



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

Aufgaben

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83463](#)

Aufgaben zu 6.1

1. Was kannst du über die Lage der Punkte $P(r \cos \varphi | r \sin \varphi)$ sagen?
2. Der Punkt P liegt auf dem Einheitskreis. Bestimme die fehlende Koordinate.
 - a) $P\left(\frac{1}{2} | y\right)$
 - b) $P\left(x | -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$
 - c) $P\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} | y\right)$
 - d) $P(\cos 90^\circ | y)$
 - e) $P(x | \sin 135^\circ)$
 - f) $P\left(x | -\frac{1}{2}\right)$
 - g) $P(\cos 135^\circ | y)$
 - h) $P(x | -1)$
3. Berechne durch Zurückführung auf spitze Winkel:
 - a) $\sin 120^\circ$
 - b) $\cos 150^\circ$
 - c) $\tan 135^\circ$
 - d) $\sin 315^\circ$
 - e) $\cos 360^\circ$
 - f) $\tan 330^\circ$
 - g) $\sin 240^\circ$
 - h) $\cos 225^\circ$
 - i) $\tan 210^\circ$
 - j) $\sin 330^\circ$
 - k) $\cos 300^\circ$
 - l) $\tan 360^\circ$
 - m) $\sin 225^\circ$
 - n) $\tan 315^\circ$
 - o) $\cos 240^\circ$
4. Berechne durch Zurückführung auf spitze Winkel:
 - a) $\sin 1110^\circ$
 - b) $\cos 1110^\circ$
 - c) $\tan 1110^\circ$
 - d) $\sin 36045^\circ$
 - e) $\cos 36045^\circ$
 - f) $\tan 36045^\circ$
 - g) $\sin 100\pi$
 - h) $\cos 100\pi$
 - i) $\tan 100\pi$
 - j) $\sin\left(-\frac{201}{4}\pi\right)$
 - k) $\cos\left(-\frac{201}{4}\pi\right)$
 - l) $\tan\left(-\frac{201}{4}\pi\right)$
5. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für $\varphi \in \mathbb{R}$ im Grad- und Bogenmaß:
 - a) $\sin \varphi = -1$
 - b) $\cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 - c) $\tan \varphi = 1$
 - d) $\sin \varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 - e) $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$
 - f) $\tan \varphi = -\sqrt{3}$
 - g) $\sin \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 - h) $\cos \varphi = 1$
 - i) $\tan \varphi = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
 - j) $\cos \varphi = -1$
 - k) $\cos \varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 - l) $\tan \varphi = -1$
6. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für $\varphi \in [0; 2\pi[$:
 - a) $\sin \varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 - b) $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$
 - c) $\tan \varphi = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
 - d) $\sin \varphi = 1$
 - e) $\cos \varphi = -1$
 - f) $\tan \varphi = 1$
 - g) $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$
 - h) $\cos \varphi = \frac{1}{1}\sqrt{2}$
 - i) $\tan \varphi = -\sqrt{3}$
 - j) $\sin(-\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 - k) $\cos(\pi - \varphi) = \frac{1}{1}\sqrt{3}$
 - l) $\tan(-\varphi) = \frac{1}{1}\sqrt{3}$

7. Berechne $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ]$ auf $0,1^\circ$ genau:
- $\sin \varphi = 0,8$
 - $\cos \varphi = -0,95$
 - $\tan \varphi = 4$
 - $\sin \varphi = -0,2$
 - $\cos \varphi = 0,6$
 - $\tan \varphi = -1,7$
8. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für $\varphi \in [0; 2\pi[$:
- $6(\sin \varphi)^2 + \sin \varphi = 4 \sin \varphi$
 - $(\sin \varphi - \sqrt{3})(2 \cdot \cos \varphi - \sqrt{2}) = 0$
 - $2(\sin \varphi)^2 = 3 + 3 \cos \varphi$
 - $(\tan \varphi)^2 = 3$
 - $(\sin \varphi - 1) \tan \varphi = -\frac{1}{4} \cos \varphi$
9. Berechne $\tan \varphi$, wenn
- $\sin \varphi = \frac{4}{5}$ und φ spitz ist
 - $\cos \varphi = -\frac{5}{13}$ und $\varphi \in [90^\circ; 180^\circ]$ ist.
10. Berechne $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$, wenn $\tan \varphi = \frac{3}{4}$ und φ spitz ist.
11. Berechne für den spitzen Winkel φ , den $\cos \varphi$ und $\tan \varphi$, wenn gilt
- $\sin \varphi = \frac{40}{41}$
 - $\sin \varphi = \frac{3}{5}$.
12. α, β und γ sind die Innenwinkel eines Dreiecks. Vereinfache:
- $\sin \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
 - $\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2$
 - $\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta + \gamma}{2}$
 - $\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2 + \tan \frac{\gamma}{2} \cdot \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$
13. α, β, γ und δ sind die Innenwinkel einer Raute. Vereinfache:
- $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta$
 - $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta$
14. Berechne (Fallunterscheidung) für $z \in \mathbb{Z}$:
- $\sin \left(z \frac{\pi}{2}\right)$
 - $\cos(z\pi)$
 - $\tan \left(z \frac{\pi}{3}\right)$

15. Bestimme die fehlenden Werte (Fallunterscheidungen!)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin \alpha$	0,6	$-\frac{1}{2}$		$-\sqrt{0,5}$			
$\cos \alpha$			$\frac{5}{12}$		$-\sqrt{0,75}$		
$\tan \alpha$					-1,827	$2 + \sqrt{3}$	

16. Auf Seite 110 siehst du eine Tabelle, in der die Verwandtschaftsverhältnisse von sin, cos und tan für einen Winkel des I. Quadranten dargestellt sind. Mache die analoge Tabelle für einen Winkel des

- a) II. Quadranten b) III. Quadranten c) IV. Quadranten

17. Berechne die kartesischen Koordinaten

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
r	6	0,6	10	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$	0
φ	30°	135°	240°	π	$0,75\pi$	$\frac{1}{2}$	1

18. Berechne die Polarkoordinaten

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
x	3	12	-15	-7	1	$\sqrt{3}$	0
y	4	-5	8	-24	1	-1	1

19. Berechne die Polarkoordinaten der Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks im Einheitskreis mit Startecke (1|0) für

- a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 6$ d) $n = 17$.

