Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

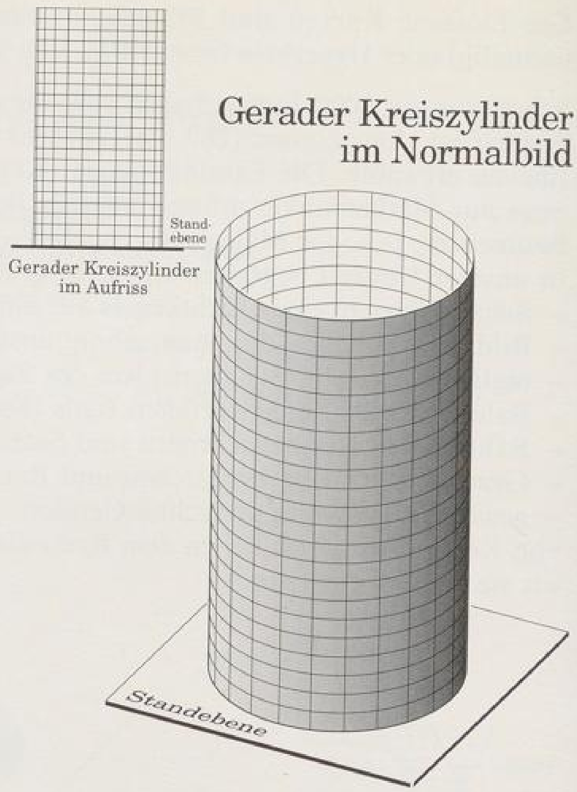
I. Die Ellipse

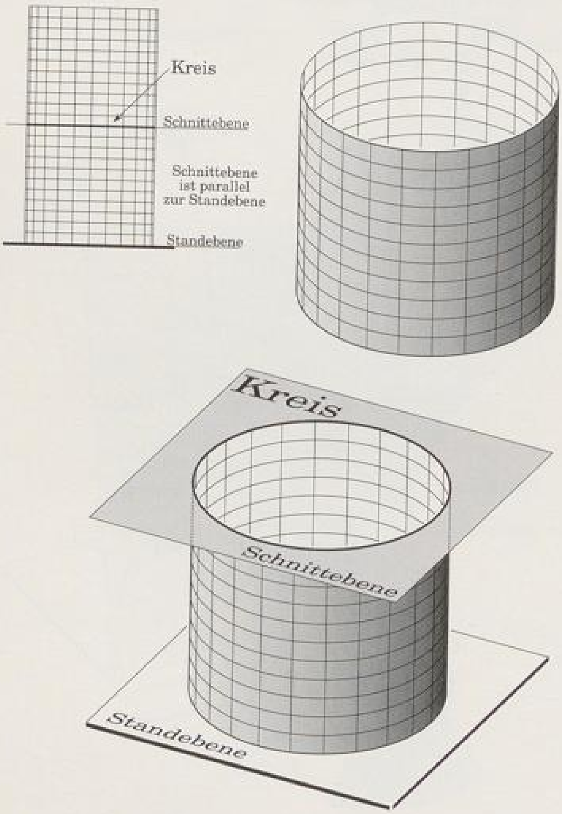
urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

