Anschauliche Geometrie

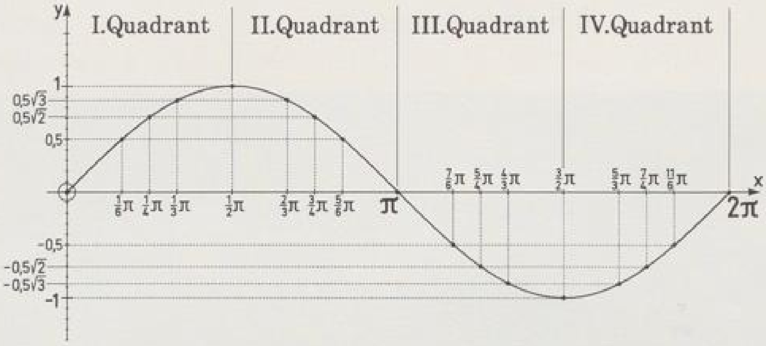
Barth, Friedrich

München, 1997

Sinuskurve - Kosinuskurve - Tangenskurve - Abwandlungen der Sinuskurve

Sinuskurve

Die Zuordnung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{sin\,x}$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert eine Funktion, die **Sinusfunktion.** Den Graphen der Sinusfunktion finden wir, wenn wir auf der x-Achse den Winkel im Bogenmaß und als y-Wert den zugehörigen Sinuswert abtragen.



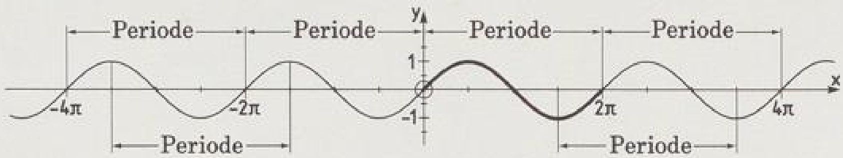
SIN-GRUNDFIGUR

Zuerst zeichnen wir den Graphen im Bereich $x \in [0; 2\pi]$, wir nennen ihn Grundfigur; dazu verwenden wir die vertrauten Werte:

Winkel x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Winkel x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	π
Sinuswert y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

							315°	330°	360°
Winkel x	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Sinuswert y	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

SINUSKURVE

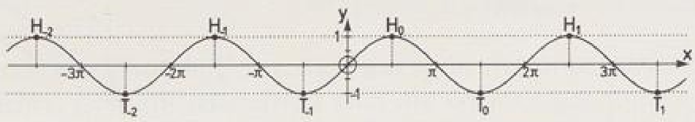


Wegen $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ wiederholen sich die Sinuswerte im Abstand 2π nach links und rechts, dieser Abstand heißt **Periode**; die Grundfigur wiederholt sich immer wieder, wenn man den Graphen für beliebige x-Werte zeichnet. Den Graphen für beliebige x-Werte nennen wir **Sinuskurve.** Die Sinuskurve hat die Periode 2π. Weil die Sinuswerte des I. Quadranten alle andern Werte bis aufs Vorzeichen festlegen, kommt das Kurvenstück für Winkel zwischen 0° und 90° immer wieder vor.

Der Taschenrechner arbeitet mit dem Teil der Sinuskurve, der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Als Lösung der Gleichung $\sin x = -\frac{1}{2}$ liefert er deswegen $x = -0{,}523\ldots$ (RAD) beziehungsweise $x = -30°$ (DEG).

Eigenschaften der Sinuskurve
- Periode 2π
- Punktsymmetrie zum Ursprung [wegen $\sin(-x) = -\sin x$]
- Nullstellen $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Hochpunkte $\left(\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \mid 1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Tiefpunkte $\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \mid -1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Wertemenge $W = [-1; +1]$

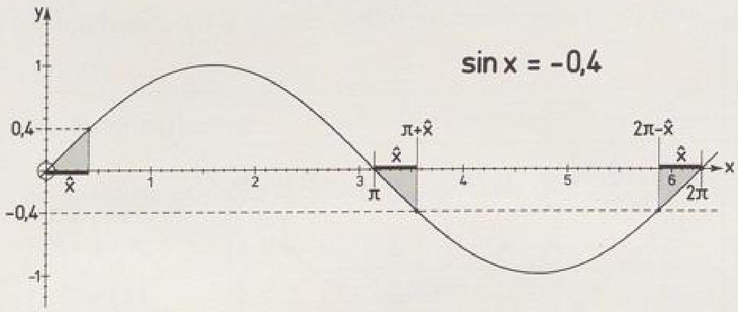
Hochpunkte $H_k(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi \mid 1)$



Tiefpunkte $T_k(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi \mid -1)$ $k \in \mathbb{Z}$

Die Sinuskurve kann beim Lösen goniometrischer Gleichungen oder Ungleichungen recht hilfreich sein. Beispiele:

[1] **$\sin x = -0{,}4$ $x \in [0; 2\pi[$**
Die Lösung von $\sin \hat{x} = 0{,}4$ finden wir mit dem Taschenrechner: $\hat{x} = 0{,}411\ldots$
Der Grundfigur entnehmen wir $\mathbf{x_1 = \pi + \hat{x} = 3{,}553\ldots}$
$\mathbf{x_2 = 2\pi - \hat{x} = 5{,}871\ldots}$



