Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

Aufgaben

x kann im II. Quadranten liegen, dann gilt

$\cos x = -\sqrt{1-(\sin x)^2} = -0{,}8$. Setzt man diesen Wert in die linke Seite der Gleichung ein, so ergibt sich

$3 \sin x - 4 \cos x = 1{,}8 + 3{,}2 = 5$

Also gibt es bloß die Lösungsserie

$\mathbf{x_k = 2{,}498\ldots + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$.

Aufgaben zu 7.

1. Überprüfe die Additionstheoreme an den Beispielen
   a) $\sin(60° + 30°)$ **b)** $\sin(60° - 30°)$ **c)** $\sin(90° - 45°)$
   d) $\sin(210° - 60°)$ **e)** $\cos(90° + 30°)$ **f)** $\cos(90° - 30°)$
   g) $\cos(240° - 60°)$ **h)** $\cos(210° + 90°)$ **i)** $\tan(60° - 30°)$
   j) $\tan(150° + 60°)$ **k)** $\tan(240° - 60°)$ **l)** $\cos(315° + 45°)$

2. Berechne die exakten Werte von
   a) $\sin 75°$ **b)** $\sin 15°$ **c)** $\cos 75°$ **d)** $\cos 15°$ **e)** $\tan 15°$
   f) $\tan 75°$ **g)** $\sin 72°$ **h)** $\cos 72°$ **i)** $\tan 72°$.

3. x und y seien spitze Winkel. Berechne
   a) $\sin(x+y)$ und $\sin(x-y)$, wenn $\sin x = \frac{5}{13}$ und $\sin y = \frac{4}{5}$
   b) $\cos(x+y)$ und $\cos(x-y)$, wenn $\cos x = \frac{8}{17}$ und $\cos y = \frac{5}{12}$

4. Berechne $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ und $\tan 2\alpha$, wenn α spitz ist und
   a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ **b)** $\cos\alpha = 0{,}6$ **c)** $\tan\alpha = 0{,}5$.

5. Berechne $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\tan\frac{\alpha}{2}$, wenn α spitz ist und
   a) $\sin\alpha = 0{,}8$ **b)** $\cos\alpha = 0{,}5$.

6. Berechne die exakten Werte $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ für
   a) $\alpha = 15°$ **b)** $\alpha = 7{,}5°$ **c)** $\alpha = 22{,}5°$

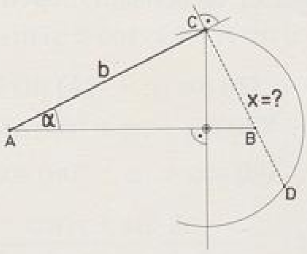
7. Verwandle in ein Produkt.
   a) $\sin 5x + \sin x$ **b)** $\sin 7x - \sin 3x$
   c) $\cos 3x + \cos x$ **d)** $\cos 6x - \cos x$

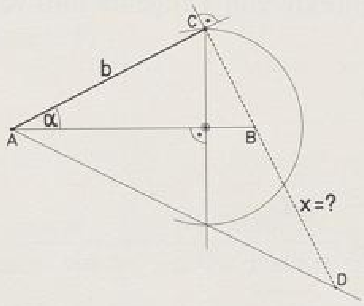
8. Verwandle in ein Produkt.
   a) $\sin x + \cos y$ **b)** $\sin x - \cos y$

9. DOPPELHÖHE

a) Drücke $\overline{CD}$ durch b und α aus, wenn Winkel ACB = 90° ist.

b) Drücke $\overline{CD}$ durch a und b aus, wenn Winkel ACB = 90° und b > a ist.



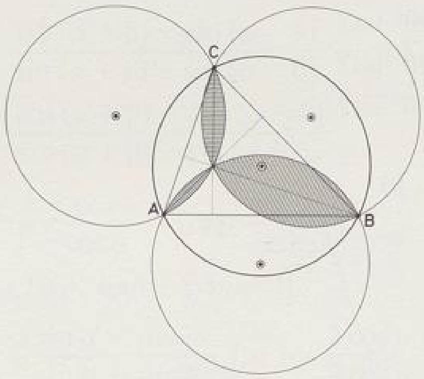


10. DREILINSEN

Zeichne ein Dreieck ABC und den Höhenschnittpunkt H. Zeichne die drei Kreise: Jeder geht durch zwei Ecken und durch den Höhenschnittpunkt H. Zeige:

a) Die Radien der drei Kreise sind gleich dem Umkreisradius.

