoch leider oft eine ›schnellere‹, aber leicht missverständliche Abkürzung und schreibt $(\sin\alpha)\cdot(\sin\alpha) = \sin^2\alpha$. Hält man sich aber an die Regeln, dann ist $\sin^2\alpha = \sin(\sin\alpha)$. Entsprechend ist $\sin^{-1}\alpha = \arcsin\alpha$; $\sin^{-1}$ ist also die Umkehrung von sin, aber nicht der

Kehrwert $\frac{1}{\sin}$! Der Taschenrechner liefert $\sin^{-1}\alpha$ entweder über eine eigene Taste $\boxed{\sin^{-1}}$ oder mit der Tastenfolge $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\sin}$. Für $(\sin\alpha)^{-1} = \frac{1}{\sin\alpha}$ verlangt der Taschenrechner die Tastenfolge $\boxed{\sin}$ $\boxed{1/x}$.

Mit diesen beiden Formeln lässt sich jedes der drei Verhältnisse tan, sin und cos durch eines der beiden andern ausdrücken, zum Beispiel der Sinus durch Kosinus oder Tangens. Aus der 2. Formel folgt

$$(\sin\alpha)^2 = 1 - (\cos\alpha)^2, \quad \text{also} \quad \mathbf{\sin\alpha = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2}} \qquad (\sin\alpha \geqq 0)$$

Nachdem der Sinus mit dem Kosinus beschrieben ist, drücken wir ihn mit dem Tangens aus:

erste Formel quadrieren:

$$(\tan\alpha)^2 = \frac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \frac{(\sin\alpha)^2}{1-(\sin\alpha)^2} \qquad (\alpha < 90^\circ)$$

$$(\tan\alpha)^2 = \frac{(\sin\alpha)^2}{1-(\sin\alpha)^2} \qquad \text{nach } \sin\alpha \text{ auflösen}$$

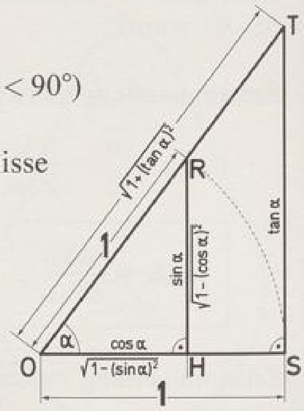
$$(\tan\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2(\tan\alpha)^2 = (\sin\alpha)^2$$

$$(\tan\alpha)^2 = (\sin\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2(\tan\alpha)^2$$

$$(\tan\alpha)^2 = (\sin\alpha)^2[1 + (\tan\alpha)^2]$$

$$\frac{(\tan\alpha)^2}{1+(\tan\alpha)^2} = (\sin\alpha)^2, \quad \text{also} \quad \mathbf{\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}} \qquad (0^\circ \leqq \alpha < 90^\circ)$$

Die Tabelle gibt einen Überblick über alle Verwandtschaftsverhältnisse von sin, cos und tan.



$$\Delta\text{OHR} \sim \Delta\text{OST}$$

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}$$

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}} \\ \dfrac{\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}}{\cos\alpha}\end{array}\right\} = \frac{\tan\alpha}{1}$$

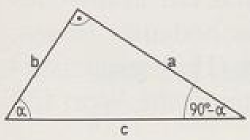
$0^\circ \leqq \alpha < 90^\circ$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\sin\alpha$	☆	$\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}$	☆	$\frac{1}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}}$	$\frac{\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}}{\cos\alpha}$	☆

Diese sechs Beziehungen findet man auch mit einem Blick auf eine passende Figur. Die drei Wurzeln liefert uns Pythagoras, den Rest die Ähnlichkeit.
Mit diesen Formeln kann man zum Beispiel $\tan\alpha$ und $\sin\alpha$ exakt aus $\cos\alpha$ berechnen, ohne sich um den Winkel α zu kümmern:

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}; \quad \text{es gilt} \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad \text{und} \quad \tan\alpha = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}.$$

Es gibt einige Winkel, deren sin-, cos- und tan-Werte rational sind, zum Beispiel $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\tan 45° = 1$. Manchmal sind die Werte zwar irrational, aber wenigstens mit Wurzeln darstellbar, zum Beispiel $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan 15° = 2-\sqrt{3}$. Wählt man aber einen Winkel auf gut Glück, so wird sein sin-, cos- und tan-Wert im Normalfall eine transzendente Zahl sein (wie π), also nicht einmal mehr mit Wurzeln darstellbar sein. Der Taschenrechner arbeitet mit nur endlich vielen Stellen, kennt also keine irrationalen Zahlen, kann also nicht zwischen rationalen und irrationalen (oder sogar transzendenten) Werten unterscheiden. Unser Rechner kann zum Beispiel die transzendente Zahl $\sin 25° = \boxed{0{,}422618261}$ nicht mehr unterscheiden von der rationalen Zahl $\frac{9604}{22725} = \boxed{0{,}422618261}$.

