Anschauliche Geometrie

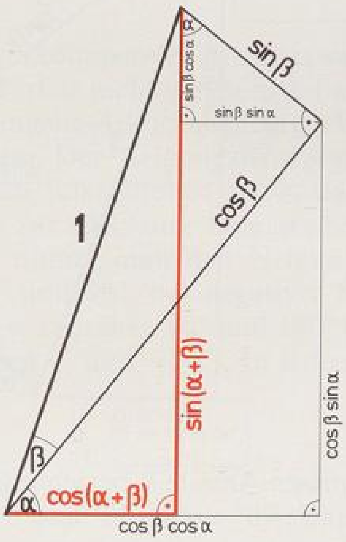
Barth, Friedrich

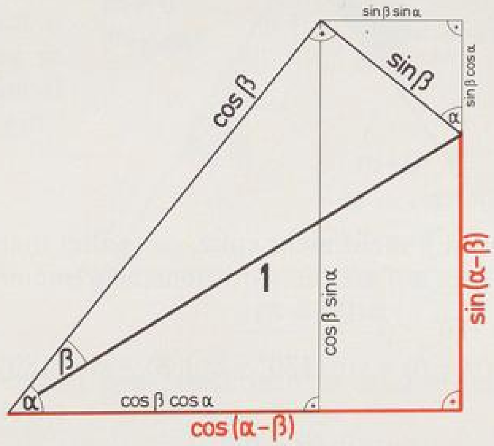
München, 1997

Additionstheoreme für sin, cos und tan - Doppelwinkelformeln - *Halbwinkelformeln - *Produkt-Summen-Formeln * Summen-Produkt-Formeln - *Goniometrische Gleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

Von manchen Winkeln kennen wir die exakten Sinuswerte, zum Beispiel ist $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Lässt sich der Sinus von $75° = 45° + 30°$ beziehungsweise $15° = 45° - 30°$ genau berechnen? Schön wäre es, wenn $\sin(45° + 30°)$ gleich $\sin 45° + \sin 30°$ wäre. Nun ist aber $\sin 45° + \sin 30° = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right) \approx 1{,}2$, das ist mehr als 1 – also kann's so einfach nicht gehen! Wir brauchen eine Formel, die einen Zusammenhang zwischen $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ herstellt.
Zunächst soll $\alpha + \beta < 90°$ und $\alpha \geqq \beta$ sein.
Wir tragen an einen Schenkel von α den Winkel β einmal nach außen und einmal nach innen so an, dass der neue Schenkel die Länge 1 hat: Jedesmal entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 1 und den Katheten $\sin \beta$ und $\cos \beta$.





Betrachten wir die Figur für $\alpha + \beta$. Beim Abtragen von β nach außen entsteht noch ein rechtwinkliges Dreieck mit derselben Hypotenuse 1, aber mit den (roten) Katheten $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$. Vom Endpunkt des gemeinsamen Schenkels der Länge $\cos \beta$ fällen wir die Lote auf die roten Katheten (beziehungsweise ihre Verlängerungen), zwei neue rechtwinklige Dreiecke entstehen: Das eine hat die Hypotenuse $\sin \beta$ und die Katheten $\sin \beta \sin \alpha$ und $\cos \beta \cos \alpha$. Ein Blick auf die Figur zeigt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$
und $$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\,.$$

Die Figur für $\alpha - \beta$ ist analog aufgebaut. Aus ihr lesen wir ab:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$
und $$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\,.$$

Dieser Beweis stimmt nur für $\alpha + \beta < 90°$ und $\alpha \geqq \beta$. Die vier Beziehungen aber gelten für beliebige Winkel, das heißt, α und β dürfen zum Beispiel auch negativ sein. Deshalb muss man sich bloß die Summenformeln merken. Man fasst sie zusammen als

Additionstheoreme für sin und cos

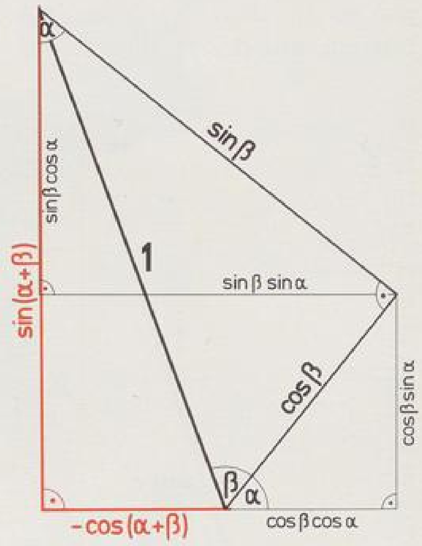
$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