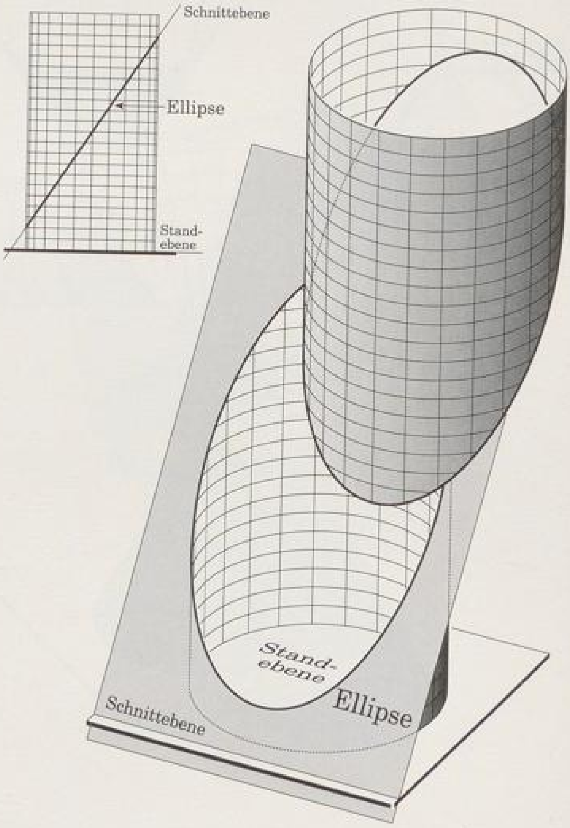
I. Die Ellipse

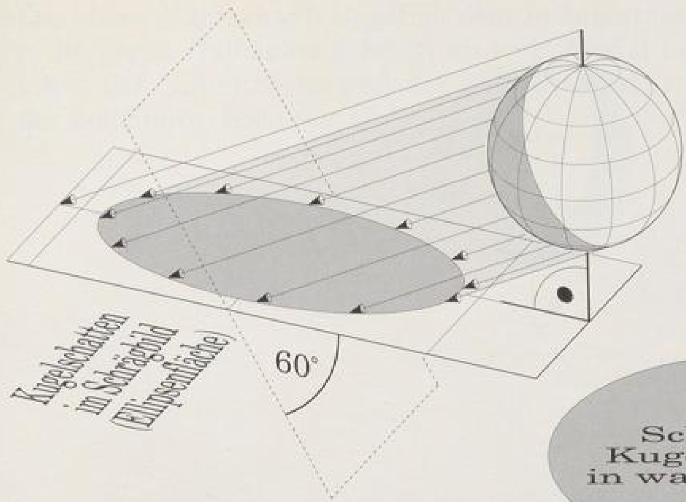
1. Die Ellipse als Zylinderschnitt

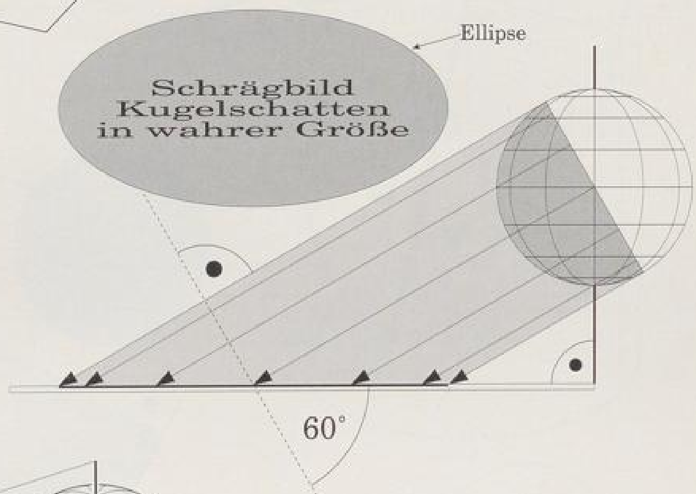
Kreis und Ellipse entstehen auch, wenn eine Ebene einen geraden Kreiszylinder schneidet. Steht die Schnittebene senkrecht auf der Zylinderachse und damit auf jeder Mantellinie, so entsteht ein Kreis; bei einem endlichen Zylinder ist die Schnittebene dann parallel zur Standebene. Ein schräger Schnitt liefert eine Ellipse. Auch der Schattenbereich einer Kugel im Parallellicht ist ein Kreiszylinder. Trifft der Schatten auf eine ebene Wand, so entsteht je nach Auftreffwinkel ein Kreis oder eine Ellipse.