Ist γ im Dreieck ein rechter Winkel, dann sind α und β komplementär, das heißt, α und β ergänzen sich zu 90°, also $\alpha + \beta = 90°$. α ist der Komplementwinkel von β und umgekehrt ist β der Komplementwinkel von α. Für Komplementwinkel gelten die **Komplementformeln**:



$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{b}{c} \\ \sin(90°-\alpha) &= \frac{b}{c} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \boxed{\mathbf{\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha}}$$

$$\cos 37° = \sin(90°-37°) = \sin 53°$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos(90°-\alpha) &= \frac{a}{c} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \boxed{\mathbf{\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha}}$$

$$\sin 22° = \cos(90°-22°) = \sin 68°$$

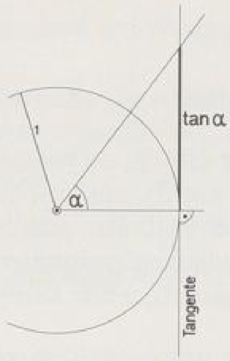
$$\left.\begin{aligned} \cot\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a} \\ \tan(90°-\alpha) &= \frac{1}{\cot(90°-\alpha)} = \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \boxed{\mathbf{\tan(90°-\alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha}}$$

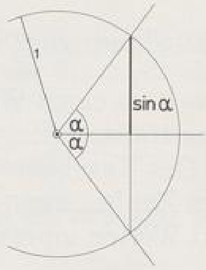
$$\frac{1}{\tan 73°} = \tan(90°-73°) = \tan 17°$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{a}{b} \\ \cot(90°-\alpha) &= \frac{1}{\tan(90°-\alpha)} = \frac{a}{b} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \boxed{\mathbf{\cot(90°-\alpha) = \frac{1}{\cot\alpha} = \tan\alpha}}$$

Die Komplementformeln erklären auch die Vorsilbe »Ko« bei Kosinus, Kotangens und Kosekans, denn: Der Ko-Sinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des Ko-Winkels. Entsprechendes gilt bei Tangens und Sekans.

Die Bezeichnungen Tangens und Sinus stammen aus dem Lateinischen.
Am Einfachsten ist die Erklärung von Tangens. Die Schenkel des Winkels α schneiden aus der Tangente am Einheitskreis eine Strecke der Länge $\tan\alpha$ aus.





Der Sinus ist auf abenteuerliche Weise zu seinem Namen gekommen. Der indische Astronom und Mathematiker ARYABHATA bezeichnete die halbe Sehne des doppelten Winkels im Einheitskreis – also den Sinus des Winkels – mit *ardhajiva* oder auch kurz *jiva* (gesprochen dschiva). Die Araber, die einen Großteil ihrer Mathematik von den Indern gelernt haben, übernahmen das Sanskritwort *jiva* als Fremdwort ins Arabische. Weil die arabischen Buchstaben nur Konsonanten sind, besteht dieses Wort nur aus den beiden Buchstaben dsch und b: *dschb* (gesprochen dschiba). Doch es gibt auch ein arabisches Wort, das man genauso schreibt, aber anders spricht: dschaib und das bedeutet Busen. Bei der Übersetzung vom Arabischen ins Lateinische hielt man *dschiba* (Halbsehnenverhältnis) für *dschaib* (Busen) und übersetzte es mit *sinus*. *sinus* ist das lateinische Wort für Busen.

Aufgaben zu 5.1

1. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Gradmaß!)

	15°	1°	1′	89,9°					
$\tan\alpha$					$\sqrt{2}-1$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

2. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Bogenmaß!)

x	1	0,1	0,0123	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$			
tan x							1,55741	2	1990

3. Berechne Näherungswerte für tan x mit dem Näherungspolynom von Seite 100 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\tan}$-Wert des Taschenrechners.

a) $x = 0{,}1$ **b)** $x = 1{,}1$ **c)** $x = 0{,}785$ **d)** $x = 30°$

4. Berechne Näherungswerte für x mit dem Näherungspolynom von Seite 100 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\tan}$-Wert des Taschenrechners.

a) $\tan x = 0{,}546$ **b)** $\tan x = 0{,}1$
c) $\tan x = 3$ **d)** $\tan x = \pi$