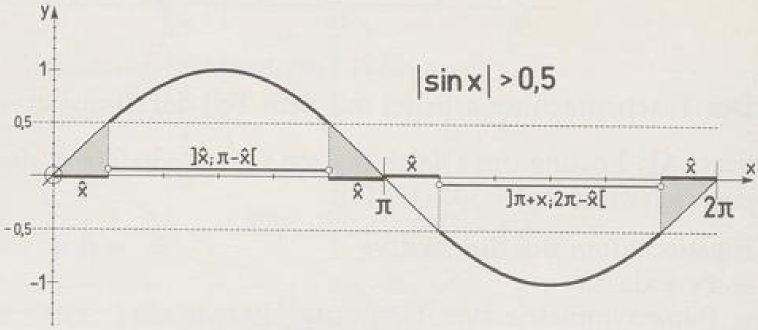
$\boxed{2}$ $|\sin x| > \frac{1}{2} \qquad x \in [0; 2\pi[$

das heißt $\sin x > \frac{1}{2}$ oder $\sin x < -\frac{1}{2}$

Der Grundfigur entnehmen wir $\frac{1}{6}\pi < x < \frac{5}{6}\pi$

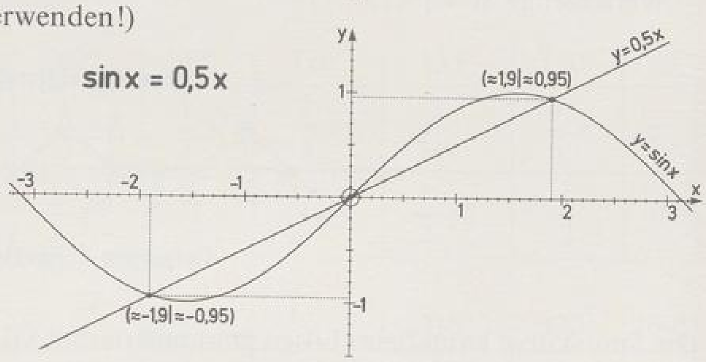
oder

$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$



$\boxed{3}$ $\sin x = \frac{1}{2}x$

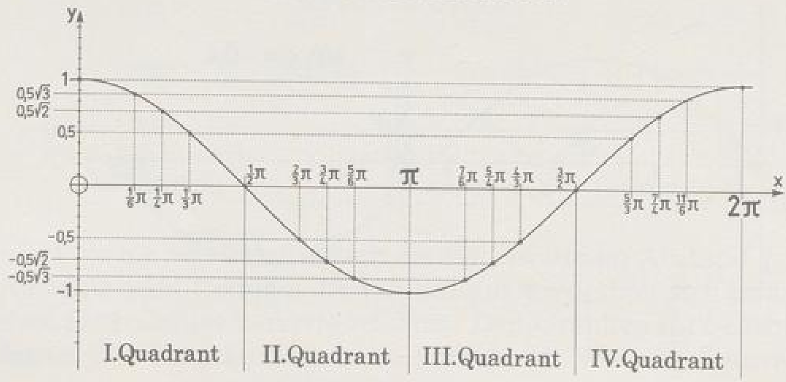
Solche gemischt goniometrischen Gleichungen lassen sich im Allgemeinen nur näherungsweise lösen. Wir suchen also eine grafische Näherungslösung: die x-Werte der Schnittpunkte von Sinuskurve und Ursprungsgerade $y = \frac{1}{2}x$. Aus der möglichst genauen Zeichnung (Schablone verwenden!) liest man ab
$x = 0$ (exakt) oder $x \approx \pm 1{,}9$.



Kosinuskurve

Die Zuordnung $x \mapsto \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert eine Funktion, die **Kosinusfunktion.** Den Graphen der Kosinusfunktion finden wir, wenn wir auf der x-Achse den Winkel im Bogenmaß und als y-Wert den zugehörigen Kosinuswert abtragen.

COS-GRUNDFIGUR

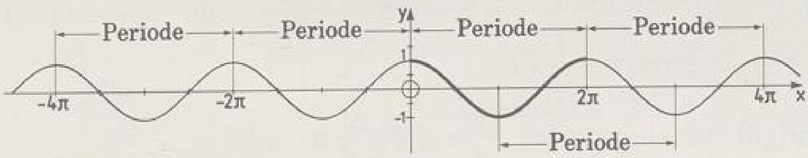


Zuerst zeichnen wir den Graphen im Bereich $x \in [0; 2\pi]$, wir nennen ihn Grundfigur; dazu verwenden wir die vertrauten Werte:

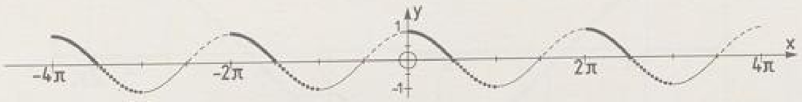
Winkel x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Winkel x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
Kosinuswert y	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

Winkel x	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Winkel x	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Kosinuswert y	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

KOSINUSKURVE

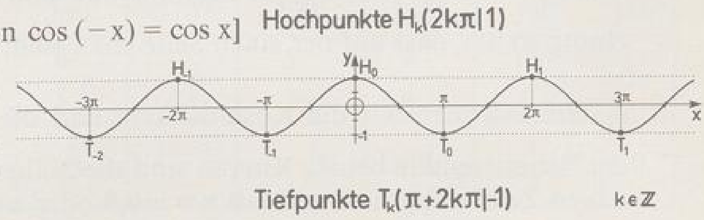


Wegen $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ wiederholen sich auch die Kosinuswerte im Abstand von 2π nach links und rechts; deshalb wiederholt sich die Grundfigur immer wieder, wenn man den Graphen für beliebige x-Werte zeichnet. Den Graphen für beliebige x-Werte nennen wir **Kosinuskurve.** Wie die Sinuskurve hat auch die Kosinuskurve die Periode 2π. Weil die Kosinuswerte des I. Quadranten alle andern Werte bis aufs Vorzeichen festlegen, kommt das Kurvenstück für Winkel zwischen 0° und 90° immer wieder vor.