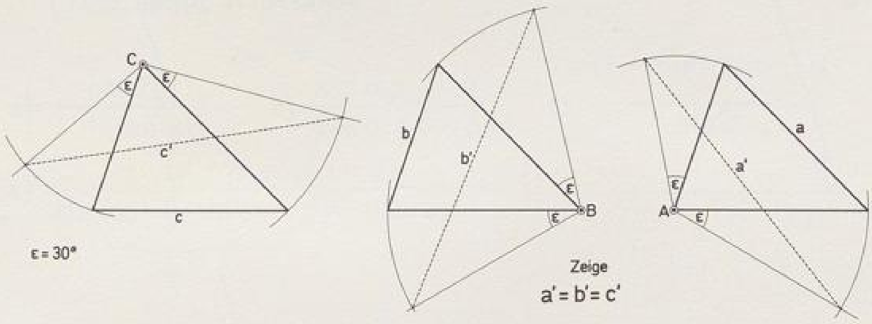
b) Die drei linsenförmigen Überlappungsflächen sind zusammen so groß wie die Umkreisfläche, verringert ums Doppelte der Dreieckfläche.



11. WINKELPLUSSECHZIG

Vergrößert man einen Dreieckwinkel auf beiden Seiten um 30°, so entsteht ein Dreieck, das in zwei Seitenlängen mit dem alten übereinstimmt, die dritte Seite ist länger. Man macht das mit allen drei Winkeln.

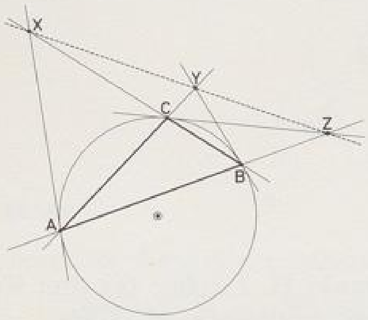
Zeige: Die jeweils dritten (längeren) Seiten sind alle gleich lang.



12. GERADLINIG

Zeichne ein (nicht gleichschenkliges) Dreieck ABC mit seinem Umkreis. Zeichne in einem Eckpunkt die Umkreistangente und schneide sie mit der verlängerten Gegenseite. Mache das für alle Eckpunkte.

Zeige: Die Schnittpunkte von Tangente und verlängerter Gegenseite liegen auf einer Gerade.



13. SCHEINDRITTEL

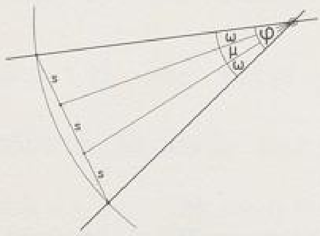
a) Die einfachste Näherung beruht auf der Sehnendrittelung. Wie groß sind μ und ω, wenn $\varphi = 30°, 60°, 90°, 120°$ ist?

b) Wie groß ist ε, wenn $\omega = 30°, 45°, 60°, 90°$ ist?

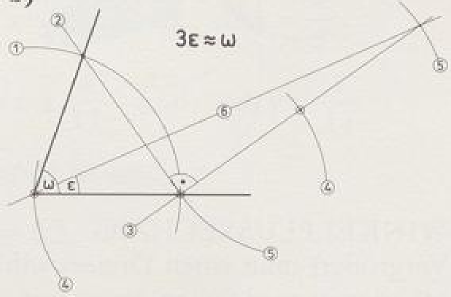
c) Wie groß ist ε, wenn $\omega = 30°, 45°, 60°, 90°$ ist?

d) Wie groß ist ε, wenn $\omega = 30°, 45°, 60°, 90°$ ist?