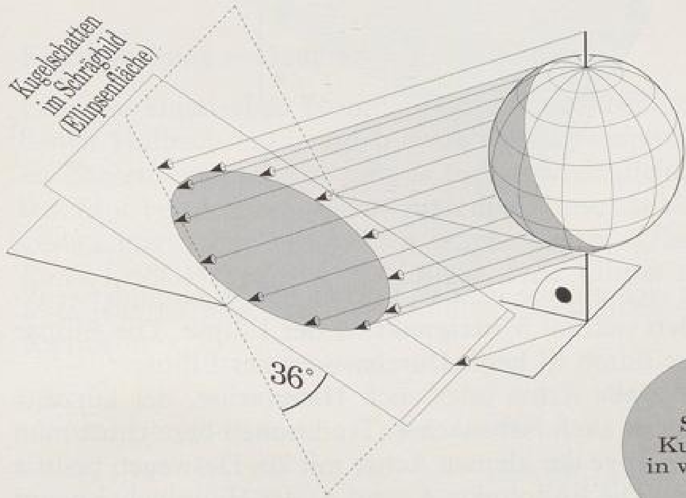


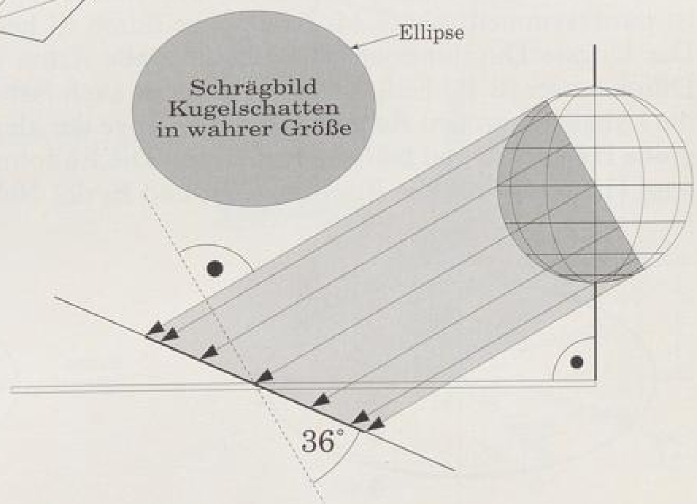


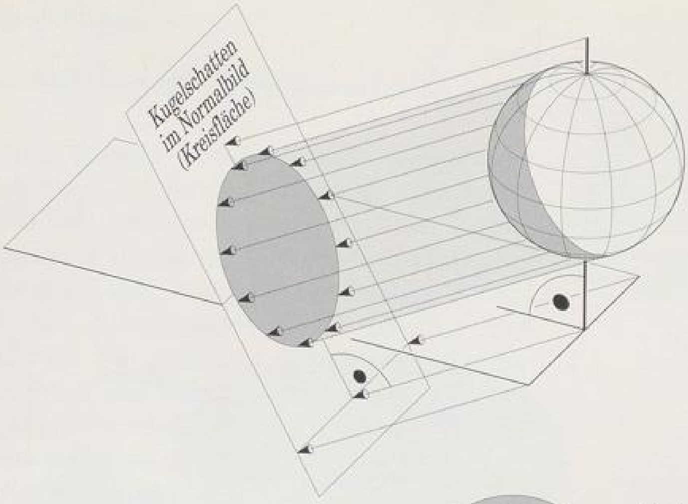


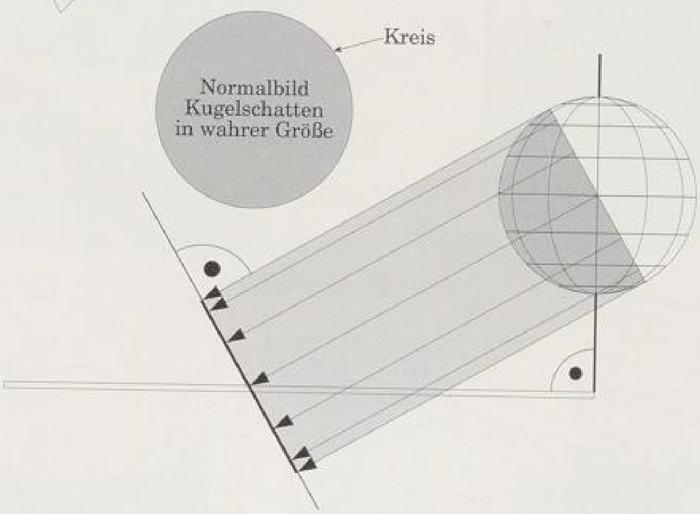

Kugelschatten
im Schrägbild
(Ellipsenfläche)
60°


Ellipse
Schrägbild
Kugelschatten
in wahrer Größe
60°

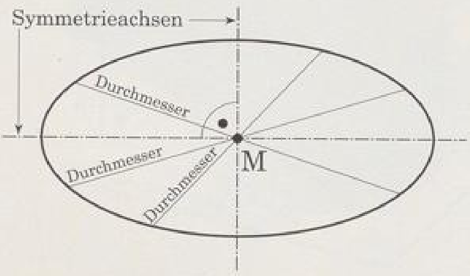

Kugelschatten
im Schrägbild
(Ellipsenfläche)
36°

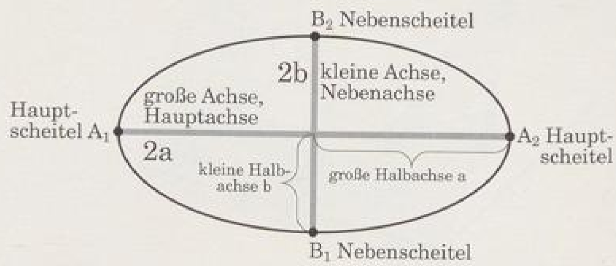

Ellipse
Schrägbild
Kugelschatten
in wahrer Größe
36°





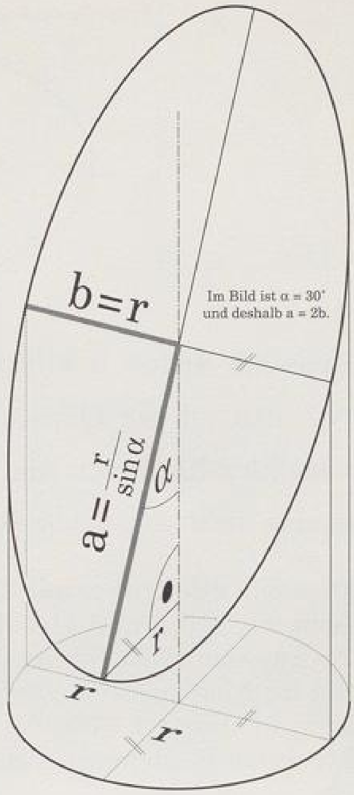
Die Symmetrie des Zylinders überträgt sich auf die Ellipse. Sie hat zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, diese schneiden sich im **Mittelpunkt M** der Ellipse. Die Ellipse ist punktsymmetrisch zu M. Jede Sehne durch M heißt **Durchmesser** der Ellipse.
Der längste Durchmesser $[A_1A_2]$ heißt **große Achse** oder auch **Hauptachse**, der kürzeste Durchmesser $[B_1B_2]$ heißt **kleine Achse** oder auch **Nebenachse**. Traditionell bezeichnet man die Länge der großen Achse mit 2a, die Länge der kleinen Achse mit 2b. Deswegen heißt **a große Halbachse** und **b kleine Halbachse**. Die Endpunkte $\mathbf{A_1}$ und $\mathbf{A_2}$ der Hauptachse nennt man **Hauptscheitel**, die Endpunkte $\mathbf{B_1}$ und $\mathbf{B_2}$ der Nebenachse **Nebenscheitel**.





