Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

6. 1 Trigonometrie am Einheitskreis

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

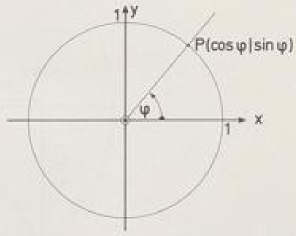
6.1 Trigonometrie am Einheitskreis

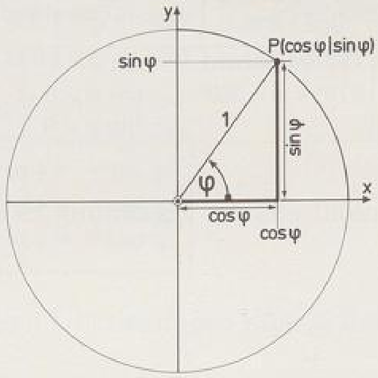
Trigonometrie treibt man nicht nur mit spitzen Winkeln. Weil man auch negative Winkelmaße und Winkel über 360° zulässt, arbeitet man mit dem Drehwinkel. Drehwinkel veranschaulicht man am Besten am Einheitskreis. Zur Erinnerung: Winkel zählen wir negativ bei Rechtsdrehung (Uhrzeigersinn!) und positiv bei Linksdrehung (Gegenuhrzeigersinn!). Wir werden sin, cos und tan neu definieren, freilich aber so, dass sich für spitze Winkel dasselbe ergibt wie bisher. Dazu brauchen wir den Einheitskreis um den Ursprung eines Koordinatensystems. Den Drehwinkel messen wir von der positiven x-Achse aus. Schneidet der zweite Schenkel von Winkel φ den Einheitskreis in Punkt P, dann definieren wir:

Definition

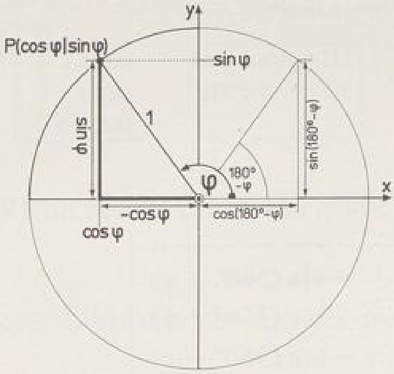
$$\left.\begin{array}{l}\textbf{cos}\,\varphi \text{ ist der x-Wert von P}\\ \textbf{sin}\,\varphi \text{ ist der y-Wert von P}\end{array}\right\}\quad P(\cos\varphi\,|\,\sin\varphi)$$

tan φ ist der Quotient von y- und x-Wert, also $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.





I. Quadrant	$\sin\varphi > 0$
$0° < \varphi < 90°$	$\cos\varphi > 0$
	$\tan\varphi > 0$



II. Quadrant	$\sin\varphi > 0$
$90° < \varphi < 180°$	$\cos\varphi < 0$
	$\tan\varphi < 0$

Wir unterscheiden die Fälle:

$0° < \varphi < 90°$, das heißt, P liegt im I. Quadranten; die neue Definition liefert dasselbe wie die alte.

$90° < \varphi < 180°$, das heißt, P liegt im II. Quadranten; aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\varphi &= \sin(180° - \varphi)\\ \cos\varphi &= -\cos(180° - \varphi)\\ \tan\varphi &= -\tan(180° - \varphi)\end{aligned}}$$

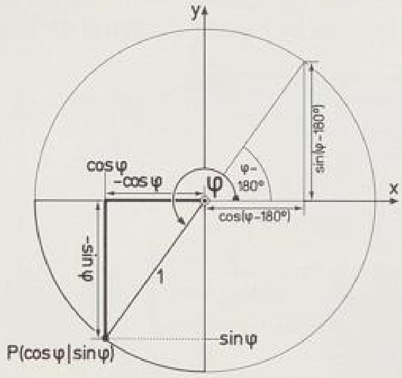
zum Beispiel $\sin 150° = \sin(180° - 150°) = \sin 30° = 0{,}5$

Beachte: Streckenlängen (Maßpfeile!) sind positiv (zum Beispiel $-\cos\varphi > 0$), Koordinaten dagegen können auch negativ sein (zum Beispiel $\cos\varphi < 0$).