• 20. Zeichne punktweise die Kurve, deren Punkte der Gleichung genügen

a) $r = 5$ b) $\varphi = 210^\circ$ c) $r = \varphi$ d) $r = 5 \sin \varphi$ e) $r = \frac{5}{\sin \varphi}$.

Aufgaben zu 6.2

Berechnungen

1. Berechne die fehlenden Winkel und Seitenlängen im Dreieck ABC

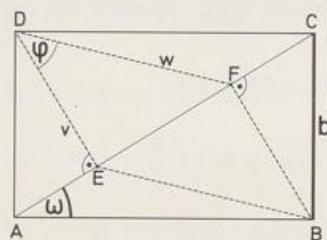
- a) $c = 6$, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 65^\circ$ b) $c = 9$, $a = 7$, $\gamma = 110^\circ$
 c) $a = 5$, $b = 8$, $\alpha = 30^\circ$ d) $c = 6$, $b = 3\sqrt{3}$, $\beta = 60^\circ$

2. Berechne die fehlenden Winkel und Seitenlängen im Dreieck ABC.
- a) $c = 10$, $b = 6$, $\alpha = 40^\circ$ b) $c = 8$, $b = 5$, $a = 6$
 c) $a = 16,5$, $b = 22$, $c = 27,5$ d) $a = 8$, $b = 4\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$

3. Berechne die restlichen Stücke und den Flächeninhalt vom Dreieck ABC.
- a) $r = 8$, $\beta = 73^\circ$, $\alpha = 44^\circ$ (r ist Umkreisradius)
 b) $c = 6$, $h_a = 5$, $\gamma = 73^\circ$

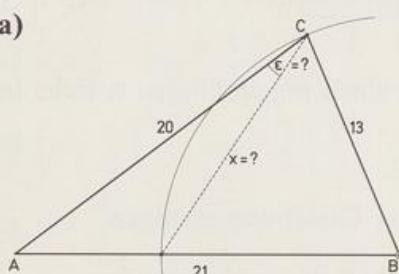
4. RECHTECK

Vom Rechteck ABCD sind b und ω bekannt.

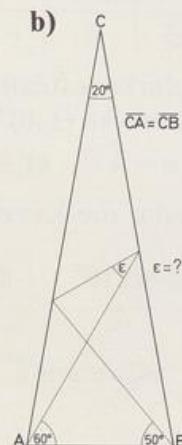


- a) Drücke den Flächeninhalt des Rechtecks mit b und ω aus.
 b) Drücke die Seiten und den Flächeninhalt des Parallelogramms EBFD mit b und ω aus.
 c) Berechne φ , falls $\omega = 31,75^\circ$ ist.
 d) Bei welchem Seitenverhältnis $b:a$ des Rechtecks ist $\varphi = 45^\circ$? (Tip: Ersetze sin und cos durch Seitenverhältnisse.)

5. a)



b)



6. Wie lautet der Sinussatz für

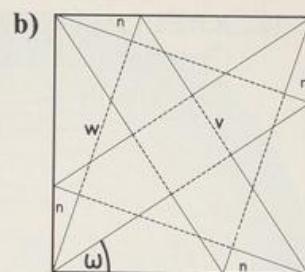
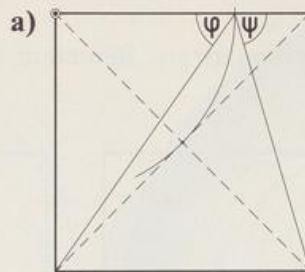
- a) ein bei C rechtwinkliges Dreieck?
 b) ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze C?

7. In einem Parallelogramm ABCD ist $a = 7$, $d = 4$ und $\alpha = 55^\circ$. Wie lang sind die Diagonalen?
 8. In einem Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ ist $a = 10$, $b = 5$, $c = 4$ und $d = 6$. Wie groß sind die Innenwinkel?

9. QUADRAT

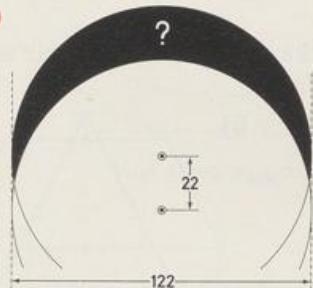
Beide Quadrate haben die Seitenlänge 1.

- Berechne φ und ψ .
- Gegeben ist ω .

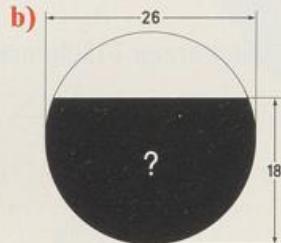


- Berechne v und w in Abhängigkeit von ω .
- Warum sind die gestrichelten Figuren Quadrate?
- Wie groß ist ω , wenn die gestrichelten Quadrate flächengleich sind?

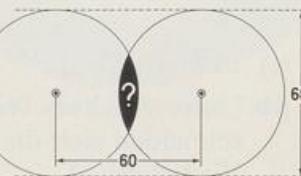
10. a)



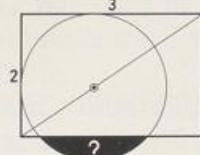
b)



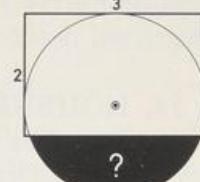
c)



d)



e)



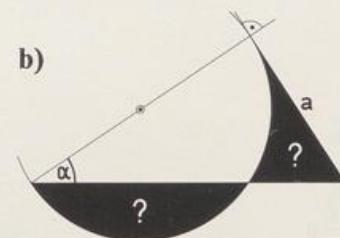
11. KREIS & DREIECK

Berechne die Inhalte der schwarzen Flächenstücke aus den angegebenen Seiten und Winkeln.