Ein Beispiel zeigt den Beweis der Additionstheoreme für den Fall, dass α und β spitz sind $\alpha + \beta$ aber stumpf ist. Auch die dritte Figur ist analog der ersten aufgebaut, aus ihr liest man ab:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und $-\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$, das heißt

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$



Sind α und β nicht mehr spitz, so spaltet man die spitzen Anteile $\hat{\alpha}$ beziehungsweise $\hat{\beta}$ ab und wendet auf sie die Additionstheoreme an. Beispiel: $90° < \alpha < 180°$ und $0° < \beta < 90°$

$$\alpha = 180° - \hat{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(180° - \hat{\alpha} + \beta) = \sin\big(180° - (\hat{\alpha} - \beta)\big)\\
&\qquad\qquad \sin(180° - \varphi) = \sin\varphi\\
&= \sin(\hat{\alpha} - \beta)\\
&\qquad\qquad \text{Additionstheorem}\\
&= \sin\hat{\alpha}\cos\beta - \cos\hat{\alpha}\sin\beta\\
&\qquad\qquad \alpha = 180° - \hat{\alpha}\\
&= \sin(180° - \alpha)\cos\beta - \cos(180° - \alpha)\sin\beta\\
&\qquad\qquad \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi\\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \text{w. z. b. w.}
\end{aligned}$$

Jetzt endlich finden wir den genauen Wert von $\sin 75°$:

$$\begin{aligned}
\sin 75° &= \sin(45° + 30°)\\
&= \sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)
\end{aligned}$$

Auch für den Tangens gibt es ein Additionstheorem; wir leiten es aus den Additionstheoremen für sin und cos her:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\quad \text{kürzen mit}\quad \cos\alpha\cos\beta$$

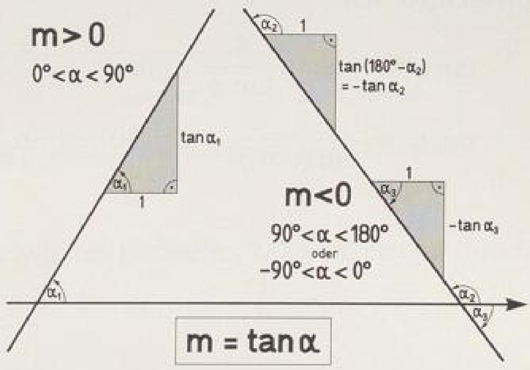
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Additionstheorem für tan

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

Alle darin vorkommenden Tangenswerte müssen definiert sein, das heißt, die Winkel α, β und $\alpha+\beta$ dürfen nicht gleich $\pi/2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ sein.
Mit dem Tangens-Additionstheorem berechnet man **Schnittwinkel** von Geraden im Koordinatensystem. Der Neigungswinkel α einer Gerade ist der Drehwinkel, um den man die x-Achse nach links drehen muss, damit sie mit der Gerade zur Deckung kommt: bei positiver Steigung m nimmt man den Neigungswinkel α zwischen 0° und 90°, bei negativer Steigung m nimmt man α zwischen 90° und 180° (manchmal auch zwischen 0° und −90°). In jedem Fall gilt

$$\boxed{m=\tan\alpha}$$



Der Schnittwinkel $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ zweier Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 errechnet sich so:

$$\tan\varphi=\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_2\tan\alpha_1}=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

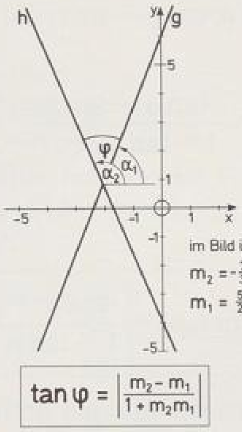
Beispiel: Die Geraden $g: y=\frac{5}{2}x+6$ und $h: y=-\frac{7}{3}x-4$ haben die Steigungen $m_1=\frac{5}{2}$ und $m_2=-\frac{7}{3}$

$$\tan\varphi=\frac{-\frac{7}{3}-\frac{5}{2}}{1-\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{2}}=\frac{-29}{-29}=1.$$

Die Geraden schneiden sich unter $\varphi=45°$.