Der Taschenrechner arbeitet mit dem Teil der Kosinuskurve, der zwischen 0 und π liegt. Als Lösung der Gleichung $\cos x = -\frac{1}{2}$ liefert er deswegen $x = 2{,}094\ldots$ (RAD) beziehungsweise $x = 120°$ (DEG).

Eigenschaften der Kosinuskurve
- Periode 2π
- Symmetrie zur y-Achse [wegen $\cos(-x) = \cos x$]
- Nullstellen $\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Hochpunkte $(k \cdot 2\pi \mid 1)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Tiefpunkte $(\pi + k \cdot 2\pi \mid -1)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Wertemenge $W = [-1; +1]$



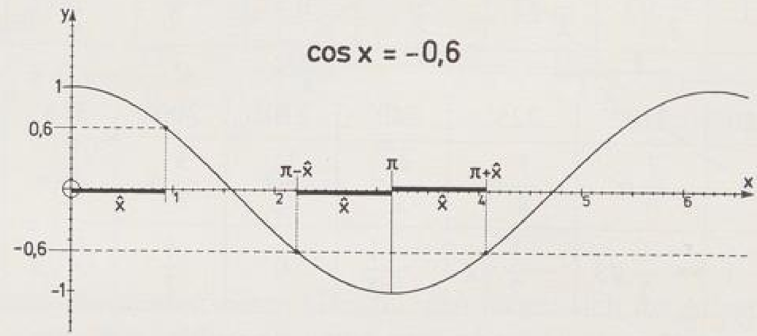
Die Kosinuskurve kann beim Lösen goniometrischer Gleichungen oder Ungleichungen recht hilfreich sein. Beispiele:

$\boxed{1}$ $\mathbf{\cos x = -0{,}6 \qquad x \in [0;\, 2\pi[}$

Die Lösung von $\cos \hat{x} = 0{,}6$ finden wir mit dem Taschenrechner: $\hat{x} = 0{,}927\ldots$

Der Grundfigur entnehmen wir $\mathbf{x_1 = \pi - \hat{x} = 2{,}214\ldots}$

$\mathbf{x_2 = \pi + \hat{x} = 4{,}068\ldots}$

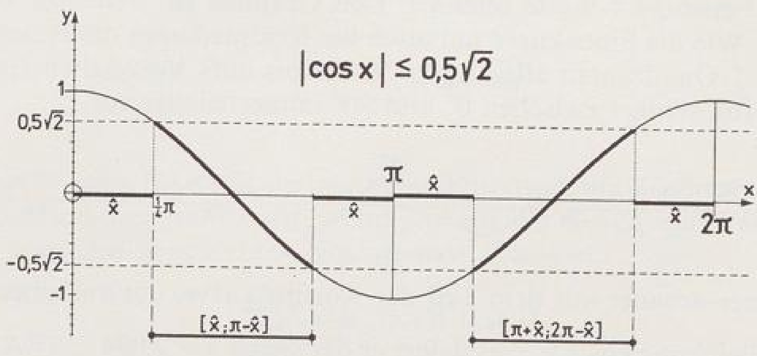


$\boxed{2}$ $\mathbf{|\cos x| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad x \in [0;\, 2\pi[}$

das heißt $-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leqq \cos x \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

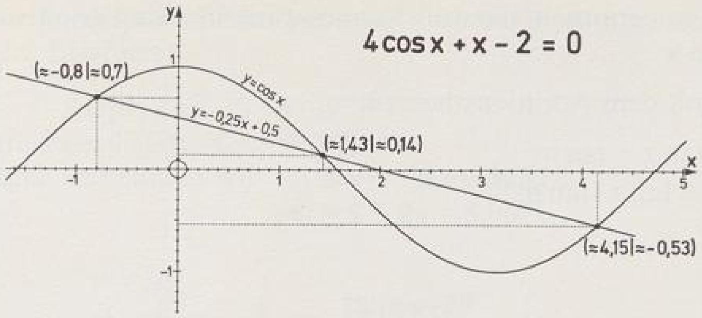
Der Grundfigur entnehmen wir $\mathbf{\frac{1}{4}\pi \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi}$ oder

$\mathbf{\frac{5}{4}\pi \leqq x \leqq \frac{7}{4}\pi}$



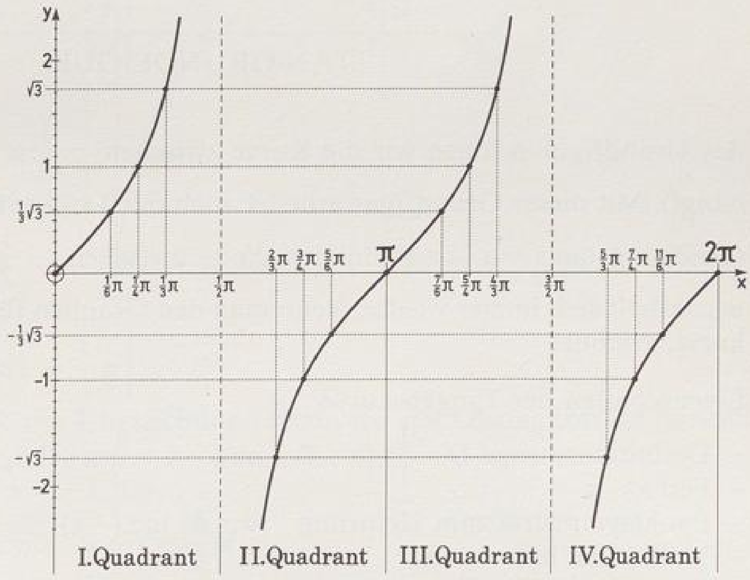
$\boxed{3}$ $\mathbf{4\cos x + x - 2 = 0}$