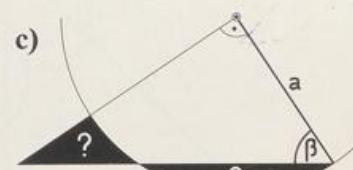
a)



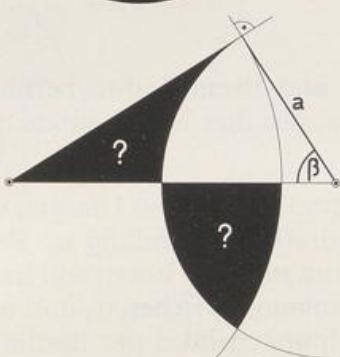
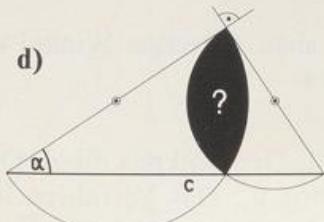
b)



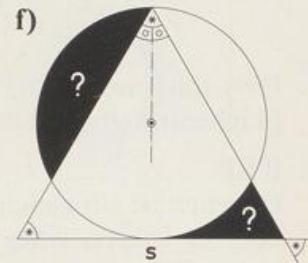
c)



d)

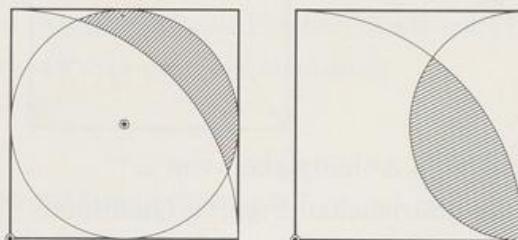


f)



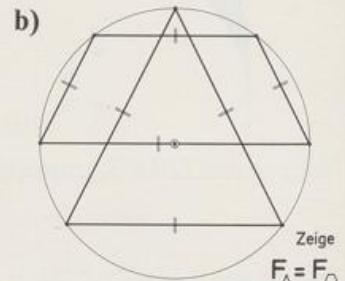
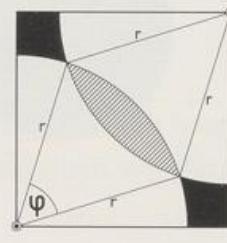
12. KREIS & QUADRAT

Gegeben sind die Einheitsquadrate. Berechne Inhalt und Umfang der schraffierten Flächenstücke.



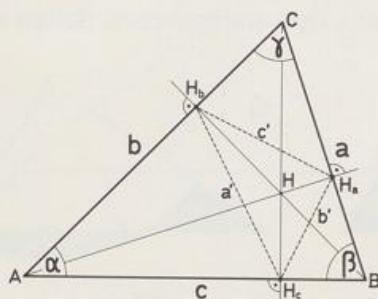
13. FLÄCHENGLEICH

- a) Im Quadrat sind die beiden schwarzen Flächenstücke zusammen so groß wie das schraffierte Linsenstück,
 α) Bestimme φ .
 β) Unter welchem Winkel σ schneiden sich die Viertelkreise?



14. HÖHENFUSSPUNKT-DREIECK

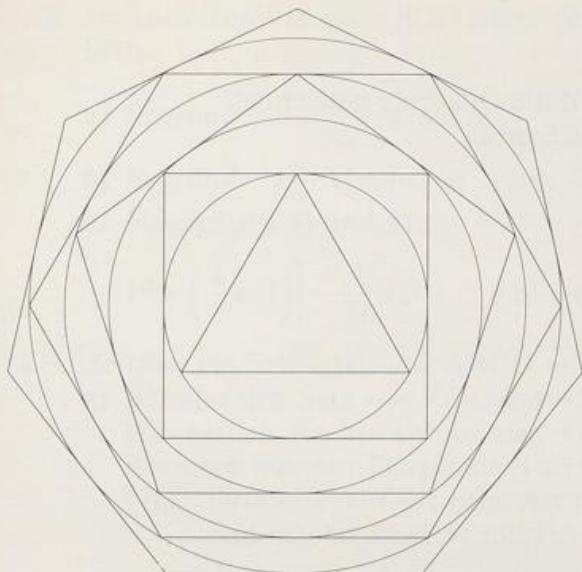
Berechne die Seitenlängen, Winkelmaße und den Flächeninhalt des Höhenfußpunkt-Dreiecks aus a , b , c , α , β und γ .



15. Drei Bälle mit 6 cm, 8 cm und 10 cm Radius berühren sich. Berechne Winkel und Flächeninhalt des Dreiecks, das ihre Mittelpunkte bilden.

16. KEP

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck vom Umfang $u_3 = 1$. Der Umkreis dieses Dreiecks ist Inkreis eines Quadrats vom Umfang u_4 . Berechne u_4 . Das Verfahren lässt sich beliebig fortsetzen, wenn man die Eckenzahl immer um 1 vergrößert. Bestimme den allgemeinen Zusammenhang zwischen u_n und u_{n+1} .
 (Tip: Verwende den Mittelpunktswinkel des Bestimmungsdreiecks.)



Vom 3-Eck zum 7-Eck



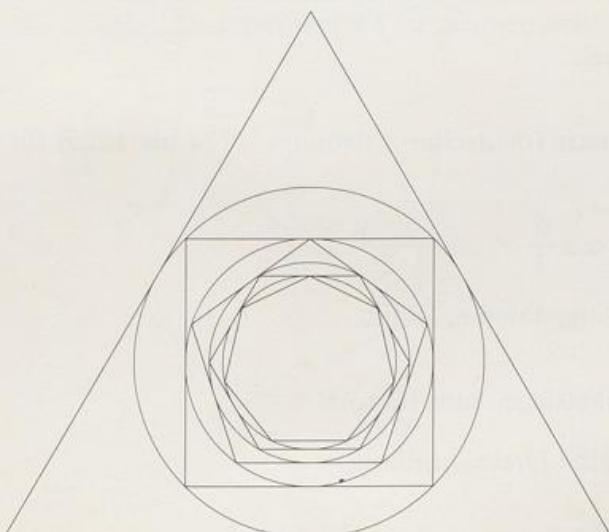
Vom 3-Eck zum 100 000-Eck

17. LER

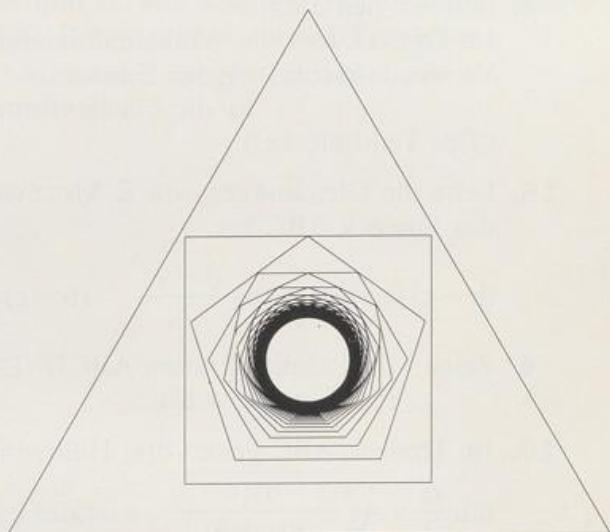
Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck vom Umfang $u_3 = 1$. Der Inkreis dieses Dreiecks ist Umkreis eines Quadrats vom Umfang u_4 . Berechne u_4 . Das Verfahren lässt sich beliebig fortsetzen, wenn man die Eckenzahl immer um 1 vergrößert. Bestimme den allgemeinen Zusammenhang zwischen u_n und u_{n+1} .