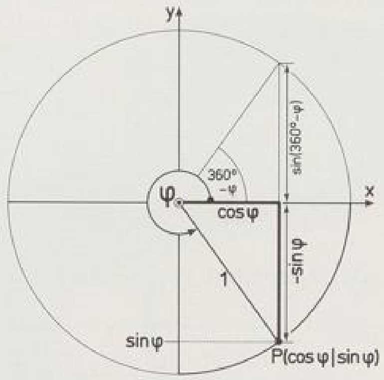
$180° < \varphi < 270°$, das heißt, P liegt im III. Quadranten; aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\varphi &= -\sin(\varphi - 180°) \\ \cos\varphi &= -\cos(\varphi - 180°) \\ \tan\varphi &= \tan(\varphi - 180°) \end{aligned}}$$

zum Beispiel $\cos 240° = -\cos(240° - 180°) = -\cos 60° = -0{,}5$



III. Quadrant	$\sin\varphi < 0$
$180° < \varphi < 270°$	$\cos\varphi < 0$
	$\tan\varphi > 0$



IV. Quadrant	$\sin\varphi < 0$
$270° < \varphi < 360°$	$\cos\varphi > 0$
	$\tan\varphi < 0$

$270° < \varphi < 360°$, das heißt, P liegt im IV. Quadranten; aus der Zeichnung lesen wir ab:

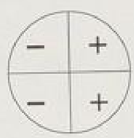
$$\boxed{\begin{aligned} \sin\varphi &= -\sin(360° - \varphi) \\ \cos\varphi &= \cos(360° - \varphi) \\ \tan\varphi &= -\tan(360° - \varphi) \end{aligned}}$$

zum Beispiel $\tan 315° = -\tan(360° - 315°) = -\tan 45° = -1$

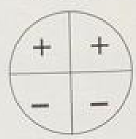
$\varphi \in \{0°, 90°, 180°, 270°, 360°\}$, das heißt, P liegt auf den Koordinatenachsen; an den vier Zeichnungen überlegen wir uns:

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	0	−1	0	1
$\tan\alpha$	0	nicht def.	0	nicht def.	0

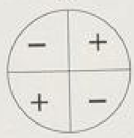
Kosinus



Sinus



Tangens



Die drei Kreise zeigen die Vorzeichen der Quadranten.

Die Fülle der Formeln ist halb so wild! Im Ernstfall geht man so vor:

- **Der Quadrant liefert das Vorzeichen.**
- **Als neuen (spitzen) Winkel $\hat{\varphi}$ nehmen wir den Unterschied zwischen φ und 180° bzw. zwischen φ und 360°.**

Beispiel: $\cos 243° = ?$ III. Quadrant, also Vorzeichen »$-$«
243° liegt näher bei 180° als bei 360°, also ist $\hat{\varphi} = 63°$ der Unterschied zwischen 243° und 180°

$\cos 243° = -\cos 63°$

Weil zusätzliche Volldrehungen – linksrum oder rechtsrum – zum selben Bild führen, gilt:
$\sin 1470° = \sin(1470° - 4 \cdot 360°) = \sin 30° = 0{,}5$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin(\varphi - z\cdot 360°) \\ \cos\varphi &= -\cos(\varphi - z\cdot 360°) \\ \tan\varphi &= -\tan(\varphi - z\cdot 360°) \qquad z \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

Jetzt werden wir auch mit negativen Winkeln fertig:

$$\cos(-30°) = \cos(-30° + 360°) = \cos 330° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Wir kombinieren diese Formeln:

$$\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= \sin(-\varphi + 360°) = \sin(360° - \varphi) = -\sin\varphi \\ \cos(-\varphi) &= \cos(-\varphi + 360°) = \cos(360° - \varphi) = \cos\varphi \\ \tan(-\varphi) &= \tan(-\varphi + 360°) = \tan(360° - \varphi) = -\tan\varphi \end{aligned}$$

zusammengefasst

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= -\sin\varphi \\ \cos(-\varphi) &= \cos\varphi \\ \tan(-\varphi) &= -\tan\varphi \end{aligned}}$$

Die bisherigen Überlegungen zeigen, dass verschiedene Winkel denselben Sinuswert haben können:

$$\sin 60° = \sin 120° = \sin 420° = \sin 480° = \sin(-240°) = \sin(-300°) = \sin(-600°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Also hat die Gleichung $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ unendlich viele Lösungen:

$\ldots, -600°, -300°, -240°, 60°, 120°, 420°, 480°, \ldots$

Übersichtlich geordnet sind das die beiden Serien

$60° + z\cdot 360°$ und $120° + z\cdot 360°$, wobei $z \in \mathbb{Z}$

Es genügt also, die Lösungen im Intervall $[0°; 360°[$ zu suchen, denn hier liegen die entscheidenden Winkel. Die restlichen Winkel ergeben sich durch Addition ganzer Vielfacher von 36°. Der Summand $z \cdot 360°$ bringt nichts wesentlich Neues.

Die Gleichung $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ lösen wir so:

$\cos\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$\hat{\alpha} = 45°$ ist der zugehörige spitze Winkel

Welche beiden Quadranten nun in Frage kommen, hängt vom Vorzeichen ab; weil der gegebene Kosinus negativ ist, sind es der II. und III. Quadrant.

II. Quadrant: $\alpha_1 = 180° - \hat{\alpha} = 135°$
III. Quadrant: $\alpha_2 = 180° + \hat{\alpha} = 225°$

Die vollständige Lösung lautet:

$$\alpha_{1Z} = 135° + z \cdot 360°, \quad \alpha_{2Z} = 225° + z \cdot 360°, \quad z \in \mathbb{Z}$$

Der Taschenrechner gibt höchstens eine Lösung an. Sie liegt beim Kosinus im I. oder II. Quadranten $0 \leqq \alpha \leqq 180°$), beim Sinus und Tangens im I. oder »−I.« Quadranten ($-90° \leqq \alpha \leqq 90°$).