Bei dieser goniometrischen Gleichung suchen wir eine grafische Näherungslösung: Um zu wissen, womit wir die Kosinuslinie zum Schnitt bringen, formen wir die Gleichung so um, dass auf der einen Seite $\cos x$ steht: $\cos x = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$. Ins Koordinatensystem zeichnen wir die Kosinuskurve und die Gerade $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$. Die x-Werte der Schnittpunkte beider Kurven sind die Näherungslösungen. Aus der möglichst genauen Zeichnung liest man ab $\mathbf{x \approx -0{,}8}$ oder $\mathbf{x \approx 1{,}43}$ oder $\mathbf{x \approx 4{,}15}$.



Tangenskurve

Die Zuordnung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{tan\,x}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ definiert eine Funktion, die **Tangensfunktion.** Den Graphen der Tangensfunktion finden wir, wenn wir auf der x-Achse den Winkel im Bogenmaß und als y-Wert den zugehörigen Tangenswert abtragen.



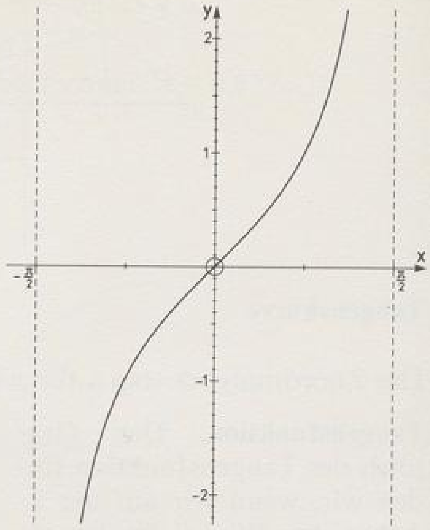
								150°	180°
Winkel x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
Tangenswert y	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Winkel x	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Winkel x	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Tangenswert y	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Die Wertetabelle lässt vermuten, dass die Tangensfunktion die Periode π hat. Tatsächlich gilt $\tan(x + \pi) = \tan x$

Das beweisen wir mit dem Additionstheorem

$$\tan(x + \pi) = \frac{\tan x + \tan \pi}{1 - \tan x \cdot \tan \pi} = \tan x$$

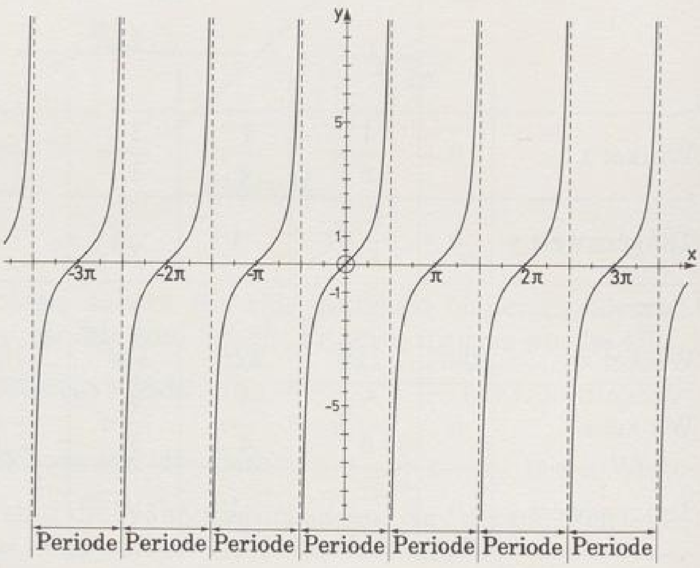


TAN-GRUNDFIGUR

Als Grundfigur nehmen wir die Kurve zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ (weil sie zusammenhängt). Mit dieser Grundfigur arbeitet auch der Taschenrechner. Er liefert als Lösung der Gleichung $\tan x = a$, $a \in \mathbb{R}$, immer Werte zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$. Die Grundfigur wiederholt sich immer wieder, wenn man den Graphen für beliebige x-Werte, die **Tangenskurve,** zeichnet.

Eigenschaften der Tangenskurve

- Definitionsmenge $D = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Periode π
- Punktsymmetrie zum Ursprung [wegen $\tan(-x) = -\tan x$]
- Nullstellen $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Wertemenge $W = \mathbb{R}$