Hätten wir m_1 und m_2 vertauscht, so hätte sich ergeben $\tan\varphi = -1$ und deshalb $\varphi = 135°$ beziehungsweise $\varphi = -45°$. Damit die Formel immer den spitzen Schnittwinkel liefert, unterdrücken wir solche Minuszeichen mit dem Betrag:

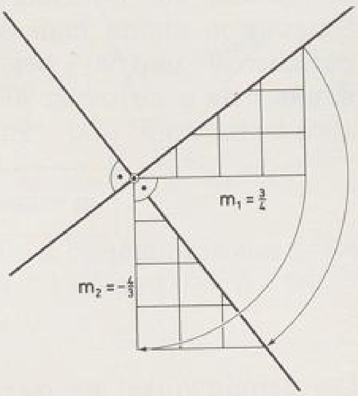
$$\boxed{\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right|}$$



Diese Formel klappt freilich nur, wenn der Nenner $1 + m_2 m_1$ ungleich null ist. Wenn er aber gleich null ist, dann gilt $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, das heißt, $\tan\alpha_2 = -\frac{1}{\tan\alpha_1}$. Wegen der Komplementformel

$$\tan(90° - \varphi) = \frac{1}{\tan\varphi} \quad \text{gilt}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{1}{\tan(-\alpha_1)} = \tan(90° - (-\alpha_1)) = \tan(90° + \alpha_1),$$



also unterscheiden sich α_1 und α_2 um 90°: Die Geraden stehen aufeinander senkrecht. Verwendet man den Kotangens, dann sieht man dies auch direkt:

$$\cot\varphi = \left|\frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1}\right| = 0, \quad \text{also ist } \varphi = 90°. \text{ Damit gilt}$$

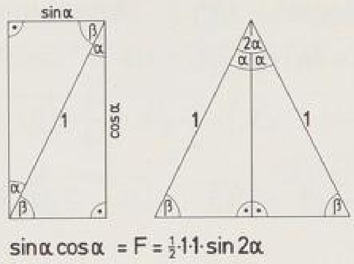
Ist eine Steigung m_2 der negative Kehrwert einer andern Steigung m_1, dann sind die zugehörigen Geraden g_1 und g_2 zueinander senkrecht.

$$\mathbf{m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow g_1 \perp g_2}$$

Aus den Additionstheoremen folgen viele weitere Formeln. Besonders wichtig sind die Doppelwinkel- und Halbwinkel-Formeln. Für $\alpha = \beta$ ergeben sich die

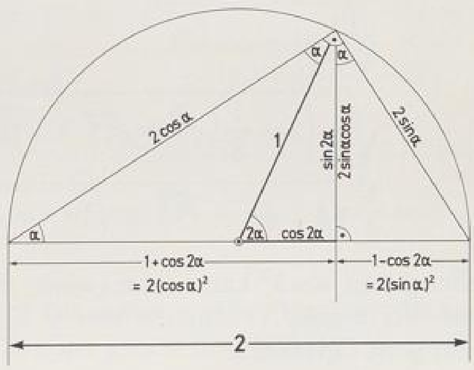
Doppelwinkel-Formeln

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha &= (\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2\\ &= 1-2(\sin\alpha)^2\\ &= 2(\cos\alpha)^2-1\\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2}\end{aligned}$$



Die erste Formel lässt sich einfach veranschaulichen.
Auch ein anderes Bild veranschaulicht einige der Doppelwinkel-Formeln. In einem Halbkreis (Radius 1) sehen wir ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α und der Hypotenuse 2. Der Radius 1 bildet mit der Hypotenuse den Winkel 2α (warum?). Mit den Beziehungen von Seite 108:

Gegenkathete = Hypotenuse mal Sinus



Ankathete = Hypotenuse mal Kosinus

lesen wir ab: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$1+\cos 2\alpha = 2(\cos\alpha)^2$
$1-\cos 2\alpha = 2(\sin\alpha)^2$

Die Halbwinkel-Formeln folgen aus den Doppelwinkel-Formeln: Man ersetzt α durch $\alpha/2$.