(Tip: Verwende den Mittelpunktswinkel des Bestimmungsdreiecks.)

Der deutsche Mathematiker und Astronom Johannes KEPLER (Weil der Stadt 1571 bis 1630 Regensburg) versuchte mit einer solchen Konstruktion die Verhältnisse der Radien der Planetenbahnen auf regelmäßige Vielecke zurückzuführen. Sein Versuch ist gescheitert.



3-Eck zum 7-Eck

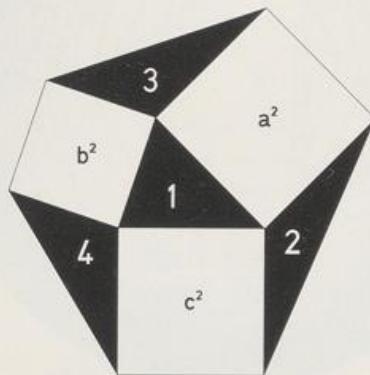


3-Eck zum 100 000-Eck

Beweise

1. FLÄCHENGLEICH

Über den Seiten eines Dreiecks ABC sind die Quadrate gezeichnet.
Zeige: Die numerierten Flächen sind gleich groß.



2. Beweise die Formeln für das Dreieck ABC mit Umkreisradius r .

a) $h_c = 2r \sin \alpha \sin \beta$

b) $F = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ c) $F = \frac{abc}{4r}$

- 3. Beweise den Tangenssatz:

Die Differenz zweier Dreieckseiten verhält sich zur Summe (dieser Seiten) wie der Tangens der halben Differenz der Gegenwinkel (dieser Seiten) zum Tangens der halben Summe dieser Winkel.

4. Beweise den Satz:

Im Dreieck teilt die Winkelhalbierende eine Seite im Verhältnis der beiden andern.

Verwende dazu: a) den Sinussatz

b) die Flächenformel.

(Tip: Teildreiecke!)

- 5. Leite die Gleichungen von E. MOLLWEIDE (deutscher Astronom, 1774 bis 1825) für das Dreieck ABC her.

$$(b + c) \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \quad (b - c) \cos \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta - \gamma}{2}$$

6. Zeige: Im Parallelogramm ABCD (Diagonalen e, f) gilt:
 $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

- 7. Im Dreieck ABC gelten drei Halbwinkelsätze, zum Beispiel

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \text{ s ist der halbe Dreieckumfang.}$$

a) Wie lauten die beiden andern Sätze?

b) Beweise den obigen Satz.

8. Im konvexen Viereck ABCD schneiden sich die Diagonalen e und f unter dem Winkel φ .

a) Begründe: $F = \frac{1}{2} e \cdot f \cdot \sin \varphi$

b) Begründe: $a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos \varphi$

c) Folgere aus a) und b):

$$F^2 = \left(\frac{1}{2} e \cdot f\right)^2 - \frac{1}{16} (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2$$

• 9. Zeichne ein Sehnenviereck ABCD mit den Diagonalen e und f.

a) Beweise den Satz von PTOLEMAIOS:

Die beiden Rechtecke aus den Gegenseiten sind zusammen so groß wie das Rechteck aus den Diagonalen: $ac + bd = ef$.

(Tip: Drücke e^2 auf doppelte Art mit dem Kosinussatz aus und eliminiere $\cos \beta$ und mache dasselbe mit f^2 .)

b) Beweise: $\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$

10. a) Beweise die Formel für den Inkreisradius ϱ im Dreieck ABC

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

s ist der halbe Dreiecksrand. (Tip: Halbwinkelsatz!)

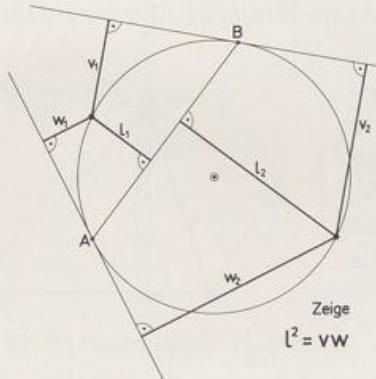
b) Begründe mit a) die Formel von HERON für die Dreieckfläche F

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

• 11. GEOMETRISCHES MITTEL

Zwei Geraden berühren einen Kreis in A und B. Von einem Kreispunkt fällt man das Lot l auf die Berührsehne [AB] und die Lote v und w auf die Tangenten.

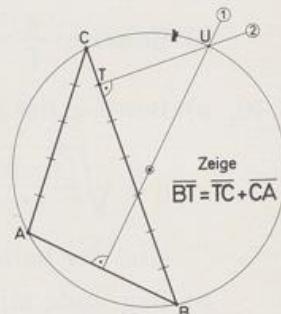
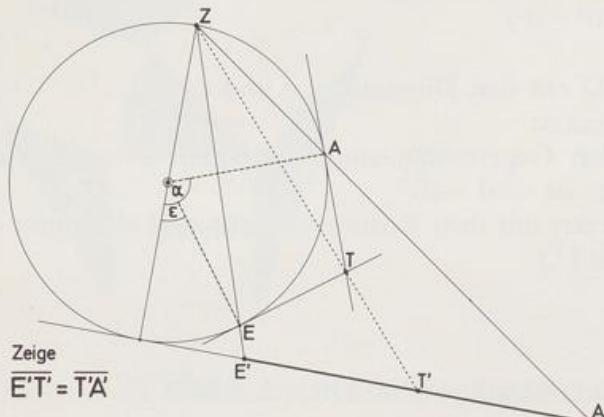
Zeige: Das Sehnenlot l ist geometrisches Mittel der Tangentenlote $l = \sqrt{vw}$.