TANGENSKURVE

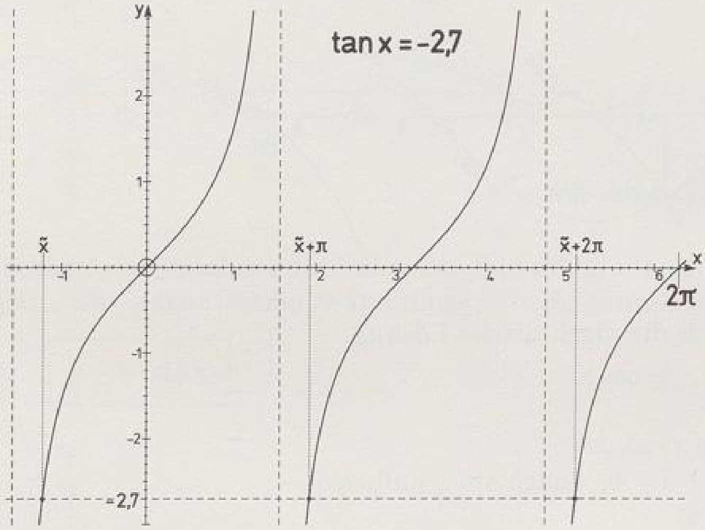
Die Tangenskurve kann beim Lösen goniometrischer Gleichungen oder Ungleichungen recht hilfreich sein. Beispiele:

[1] **$\tan x = -2{,}7 \qquad x \in [0; 2\pi[$**

Der Taschenrechner liefert: $\hat{x} = -1{,}216\ldots$

Der Grundfigur entnehmen wir $\mathbf{x_1 = \tilde{x} + \pi = 1{,}925\ldots}$

$\mathbf{x_2 = \tilde{x} + 2\pi = 5{,}067\ldots}$



[2] **$\tan x \geqq -3{,}14 \qquad x \in \left[-\frac{1}{2}\pi; +\frac{1}{2}\pi\right[$**

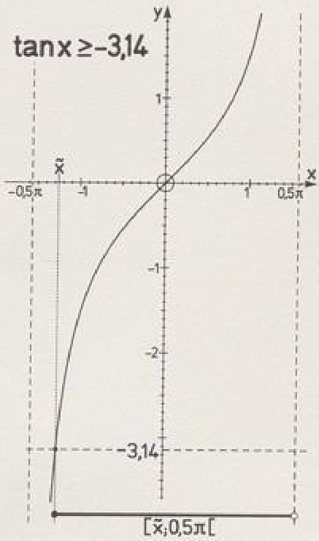
Wegen der Definitionsmenge der Ungleichung suchen wir die Lösung nur im Bereich der Grundfigur.

Der Taschenrechner liefert: $\tilde{x} = -1{,}262\ldots$

Der Grundfigur entnehmen wir $\mathbf{\tilde{x} \leqq x < \frac{1}{2}\pi}$

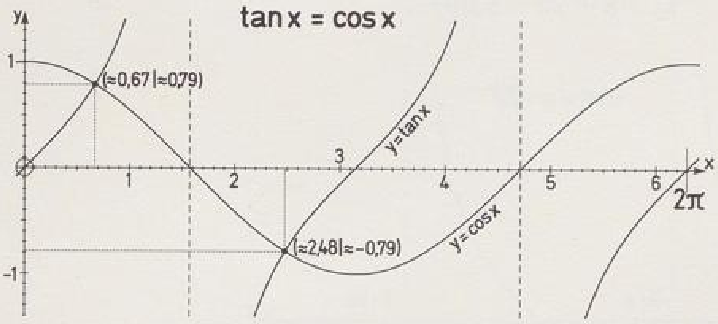
Nimmt man aber die größtmögliche Definitionsmenge, dann ergeben sich die Lösungsintervalle, wenn man zu den Grenzen ganzzahlige Vielfache von π (Periode!) addiert, zum Beispiel:

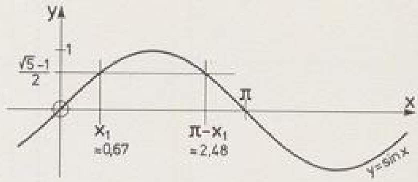
$$\left[\tilde{x} - \pi; -\frac{1}{2}\pi\right[\quad \text{oder} \quad \left[\tilde{x} + 2\pi; \frac{5}{2}\pi\right[$$



$\boxed{3}$ **$\tan x = \cos x$** $\quad$ **$x \in [0; 2\pi[$**

Diese rein goniometrische Gleichung lässt sich zwar auch algebraisch lösen, manchmal genügt aber eine grafische Näherungslösung: Lösungen sind die x-Werte der Schnittpunkte von Tangens- und Kosinuskurve. Aus der möglichst genauen Zeichnung liest man ab **$x \approx 0{,}67$** oder **$x \approx 2{,}48$.**





Zum Vergleich noch die algebraische Lösung:

$\tan x = \cos x \qquad \| \cdot \cos x$

$\sin x = (\cos x)^2$

$\sin x = 1 - (\sin x)^2$

$(\sin x)^2 + \sin x - 1 = 0, \quad$ nach $\sin x$ auflösen:

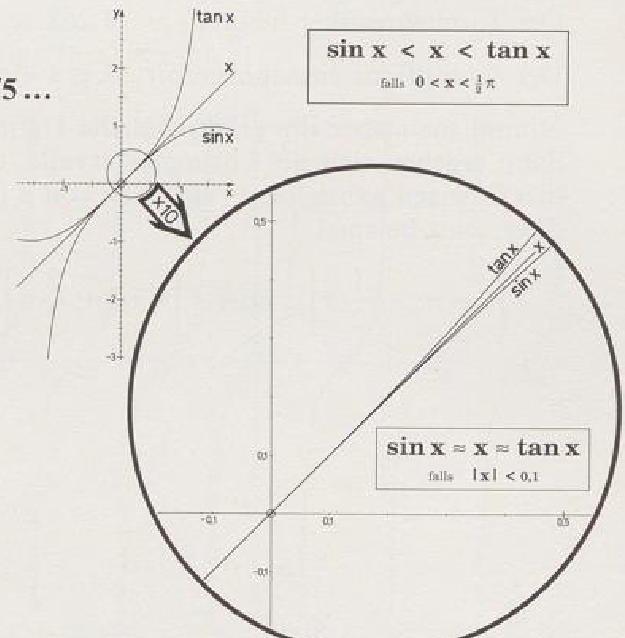
$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Der Wert $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62$ ist kleiner als -1, also unbrauchbar.