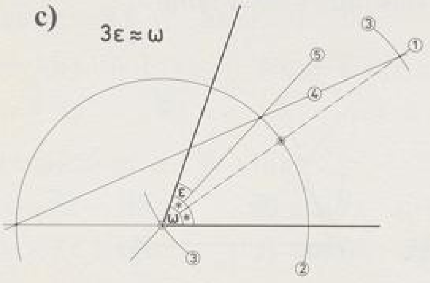
a)



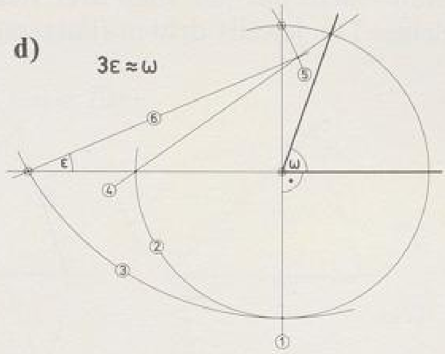
b)



c)



d)



Vereinfache

1. a) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ b) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$

2. a) $2(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^4 - (\sin\alpha)^4$
   b) $(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$

3. a) $2\sin(45° + \alpha)\sin(45° - \alpha)$
   b) $\sin(60° + \alpha) - \sin(60° - \alpha)$
   c) $\cos(60° + \alpha) + \cos(60° - \alpha)$

4. a) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\ - \sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$

5. a) $\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)\sin\alpha$
   b) $\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin\alpha$
   c) $\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$
   d) $\sin(\alpha - \beta)\cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)$

6. a) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha\sin\beta}$ b) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta}$

7. a) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$ b) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$
   c) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$

8. a) $\dfrac{1 + \cos}{1 - \cos\alpha}$ b) $\dfrac{1 + \cos\alpha}{(\sin\alpha)^2}$ c) $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\tan\alpha}$ d) $\dfrac{1}{\cos\alpha} - \tan\alpha$
   (*Tipp:* halbe Winkel!)

9. a) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$ b) $\dfrac{2\cos\alpha + \sin 2\alpha}{2\cos\alpha - \sin 2\alpha}$
   c) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta}$ (*Tip:* halbe Winkel!)

10. a) $\dfrac{1 - \cos\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha}$ b) $\dfrac{1 + \cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha - \sin\alpha}$
    (*Tipp:* halbe Winkel!)

11. a) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 - (\tan\alpha)^2}$ b) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$ c) $\dfrac{(1 + \cos\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha}$
    d) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + (\cos\alpha)^2}$

Beweise

1. a) $\sin\alpha + \sin(\alpha + 120°) + \sin(\alpha + 240°) = 0$
   b) $\tan\alpha + \tan(\alpha + 120°) + \tan(\alpha + 240°) = 3\tan 3\alpha$
   c) $\cos\alpha\cos(\alpha + 120°)\cos(\alpha + 240°) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$
   d) $\tan\alpha\tan(\alpha + 120°)\tan(\alpha + 240°) = -\tan 3\alpha$

2. a) $\sin 3x = 3\sin x - 4(\sin x)^3$
   b) $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$ (*Tipp:* $3x = 2x + x$!)

3. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - (\tan x)^3}{1 - 3(\tan x)^2}$

:4. a) $\sin 4x = 8\sin x(\cos x)^3 - 4\sin x\cos x$
   b) $\cos 4x = 8(\cos x)^4 - 8(\cos x)^2 + 1$

•5. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x - 4(\tan x)^3}{1 - 6(\tan x)^2 + (\tan x)^4}$

6. a) Leite her: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$
   b) Welche Formel ergibt sich für $\tan\frac{\alpha}{2}$?