12. PROJEKTION

Vom Endpunkt Z eines Kreisdurchmessers ($d = 2$) aus projiziert man zwei Kreispunkte A und E auf die Gerade, die den Kreis im andern Endpunkt des Durchmessers berührt: Die Projektionen sind A' und E'. Die Kreistangenten durch A und E schneiden sich in T.

- Berechne die Länge von $[A'E']$ in Abhängigkeit von α und ε .
- Zeige: Die Projektion T' von T auf die Tangente halbiert die Strecke $[A'E']$.



13. BERUNI

Die Mittelsenkrechte m_{AB} einer Dreieckseite schneidet den zugehörigen längeren Umkreisbogen in U; das Lot durch U auf der Dreieckseite a hat den Lotfußpunkt T.

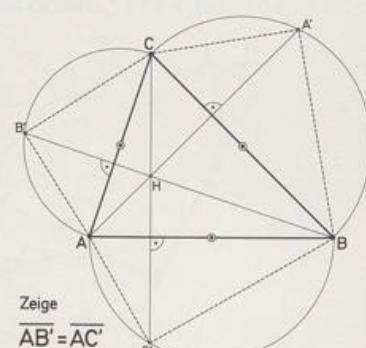
Beweise den Satz von Abu-r-Raihan Mohammed ibn al-Beruni (persischer Astrologe, Mathematiker, Geograf, Mineraloge, Religionswissenschaftler, 973 bis nach 1050):

T halbiert den Streckenzug [ABC].

14. PYRAMIDE

- Zeige: Zwei (gestrichelte) Katheten der Thaleskreis-Dreiecke, die einen Dreieckspunkt gemeinsam haben, sind gleich lang.
- Wegen a) bilden die drei rechtwinkligen Dreiecke zusammen mit dem Dreieck ABC das Netz einer Pyramide ABCS: Klappt man die rechtwinkligen Dreiecke hoch, dann treffen sich A', B' und C' in der Spitze S. Der Höhenfußpunkt H ist dann die senkrechte Projektion von S in die Dreieckebene.

Berechne die Höhe dieser Pyramide aus a, b, c, α , β und γ des Grundflächendreiecks.



Näherungen

Bei einigen Konstruktionsaufgaben waren sich die Geometer lange Zeit nicht im Klaren, ob die Ausführung allein mit Zirkel und Lineal, die klassische Konstruktion also, möglich sei. In die Geschichte eingegangen sind die berühmten Probleme:

Würfelverdopplung:

Wie konstruiert man zu einem gegebenen Würfel die Kantenlänge eines andern Würfels, der doppelten Rauminhalt hat?

Winkeldrittung:

Wie konstruiert man den dritten Teil eines Winkels?

Rektifikation des Kreises:

Wie konstruiert man eine Strecke, die so lang ist wie ein gegebener Kreis?

Wie konstruiert man eine Strecke, die so lang ist wie ein gegebener Kreisbogen?

Quadratur des Kreises

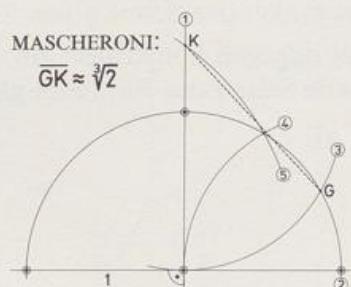
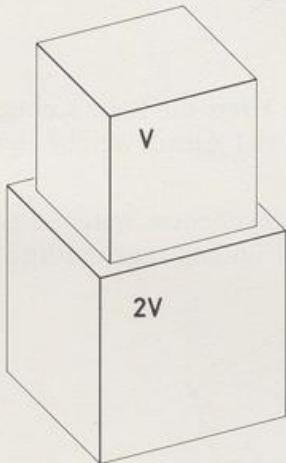
Wie konstruiert man ein Quadrat, das einem gegebenen Kreis flächengleich ist?

Wir wissen heute, dass diese Probleme allgemein klassisch nicht lösbar sind. Alle Konstruktionen zu diesem Thema sind zwar keine Lösungen im geometrischen Sinn, sie verräumen nämlich die Lösungsidee, wohl aber sind sie Lösungen für den Praktiker, den Baumeister, den Ingenieur. Man nennt sie deshalb Näherungskonstruktionen. Mit ihnen erreicht man oft eine Genauigkeit, die die Zeichnung von der angestrebten Figur fürs Auge ununterscheidbar macht.

1. WÜRFELVERDOPPLUNG

Von den beiden Würfeln hat der untere doppelt so großes Volumen wie der obere.
Der obere Würfel hat die Kantenlänge 1.

a) Berechne die Kantenlänge des unteren Würfels.

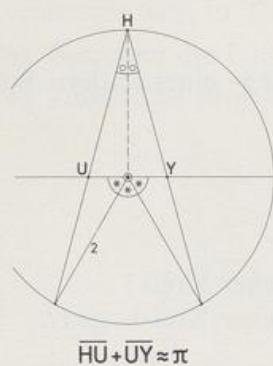


b) MASCHERONI (Lorenzo, italienischer Mathematiker und Lyriker, Castagnetto 1750 bis 1800 Paris) hat eine Konstruktion angegeben, die den Wert $\sqrt[3]{2}$ sehr gut annähert.

Berechne die Länge von [GK]. Um wie viel Prozent weicht sie vom exakten Wert ab?

2. π

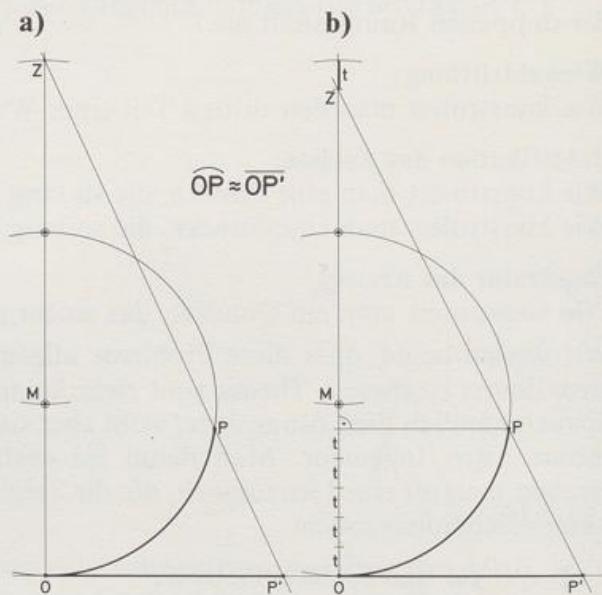
HYUGENS (Christiaan, niederländischer Physiker und Mathematiker, Den Haag 1629 bis 1695 Den Haag) hat eine Näherungskonstruktion für π angegeben. Berechne die Länge des Streckenzugs [HUY]. Um wie viel Prozent weicht sie von π ab?