Beispiel: $\tan\alpha = -0{,}7$
$\alpha^* = -35{,}0°$ (gerundeter Wert des Taschenrechners)
$\hat{\alpha} = 35{,}0°$
Der Tangens ist negativ im II. und IV. Quadranten
II. Quadrant: $\alpha_1 = 180° - \hat{\alpha} = 145{,}0°$
IV. Quadrant: $\alpha_2 = 360° - \hat{\alpha} = 325{,}0°$

Die vollständige Lösung lautet:

$$\alpha_{1Z} = 145° + z \cdot 360°, \quad \alpha_{2z} = 325° + z \cdot 360°, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Am Schluss des vorigen Kapitels haben wir Formeln zusammengestellt, die die Zusammenhänge zwischen sin, cos und tan eines Winkels im ersten Quadranten wiedergeben. Bis aufs Vorzeichen gelten diese Formeln in allen Quadranten. Der Quadrant legt das Vorzeichen fest. Kennt man den Quadranten nicht, muss man Fallunterscheidungen machen. Beispiele:

1. Quadrant bekannt $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$ und α im II. Quadranten

dann ist $\sin\alpha$ positiv und es gilt $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + (\tan\alpha)^2}} = \dfrac{3}{5}$

dann ist $\cos\alpha$ negativ und es gilt $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + (\tan\alpha)^2}} = -\dfrac{4}{5}$

2. Quadrant unbekannt $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$

dann liegt α im II. oder III. Quadranten.

Liegt α im II. Quadranten, dann gilt $\sin\alpha = +\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = \dfrac{4}{5}$

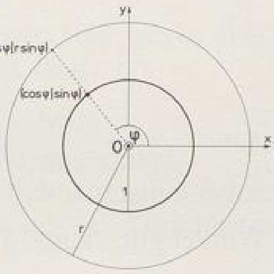
und $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2}}{\cos\alpha} = -\dfrac{4}{3}$

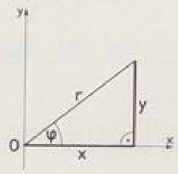
Liegt α im III. Quadranten, dann gilt $\sin\alpha = -\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = -\dfrac{4}{5}$

und $\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2}}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$

Polarkoordinaten

Wir haben cos φ und sin φ kennen gelernt als die x- und y-Werte des Punkts auf dem Einheitskreis in Richtung φ. Durch eine zentrische Streckung mit Zentrum O und Streckfaktor r erreichen wir jeden Punkt in Richtung φ. Ein Punkt P in Richtung φ, der von O die Entfernung r hat, hat demnach die Koordinaten $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$. r und φ legen seine Lage genauso eindeutig fest wie x und y. Man kann also auch r und φ als Koordinaten verwenden. Sie heißen **Polarkoordinaten** des Punkts. Der Punkt O, von dem aus man die Entfernung misst, heißt **Pol**; die Achse, gegen die man die Richtung misst, heißt **Polarachse**, das ist bei uns die positive x-Achse. Zwischen den Polarkoordinaten und den kartesischen Koordinaten bestehen folgende Zusammenhänge:





$$\mathbf{x = r \cdot \cos\varphi} \qquad\qquad \mathbf{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

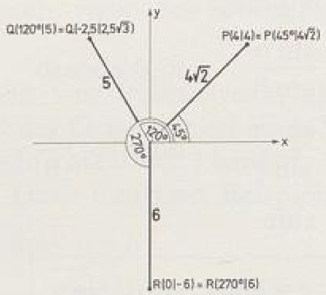
$$\mathbf{y = r \cdot \sin\varphi} \quad (r \geqq 0,\ 0° \leqq \varphi < 360°) \quad \mathbf{\tan\varphi = \frac{y}{x}} \quad (x \neq 0)$$

Sind r und φ gegeben, dann ergeben sich x und y sofort eindeutig. Sind aber x und y gegeben, dann muss man aus den Vorzeigen zuerst auf den Quadranten schließen, um φ eindeutig festzulegen; r ergibt sich immer eindeutig. Beim Pol O(0|0) ist φ beliebig. Ist $x = 0$ und y positiv, dann ist $\varphi = 90°$. Ist $x = 0$ und y negativ, dann ist $\varphi = 270°$.
Beispiele:

$P(4|4) = P(45°|4\sqrt{2})$,

$Q(120°|5) = Q(-2{,}5|2{,}5\sqrt{3})$,

$R(0|-6) = R(270°|6)$.



Manchmal sind Polarkoordinaten zweckmäßiger als die kartesischen Koordinaten. Zum Beispiel beim Wandern nach Kompass: »Geh vom Tümpel 3 km in Richtung SSW, dann bist du bei der Polizei.«