7. a) $\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha) = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{2}}$
   b) $\sin(45° - \alpha) = \cos(45° + \alpha) = \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}}$
   c) $\tan(45° + \alpha) = \dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$
   d) $\tan(45° - \alpha) = \dfrac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$

8. a) $\tan(45° + \alpha) - \tan(45° - \alpha) = 2\tan 2\alpha$
   b) $\tan(45° + \alpha) + \tan(45° - \alpha) = \dfrac{2}{\cos 2\alpha}$

9. a) $\dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \tan\left(45° + \dfrac{\alpha}{2}\right)$
   b) $\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = \tan\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

10. a) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + (\tan\alpha)^2}$ b) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - (\tan\alpha)^2}{1 + (\tan\alpha)^2}$
    c) $\tan\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

11. **a)** $\sin 55° + \sin 5° = \cos 25°$
b) $\sin 80° - \cos 50° = \sin 20°$
c) $\cos 170° + \cos 70° + \cos 50° = 0$
d) $\sin 20° + \sin 40° = \sin 80°$
• **e)** $8 \sin 20° \sin 40° \sin 80° = \sqrt{3}$
• **f)** $8 \cos 20° \cos 40° \cos 80° = 1$
• **g)** $\tan 20° \tan 40° \tan 60° \tan 80° = 3$
(Teste auch deinen Taschenrechner!)

12. **a)** $\sin 75° + \sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ und $\sin 75° - \sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
b) Berechne aus **a)** $\sin 75°$ und $\sin 15°$.

13. $\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan 3\alpha \tan 2\alpha \tan \alpha$

⁝ 14. Dreieck ABC ist rechtwinklig, wenn gilt
a) $\sin \alpha = \dfrac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$
b) $\sin \alpha = \cos \beta + \cos \gamma$

⁝ 15. Welche Eigenschaft hat ein Dreieck, in dem gilt $\dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$?

⁝ 16. Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:
a) $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$
b) $\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma$

⁝ 17. Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:
a) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
b) $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
c) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1$
d) $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 1$

⁝ 18. Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:
a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$
b) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$
c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1$
d) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = -4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + 1$

19. Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:

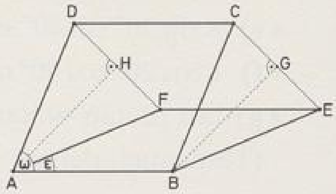
a) $(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 + (\sin\gamma)^2 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$

b) $(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 - (\sin\gamma)^2 = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

c) $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = -2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1$

d) $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 - (\cos\gamma)^2 = -2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + 1$

20. SUMDIFSIN
ABCD und ABEF sind Rauten.



a) Zeige: $\sphericalangle \text{BAH} = \sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon + \omega)$, $\sphericalangle \text{HAD} = \tau = \frac{1}{2}(\omega - \varepsilon)$

b) Begründe:
Fläche (ABCD) + Fläche (ABEF) = 2 · Fläche (ABGH)
Fläche (ABCD) − Fläche (ABEF) = Fläche (ECDF)

c) Drücke die Flächeninhalte in **b)** durch die Winkel ω, ε, σ und τ aus und leite so die Formeln für die Summe und Differenz zweier Sinuswerte her.

21. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis c und den Schenkellängen 1.

a) Zeichne die Höhe h_a ein und berechne sie auf zwei Wegen: einmal aus dem Dreieck ABH_a, dann aus dem Dreieck AH_aC. Beweise:

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

b) Fälle von H_c aus das Lot auf BC (Lotfußpunkt F) und zeige:

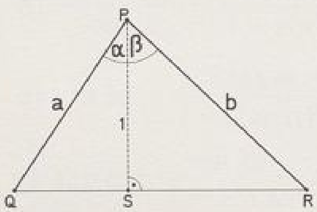
$$\overline{CH_a} = \overline{CF} - \overline{FB} \quad \text{und} \quad \cos\gamma = \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

c) Folgere aus **b)**: $1 - \cos\gamma = 2\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2.$

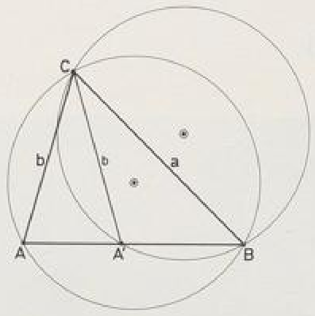
d) Verlängere den Schenkel [BC] über C hinaus bis D, sodass $\overline{BC} = \overline{CD}$ ist.
Beweise mit Hilfe des Dreiecks AH_aD: $1 + \cos\gamma = 2\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2.$