Die Lösungen von $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ sind:

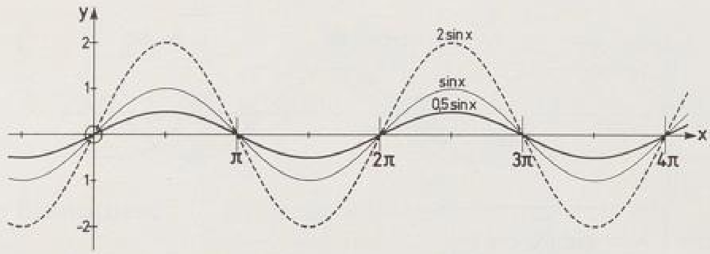
$x_1 = 0{,}666\ldots$ und **$x_2 = \pi - x_1 = 2{,}475\ldots$**

$\sin x < x < \tan x$
falls $0 < x < \frac{1}{2}\pi$



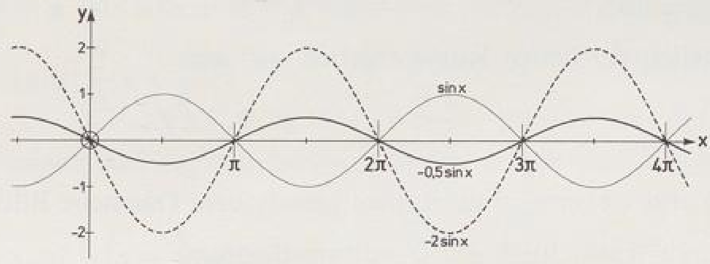
Abwandlungen der Sinuskurve

Bei den Parabeln gibt es eine Grundfigur: Die Normalparabel, sie hat die Gleichung $y = x^2$. Aus ihr erzeugt man andere Parabeln, indem man den Funktionsterm verändert. Die allgemeine Parabelgleichung lautet $y = a(x - b)^2 + c$. Der Faktor a verändert die Form (breit/schmal), bei negativem a ist die Parabel an der x-Achse gespiegelt.



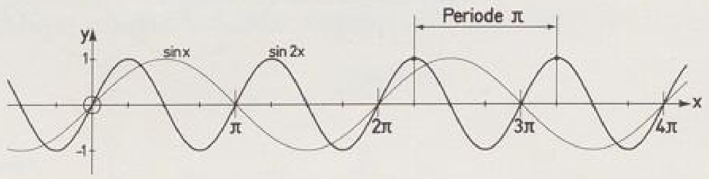
Der Summand b schiebt nach rechts oder links, der Summand c nach oben oder unten. Wir untersuchen jetzt, was solche Termabwandlungen für die Sinuskurve bedeuten.

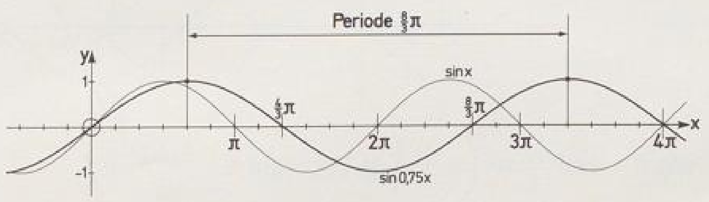
Faktor bei sin: $\boxed{y = a \cdot \sin x}$



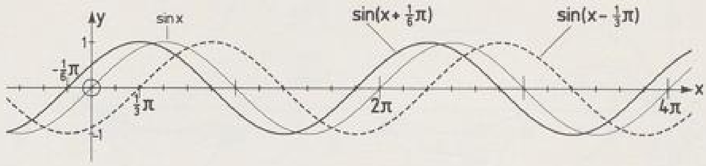
Alle y-Werte der Sinuskurve werden mit dem Faktor a multipliziert. Dadurch wird die Sinuskurve in y-Richtung gestaucht ($|a| < 1$) oder gestreckt ($|a| > 1$), bei negativem a ist sie an der x-Achse gespiegelt.

Faktor bei x: $\boxed{y = \sin bx}$ $\quad b > 0$





Die Nullstellen der neuen Kurve ergeben sich aus $bx = k\pi$ zu $x = \frac{1}{b}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alle x-Werte der Sinuskurve werden mit $\frac{1}{b}$ multipliziert, die neue Periode ist also $\frac{2\pi}{b}$. Für $b > 1$ ist die Sinuskurve in x-Richtung gestaucht, für $0 < b < 1$ ist sie in x-Richtung gestreckt. Bei negativem b kann man wegen $\sin(-x) = -\sin x$ den Faktor (-1) ausklammern.



Summand bei x: $\boxed{\mathbf{y = \sin(x + c)}}$

Die Nullstellen der neuen Kurve ergeben sich aus $x + c = k\pi$ zu $x = k\pi - c$, $k \in \mathbb{Z}$. Von allen x-Werten der Sinuskurve wird c subtrahiert, das heißt, die Sinuskurve verschiebt sich um $-c$ in x-Richtung. Bei positivem c haben wir eine Verschiebung um c nach links, bei negativem c eine Verschiebung um $|c|$ nach rechts.