• 3. ABWICKLUNG

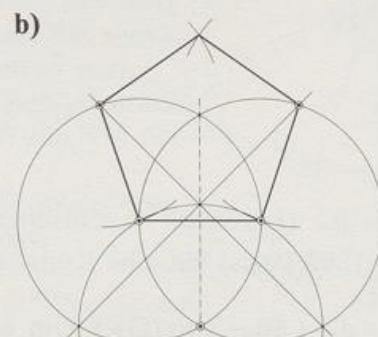
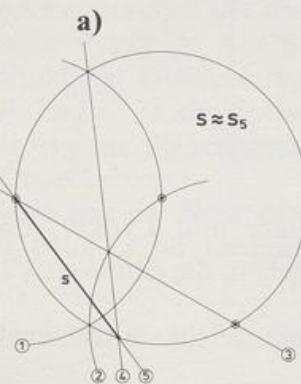
NIKOLAUS VON KUES (deutscher Philosoph und Theologe, Kues an der Mosel 1401 bis 1464 Todi) und LAMBERT (Johann Heinrich, deutscher Philosoph, Mathematiker und Physiker, Mülhausen [Elsass] 1728 bis 1777 Berlin) haben eine Strecke konstruiert, die etwa genau so lang ist wie ein gegebener Kreisbogen (Einheitskreis).

Wie lang ist der Kreisbogen OP, wenn der zugehörige Mittelpunktwinkel OMP 30° , 60° , 90° ist? Um wie viel Prozent weicht jeweils die Länge von [OP] von der des entsprechenden Bogens ab? (Additionstheorem nötig!)



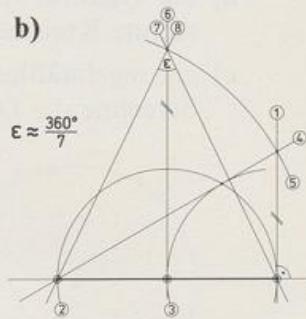
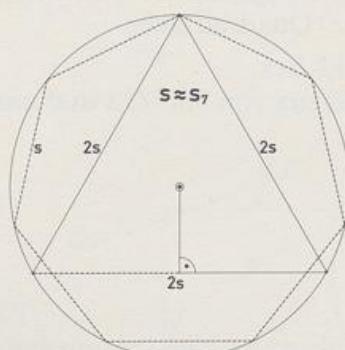
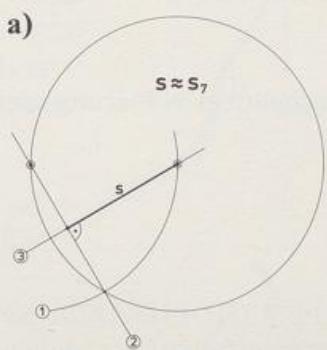
• 4. FÜNFECK

- LEONARDO DA VINCI konstruiert in einen gegebenen Kreis die Seite s eines fast regelmäßigen Fünfecks in fünf Schritten. Um wie viel Grad weicht der Mittelpunktwinkel der Sehne s von 72° ab?
- DÜRER dagegen konstruiert ein Fünfeck aus einer gegebenen Seite. Sind alle Seiten des Fünfecks gleich lang? Ist das Fünfeck regelmäßig?



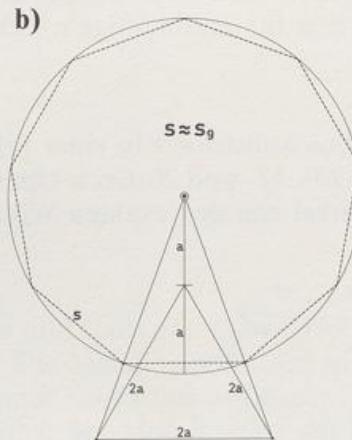
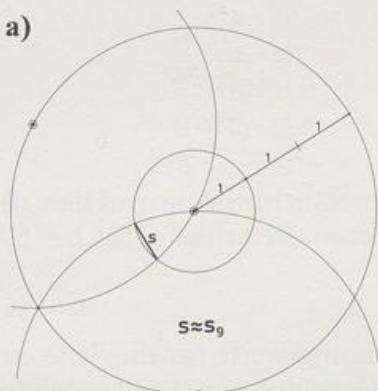
• 5. SIEBENECK

- a) LEONARDO DA VINCI konstruiert in einen gegebenen Kreis die Seite s eines fast regelmäßigen Siebenecks in drei Schritten. Um wie viel Grad weicht der Mittelpunktwinkel der Sehne s von $360^\circ/7$ ab?
- b) Berechne den Unterschied von $360^\circ/7$ und ε .



• 6. NEUNECK

- a) DÜRER konstruiert in einen Kreis mit $r = 1$ die Seite s eines regelmäßigen Neunecks. Um wie viel Grad weicht der Mittelpunktwinkel der Sehne s von 40° ab?
- b) Um wie viel Grad weicht der zu s gehörige Mittelpunktwinkel von 40° ab?