***Halbwinkel-Formeln**

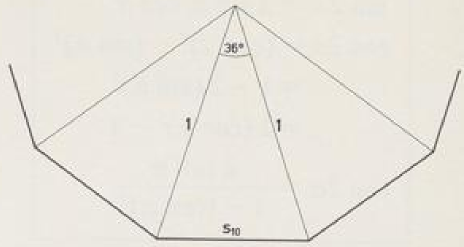
$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$$
$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$
$$\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Mit diesen Formeln lassen sich die exakten sin-, cos- und tan-Werte aller konstruierbaren Winkel mit ganzzahligem Gradmaß berechnen. Startwinkel sind 90° (Lot), 60° (gleichseitiges Dreieck) und 36° (Zehneck). Für sie gilt:

$\sin 90° = 1$	$\cos 90° = 0$	
$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$
$\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\cos 36° = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$	$\tan 36° = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

Den Kosinus des kleinsten dieser Winkel: cos 3° berechnen wir so:

$$
\begin{aligned}
\cos 6^\circ &= \cos(36^\circ - 30^\circ) \qquad \text{Additionstheorem anwenden}\\
&= \cos 36^\circ \cos 30^\circ + \sin 36^\circ \sin 30^\circ\\
&= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$



$s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\cos 36^\circ = \frac{1^2+1^2-s_{10}^2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$$
\begin{aligned}
\cos 3^\circ &= \cos\frac{6^\circ}{2} \qquad \text{Halbwinkel-Formel anwenden}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos 6^\circ\right)}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\right)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}
\end{aligned}
$$

Ausgehend von cos 3° kann man (wenn man will) mit den Summenformeln die sin-, cos- und tan-Werte aller Vielfachen von 3° berechnen, also aller konstruierbaren Winkel mit ganzzahligem Gradmaß.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
3°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)\left(2-\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}-2\sqrt{5}-4\right)\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2\right)$
6°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{15-6\sqrt{5}}-1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$
9°	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{4}\left(\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{4}\left(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)$	$\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
12°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{15+6\sqrt{5}}+1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)$	$\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}\right)$
15°	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
21°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{3}-2+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-2\sqrt{5}+4\right)\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\right)$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
24°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)\left(\sqrt{15-6\sqrt{5}}+1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right)$	$\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{3}\right)$ $=\frac{1}{2}\left(\sqrt{50+22\sqrt{5}}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$
27°	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2})\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)$ $=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$ $=\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
33°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{3}-2+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}-2\sqrt{5}-4)\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2\right)$
36°	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
39°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{3}+2-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)\left(2-\sqrt{3}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}(3\sqrt{3}-\sqrt{15}+2\sqrt{5}-4)\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\right)$
42°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{15+6\sqrt{5}}-1\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\right)$ $=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

Zwei Formelgruppen runden dieses Kapitel ab. In der ersten werden Produkte in Summen und Differenzen umgewandelt, in der zweiten Gruppe geht's umgekehrt.

Additionstheoreme I $\quad \sin(\gamma+\delta) = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta$

II $\quad \sin(\gamma-\delta) = \sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta$

I + II $\quad \sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta) = 2\sin\gamma\cos\delta \quad \| :2$

$$\sin\gamma\cos\delta = \frac{1}{2}[\sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta)]$$

Verwenden wir wieder α und β statt γ und δ, so ergibt sich die erste Gruppe:

***Produkt-Summen-Formeln**

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \end{aligned}}$$

Die unteren beiden Formeln ergeben sich, wenn man die Additionstheoreme für $\cos(\gamma+\delta)$ und $\cos(\gamma-\delta)$ addiert beziehungsweise subtrahiert.

Jetzt zur zweiten Gruppe: Aus den Additionstheoremen I und II von oben folgt

$$\text{I} + \text{II} \quad \sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta) = 2\sin\gamma\cos\delta \quad \boxed{A}$$

$$\text{I} - \text{II} \quad \sin(\gamma+\delta) - \sin(\gamma-\delta) = 2\cos\gamma\sin\delta \quad \boxed{B}$$

setze $\left.\begin{array}{l}\gamma+\delta=\alpha\\ \gamma-\delta=\beta\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}2\gamma=\alpha+\beta\\ 2\delta=\alpha-\beta\end{array}$ $\begin{array}{l}\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \delta=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{array}$

einsetzen in $\boxed{A}$ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

in $\boxed{B}$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

Durch ähnliche Umformungen ergeben sich Ausdrücke für $\cos\alpha + \cos\beta$ und $\cos\alpha - \cos\beta$.