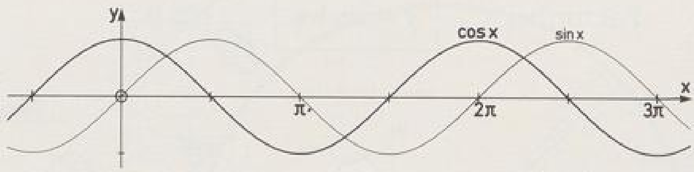
Beispiel: $y = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

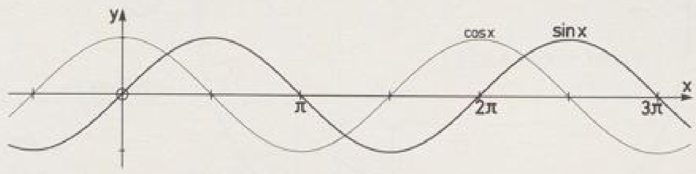
Die Nullstellen der neuen Kurve ergeben sich aus

$$x + \frac{1}{2}\pi = k\pi \quad \text{zu} \quad x = k\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + z\pi,\ k, z \in \mathbb{Z}.$$

Die Sinuskurve ist um $\frac{1}{2}\pi$ nach links verschoben. Das neue Bild erinnert an die Kosinuskurve. Tatsächlich gilt (Additionstheorem)

$$\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin x \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \cos x \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos x$$



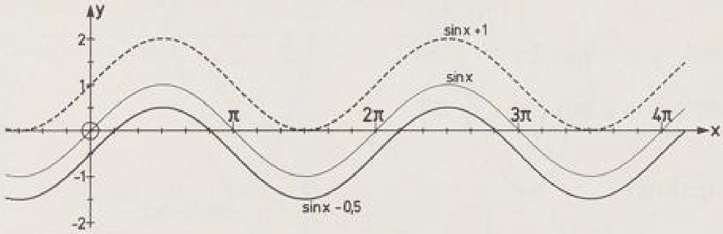


Allgemein gilt:

$$\mathbf{\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos x \quad und \quad \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = -\sin x}$$

Summand bei sin x: $\boxed{\mathbf{y = \sin x + d}}$

Zu allen y-Werten der Sinuskurve wird d addiert, das heißt, die Sinuskurve verschiebt sich um d in y-Richtung.



Allgemeine Sinuskurve: $\boxed{\mathbf{y = a \cdot \sin b\,(x + c)}}$

Die allgemeine Sinuskurve findet man durch schrittweises Abwandeln der Sinuskurve.

Die Periode ist $\frac{2\pi}{b}$.

Start ist die Nullstelle bei $x = -c$.

Die y-Werte liegen zwischen $-|a|$ und $|a|$. Bei negativem a muss an der x-Achse gespiegelt werden.

Bei der Kurve $\mathbf{y = a \cdot \sin b\,(x + c) + d}$ muss noch um d in y-Richtung verschoben werden.

Beispiel: $y = -3 \sin\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\pi\right)$

Die Periode und die Verschiebung finden wir, wenn wir den Faktor $\frac{3}{4}$ ausklammern

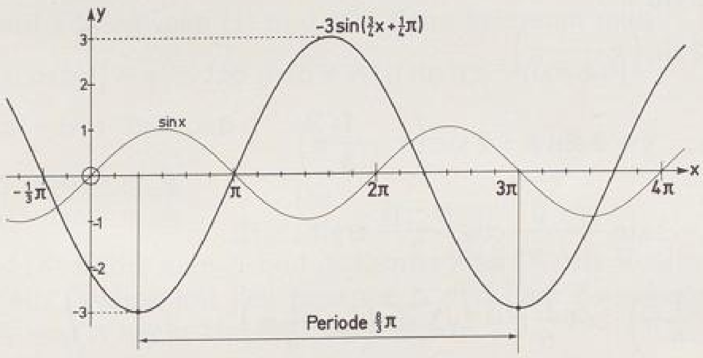
$$y = -3 \sin\frac{3}{4}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

Periode $\frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}\pi$

Startstelle: $x + \frac{1}{3}\pi = 0$, also Start bei $x = -\frac{1}{3}\pi$

y-Schwankung zwischen -3 und $+3$

Spiegelung an der x-Achse wegen des negativen Faktors bei sin x: $-3 < 0$



Überlagerung zweier allgemeiner Sinuskurven

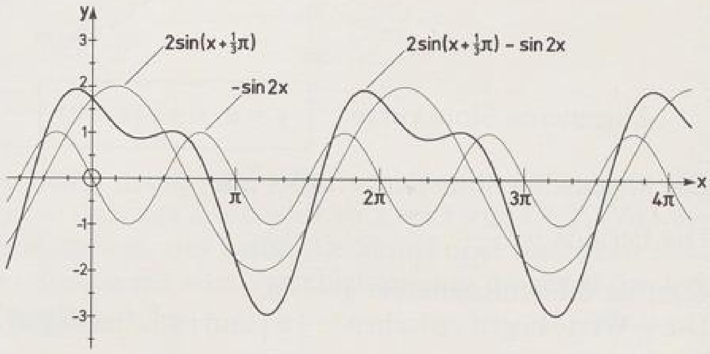
Man überlagert zwei Kurven, indem man bei jeder Stelle x die zugehörigen y-Werte addiert. Auch bei zwei Sinuskurven geht das so.
Beispiele:

1. Kurve: $y = -\sin 2x$

2. Kurve: $y = 2\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

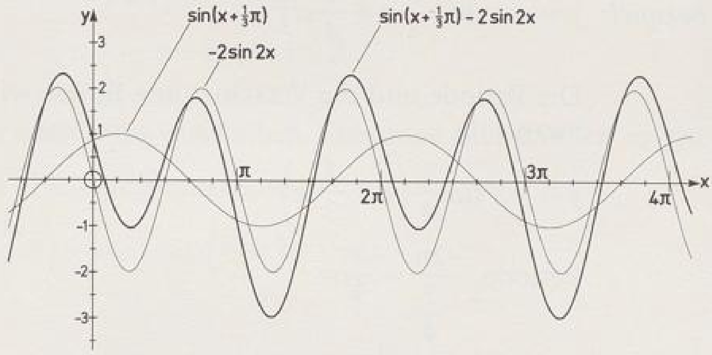
Überlagerungskurve:

$$y = -\sin 2x + 2\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$$



Eine kleine Abwandlung der beiden Kurventerme bewirkt eine große Änderung der neuen Kurve:

$$y = -2\sin 2x + \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right).$$



Manchmal können wir mit den Summenformeln den Term der Überlagerungskurve zusammenfassen:

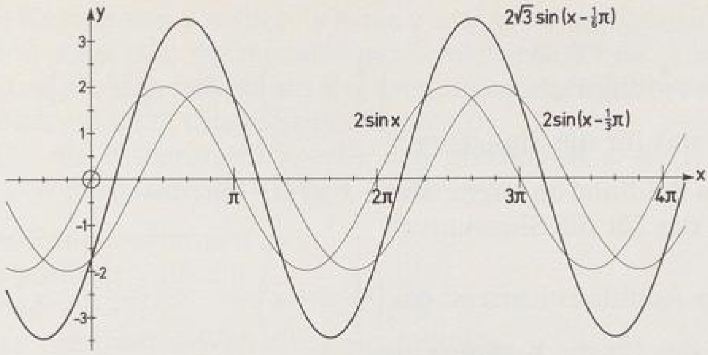
1. Kurve: $y = 2\sin x$

2. Kurve: $y = 2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

Überlagerungskurve: $y = 2\sin x + 2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

Wegen $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ergibt sich

$$y = 2\cdot 2\sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\cdot\cos\frac{1}{6}\pi = \mathbf{2\sqrt{3}\,\sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)}$$

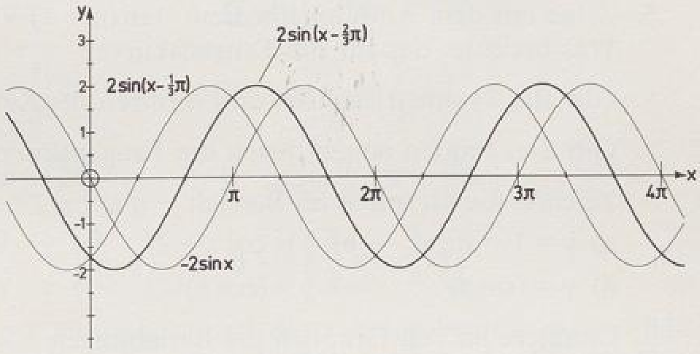


Ändert man bei der ersten Kurve das Vorzeichen im Term, so ergibt sich für die Überlagerungskurve:

$$y = -2\sin x + 2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) =$$

$$\mathbf{2\sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)}$$

Die Überlagerungskurve ist wieder eine allgemeine Sinuskurve.



Im vorigen Beispiel haben die beiden Summanden dieselbe Periode und denselben Faktor vor sin. Eine allgemeine Sinuskurve ergibt sich aber auch schon, wenn die beiden Summanden bloß dieselbe Periode haben. Wir zeigen das für die Periode 2π.

$a\sin x + b\sin(x + \delta) = A\sin(x + \Delta)$

Die Unbekannten A und Δ ergeben sich, wenn man auf beiden Seiten das Additionstheorem des Sinus anwendet:

$a\sin x + b\sin x\sin\delta + b\cos x\sin\delta = A\sin x\cos\Delta + A\cos x\sin\Delta$
$(a + b\cos\delta)\sin x + b\sin\delta\cos x = A\cos\Delta\sin x + A\sin\Delta\cos x$

Vergleicht man die Koeffizienten von $\sin x$ und von $\cos x$, dann ergibt sich

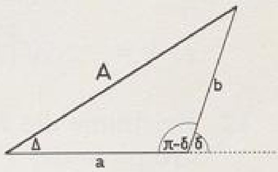
$b\sin\delta = A\sin\Delta \quad (I) \qquad$ und $\qquad a + b\cos\delta = A\cos\Delta \quad (II)$

Quadriert und addiert man (I) und (II), dann bekommt man

$b^2[\sin\delta)^2 + (\cos\delta)^2] + a^2 + 2ab\cos\delta = A^2[(\sin\Delta)^2 + (\cos\Delta)^2]$

also $\quad A^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\delta \qquad (K)$

Aus (I) folgt $\quad \dfrac{\sin\Delta}{\sin\delta} = \dfrac{b}{A} \qquad (S)$



Aus (K) und (S) findet man A und Δ. Deutet man (K) als Kosinussatz und (S) als Sinussatz für ein Dreieck mit den Seiten a, b und dem Zwischenwinkel $(\pi - \delta)$, dann kann man A und Δ leicht konstruieren.