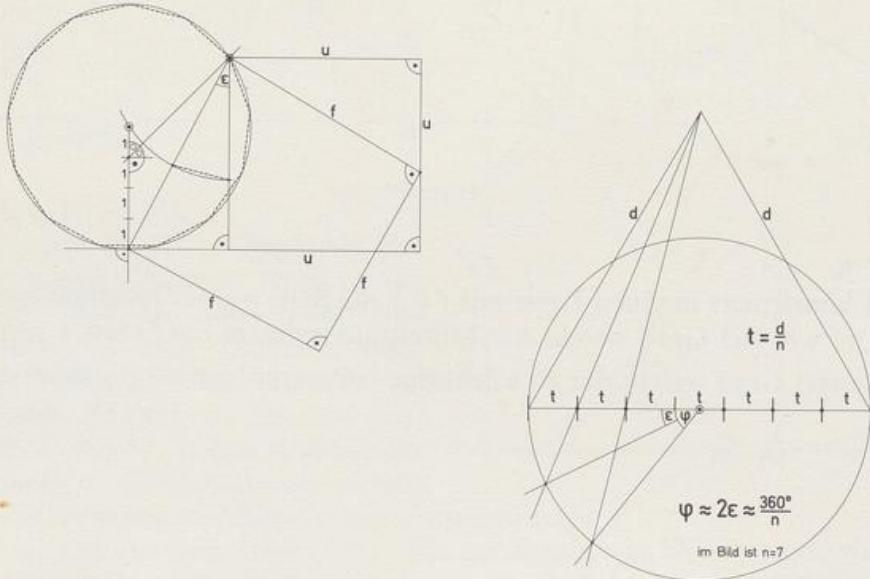
• 7. ELFECK

- DÜRER nimmt $9/32$ des Kreisdurchmessers als Näherungswert für ein diesem Kreis einbeschriebenes regelmäßiges Elfeck. Um wie viel Grad weicht der zu dieser Seite gehörige Mittelpunktwinkel von $360^\circ/11$ ab?

• 8. WILLI

Von Ernst WILLI (Schweizer Bildhauer, geboren 1900) stammt eine dreifältige Näherungskonstruktion für

- ein Quadrat (Seitenlänge u), das einem gegebenen Kreis umfanggleich ist, berechne Kreisumfang: Quadratumfang
- ein Quadrat (Seitenlänge f), das einem gegebenen Kreis flächengleich ist, berechne Kreisfläche: Quadratfläche
- ein regelmäßiges 13-Eck, berechne die Differenz von $360^\circ/13$ und entsprechendem Näherungswert ε .

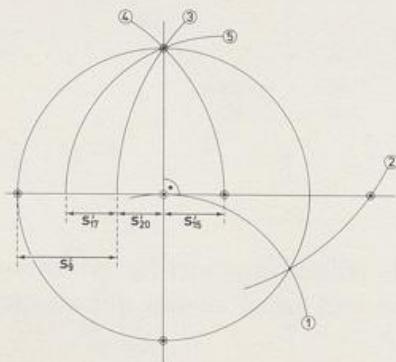


9. RENALDINI

RENALDINI (1615 bis 1698) hat eine allgemeine Näherungskonstruktion der Mittelpunktwinkel φ für regelmäßige n -Ecke angegeben. Berechne φ für $n = 5, 7, 9$ und 11.

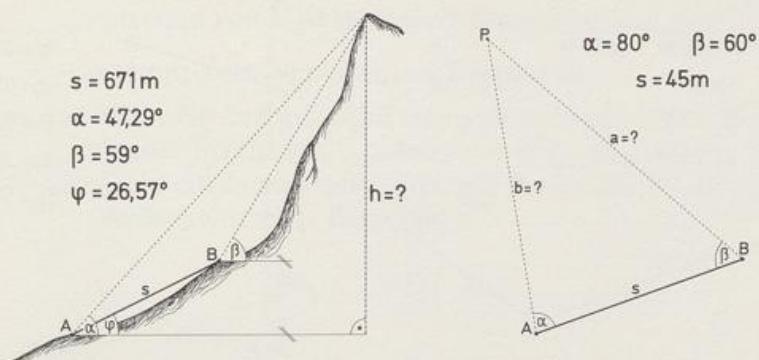
10. POSTULA

Henri POSTULA konstruiert in einer Figur Näherungswerte für die Seite eines regelmäßigen 9-, 15-, 17- und 20-Ecks. Um wie viel Grad weichen die dazugehörigen Mittelpunktwinkel von den exakten Winkeln ab?



Vermessung

1. HÖHENMESSUNG

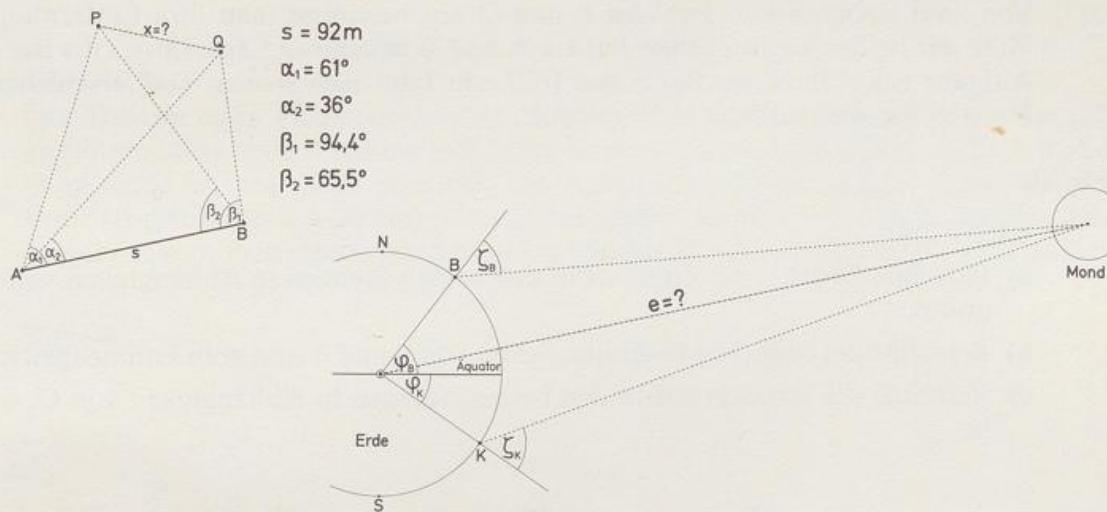


2. UNZUGÄNGLICHER PUNKT

Von einer zugänglichen Strecke bekannter Lage aus bestimmt man die Entfernung eines unzugänglichen Punkts P.

3. UNZUGÄNGLICHE STRECKE

Von einer zugänglichen Strecke bekannter Lage aus bestimmt man die Länge einer unzugänglichen Strecke.



• 4. MONDENTFERNUNG

Die französischen Astronomen LALANDE und LACAILLE haben 1771 trigonometrisch die Entfernung e Mond-Erde ermittelt. Die Messungen fanden in Berlin und Kapstadt gleichzeitig statt. Berlin und Kapstadt liegen fast auf demselben Längenkreis. Gemessen wurde jeweils die Zenitdistanz ζ des Mondes. ζ ist der Winkel zwischen Lot und Verbindungsstrecke Mond-Beobachter. Bestimme aus den Messwerten das Verhältnis Mondentfernung : Erdradius.