***Summen-Produkt-Formeln**

$\mathbf{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$	$\mathbf{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$
$\mathbf{\sin\alpha + \sin\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$	$\mathbf{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

***Goniometrische Gleichungen**

Neben den algebraischen Termen wie $2x + 1$, x^2, $\sqrt{x}$, … haben wir jetzt auch trigonometrische Terme kennen gelernt wie $\sin x$, $\cos 2x$, $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Eine Gleichung heißt **goniometrisch,** wenn sie die Unbekannte x in mindestens einem trigonometrischen Term enthält. Wir beschränken uns vorläufig auf **rein-goniometrische** Gleichungen; das sind Gleichungen, bei denen die Unbekannte x nur in trigonometrischen Termen auftritt.
Beispiele rein-goniometrischer Gleichungen:

$\boxed{1}$ $(\tan x)^2 = \tan x$ $\boxed{2}$ $\cos 2x - \cos x = 0$

$\boxed{3}$ $3\sin x - 4\cos x = 0$ $\boxed{4}$ $3\sin x - 4\cos x = 5$

Beim Auflösen versucht man, auf eine Gleichung zu kommen, die nur noch einen trigonometrischen Term (womöglich an mehreren Stellen) enthält. Zum Umformen dienen die bisher abgeleiteten Formeln.

$\boxed{1}$ $(\tan x)^2 = \tan x$

Hier kommt nur $\tan x$ vor, zum Lösen genügt Algebra

$\tan x(\tan x - 1) = 0$, also $\tan x = 0$ oder $\tan x = 1$

$$\mathbf{x_{1k} = 0 + k\pi} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x_{2k} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$\boxed{2}$ $\cos 2x - \cos x = 0$

wir drücken $\cos 2x$ durch $\cos x$ aus

$[2(\cos x)^2 - 1] - \cos x = 0$

Substitution: $\cos x = z$

$$2z^2 - z - 1 = 0, \quad \text{also} \quad z = \frac{1 \pm 3}{4},$$

$$\text{also} \quad \cos x = 1 \quad \text{oder} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

Das ergibt drei Serien von Lösungen:

$\mathbf{x_{1k} = 0 + k \cdot 2\pi}$ oder

$\mathbf{x_{2k} = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi}$ oder

$\mathbf{x_{3k} = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi}$ jedesmal $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{3}$ $3 \sin x - 4 \cos x = 0$

solche Gleichungen sind mit einem Trick schnell erledigt: man dividiert durch $\cos x \neq 0$

$3 \tan x = 4$, oder $\tan x = \frac{4}{3}$,

$\mathbf{x_k = 0{,}927\ldots + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$

Für $\cos x = 0$ ergibt sich $\sin x = 0$, das kann aber nicht sein, weil sin und cos nicht gleichzeitig null sind.

$\boxed{4}$ $3 \sin x - 4 \cos x = 5$ — Wir drücken $\cos x$ mit $\sin x$ aus

$3 \sin x - 5 = 4 \cos x \quad \|^2$

$(3 \sin x - 5)^2 = 16(\cos x)^2$ — $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$

$9(\sin x)^2 - 30 \sin x + 25 = 16[1 - (\sin x)^2]$

$25(\sin x)^2 - 30 \sin x + 9 = 0$

$[5 \sin x - 3]^2 = 0$, also $\sin x = \frac{3}{5}$,

das ergäbe $x_{1k} = 0{,}643\ldots + k \cdot 2\pi$ (I. Quadrant)

oder $x_{2k} = 2{,}498\ldots + k \cdot 2\pi$ (II. Quadrant)

Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung!
Beim Auflösen können sich deshalb Ergebnisse einschleichen, die keine Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Also müssen wir die Probe machen; wir machen sie mit dem exakten Ergebnis $\sin x = 0{,}6$.

x kann im I. Quadranten liegen, dann gilt

$\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2} = 0{,}8$. Setzt man diesen Wert in die linke Seite der Gleichung ein, so ergibt sich

$3 \sin x - 4 \cos x = 1{,}8 - 3{,}2 = -1{,}4$

Wegen $-1{,}4 \neq 5$ gibt es keine Lösung im I. Quadranten.