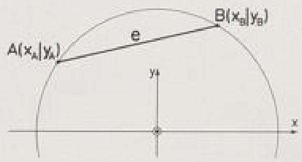
22. ADDITIONSTHEOREM UND DREIECKFLÄCHE
Berechne die Flächen der Dreiecke PQS, PSR und PQR. Folgere das Additionstheorem des Sinus aus

Fläche (PQR) = Fläche (PQS) + Fläche (PSR).



23. ADDITIONSTHEOREM UND UMKREIS
Begründe mit der Sehnenformel, dass die Umkreise der Dreiecke ABC und A'BC gleichen Radius haben. Folgere aus dem Projektionssatz $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$ und aus der Sehnenformel das Additionstheorem des Sinus.





24. ADDITIONSTHEOREM UND KOSINUSSATZ
Berechne e einmal mit der Formel $e^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ und einmal mit dem Kosinussatz. Folgere daraus das Additionstheorem des Kosinus.

25. **a)** Zeige: Für den Flächeninhalt F des Vierecks ABCD gilt

$$F = \frac{1}{2}(ad\sin\alpha + bc\sin\gamma).$$

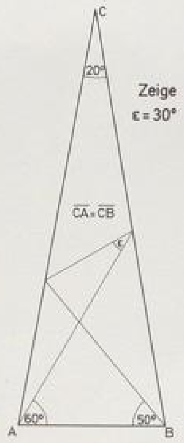
b) Begründe mit **a)** die Flächenformel »HERON fürs Viereck«

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2},$$

s ist der halbe Viereckumfang.
(*Tipp:* Kosinussatz für Teildreiecke)

26. Warum hat das Sehnenviereck unter allen Vierecken mit den Seitenlängen a, b, c und d den größten Flächeninhalt?
(*Tipp:* vorige Aufgabe)

27.



Gleichungen Bestimme die Lösungsmengen in $[0; 2\pi[$

1. a) $192(\sin x)^2 + 128 \sin x = 75$ b) $100(\cos x)^2 + 75 \sin x = 114$

2. a) $\sin x = \sin 2x$ b) $\frac{1}{4} \sin 2x - \sin x = 0$

   c) $4 \sin x \cos x = -\sqrt{2}$ d) $\tan 2x + \tan x = 0$

   e) $\cos x - \cos 2x = 1$

3. a) $\sin x + \cos 2x = 1$ b) $\cos x + \cos 2x = 1$

   c) $\sin 2x + 2(\cos x)^2 = 1$

•4. a) $\sin x + \cos x = 0{,}8$ b) $8 \sin x + 9 \cos x = 12$

   c) $8 \sin x - 9 \cos x = 12$

5. a) $(\sin x)^2 + 2 \sin 2x = 3(\cos x)^2$

   b) $(\cos x)^2 + 3 \cos 2x = (\sin x)^2$

   c) $24(\cos x)^2 - 12(\sin x)^2 = \sin 2x$

   d) $6(\sin x)^2 + 8(\cos x)^2 = 7 \sin 2x$

:6. a) $\sin x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ b) $\cos x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

7. a) $15 \cos x = 16 \tan x$ b) $6 \sin 2x - 3 \tan x = 5 \sin x$

:8. a) $\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{\tan x}{\tan 2x} = 2$ b) $2\frac{\tan x}{\tan 2x} + 12\frac{\tan 2x}{\tan x} + 11 = 0$

9. a) $\sin 11x = \sin 5x$ b) $\cos 13x = \cos 5x$

   :c) $\sin 7x = \cos 3x$ d) $\tan 15x = \tan 9x$

   e) $\sin 5x - \sin 3x = \cos 9x - \cos 7x$

10. a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

    b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

11. a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

    :b) $\cos x - \cos 2x - \cos 3x - \cos 4x = 0$