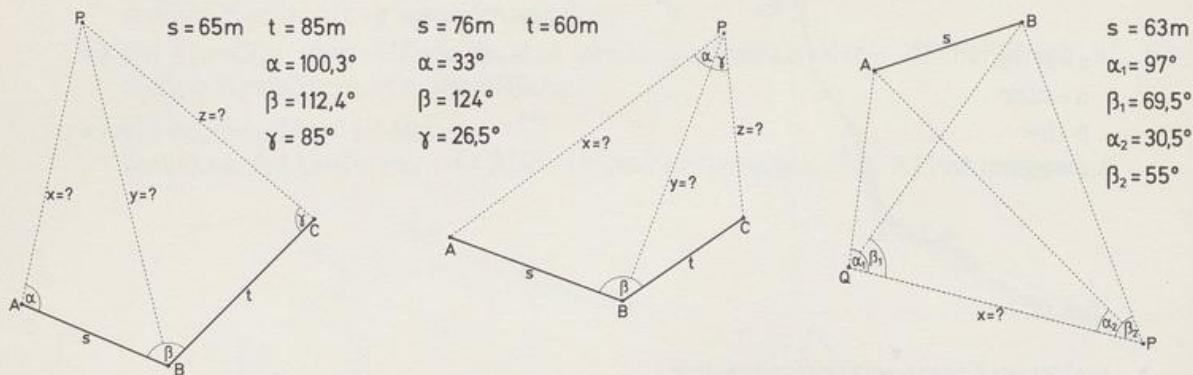
$$\text{Berlin: } \varphi_B = 52^\circ 31' 13'' \quad \zeta_B = 41^\circ 15' 44''$$

$$\text{Kapstadt: } \varphi_K = -33^\circ 55' 15'' \quad \zeta_K = 46^\circ 33' 37''$$

$$\text{Erdradius: } r = 6370 \text{ km}$$

VORWÄRTSEINSCHNEIDEN

5. Von drei zugänglichen Punkten bekannter Lage aus bestimmt man die Entfernungen eines unzugänglichen Punkts P.



6. RÜCKWÄRTSEINSCHNEIDEN (Aufgabe von SNELLIUS [1617] und POTHEON [1692])

Vom zugänglichen Punkt P aus bestimmt man die Entfernungen zu drei unzugänglichen Punkten A, B und C bekannter Lage.

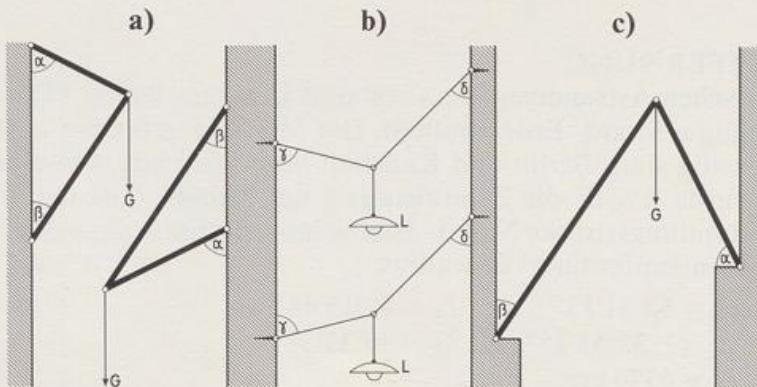
7. SNELLIUS–HANSEN

Von zwei zugänglichen Punkten P und Q aus bestimmt man ihre Entfernung mit Hilfe der beiden zugänglichen Punkte A und B bekannter Lage. (SNELLIUS hat diese Aufgabe gelöst in einem Buch, das 1627, ein Jahr nach seinem Tod, erschienen ist; HANSEN hat die Aufgabe 1841 gelöst.)

Physik

1. KRÄFTIG

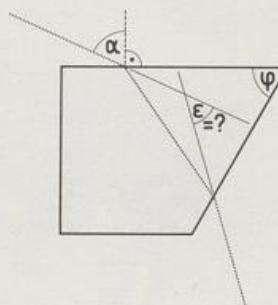
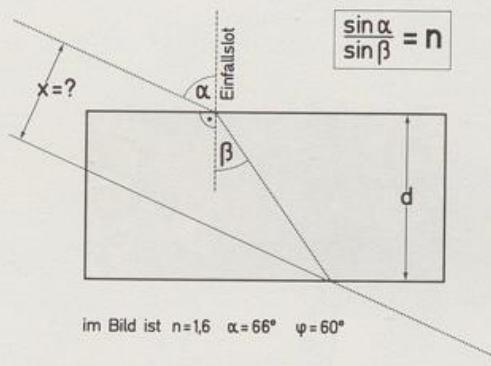
- Berechne Druck- und Zugkraft in den beiden Stangen in Abhängigkeit von G, α und β .
- Berechne die Seilkräfte in Abhängigkeit von γ und δ und vom Lampengewicht L.
- Berechne die Druckkräfte in den beiden Stangen in Abhängigkeit von G, α und β .



2. BRECHUNG

SNELLIUS (Willebrord, niederländischer Mathematiker und Physiker, Leiden 1580 bis 1626 Leiden) hat das nach ihm benannte Brechungsgesetz gefunden. Wenn ein Lichtstrahl von Luft in einen Körper übergeht, gilt: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$; n heißt Brechzahl, sie hängt nur vom Material des Körpers ab.

- Geht ein Lichtstrahl durch eine planparallele Glasplatte, so sind ein- und ausfallender Strahl um x parallel versetzt. Berechne x für $d = 30 \text{ mm}$.
- Geht ein Lichtstrahl durch ein Prisma, so bilden ein- und ausfallender Strahl den Ablenkwinkel ε . Berechne ε .



3. TONARM

Der Tonarm eines Plattenspielers ist dazu da, die Diamantspitze so in der Tonrille zu führen, dass beim Abtasten möglichst wenig Verzerrungen entstehen. Eine Bedingung dafür ist, dass Arm und Rille am Anfang (Außenradius $R = 15 \text{ cm}$) und am Ende (Innenradius $r = 10 \text{ cm}$) einen gleich großen Winkel ε bilden. In welcher Entfernung x vom Plattenloch muss ein 25 cm langer Tonarm seinen Drehpunkt haben?