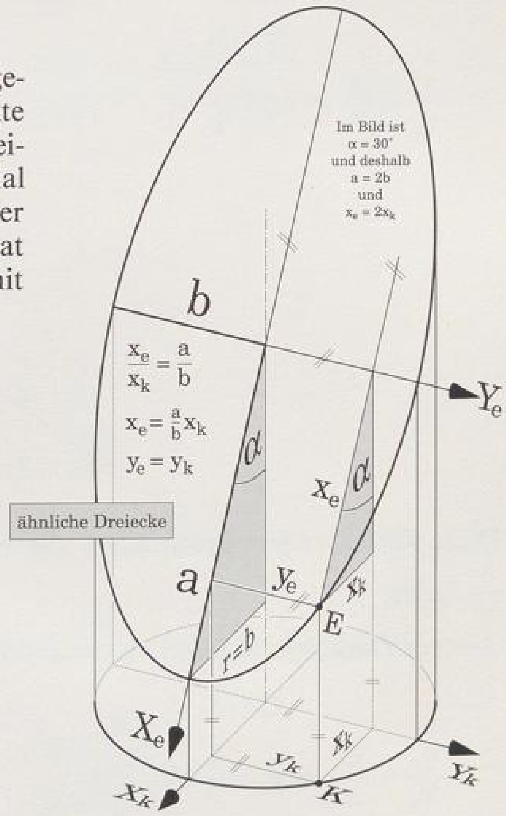
Die kleine Halbachse b ist gleich dem Zylinderradius r, die große Halbachse a hängt ab vom Winkel zwischen der Schnittebene und der Zylinderachse. Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$b = r \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{r}{a} \quad \text{also} \quad a = \frac{r}{\sin\alpha}$$

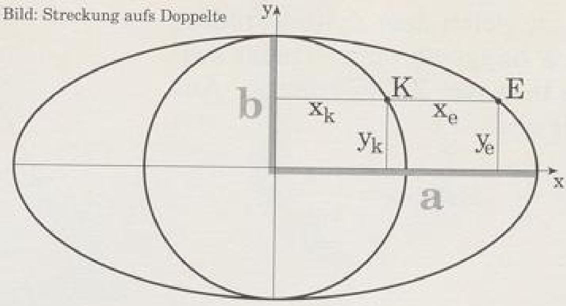


Kreisstreckung – Hauptkreis-Konstruktion

Eine der klassischen Grundaufgaben ist es, bei gegebenen Halbachsen a und b einzelne Ellipsenpunkte zu konstruieren. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine beruht darauf, dass man die Ellipse als axial gestauchten oder gestreckten Kreis deutet. Dieser Kreis heißt **Hauptkreis** der Ellipse. Jede Ellipse hat zwei Hauptkreise: einen mit Radius a und einen mit Radius b.



Im Bild: Streckung aufs Doppelte

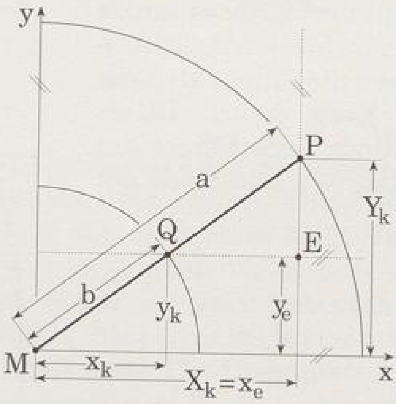


Der Kreis mit Radius b wird in x-Richtung aufs $\frac{a}{b}$-fache gestreckt – der Kreispunkt $K(x_k|y_k)$ wird auf den Ellipsenpunkt $E(s_e|y_e)$ abgebildet. Diese Abbildung heißt **axiale Streckung** (in x-Richtung): Alle x-Werte sind mit dem Faktor $\frac{a}{b}$ multipliziert, die y-Werte ändern sich nicht. Die axiale Streckung ist von der zentrischen Streckung zu unterscheiden.

Die Streckung des Kreises mit Radius b zu einer Ellipse mit den Halbachsen a und b lässt sich auch mit Zirkel und Lineal einfach konstruieren. Sind a und b gegeben, so zeichnet man zwei konzentrische Kreise mit den Radien a und b. Einen Ellipsenpunkt $E(x_e|y_e)$ findet man so: Man zeichnet einen Radius, der den großen Kreis in $P(X_k|Y_k)$ und den kleinen Kreis in $Q(x_k|y_k)$ schneidet. Die Parallele zur x-Achse durch Q und die Parallele zur y-Achse durch P schneiden sich im Ellipsenpunkt E. Die Begründung lesen wir aus dem Bild ab.

$$y_e = y_k$$

$$\frac{x_e}{x_k} = \frac{a}{b} \Rightarrow x_e = \frac{a}{b} x_k$$

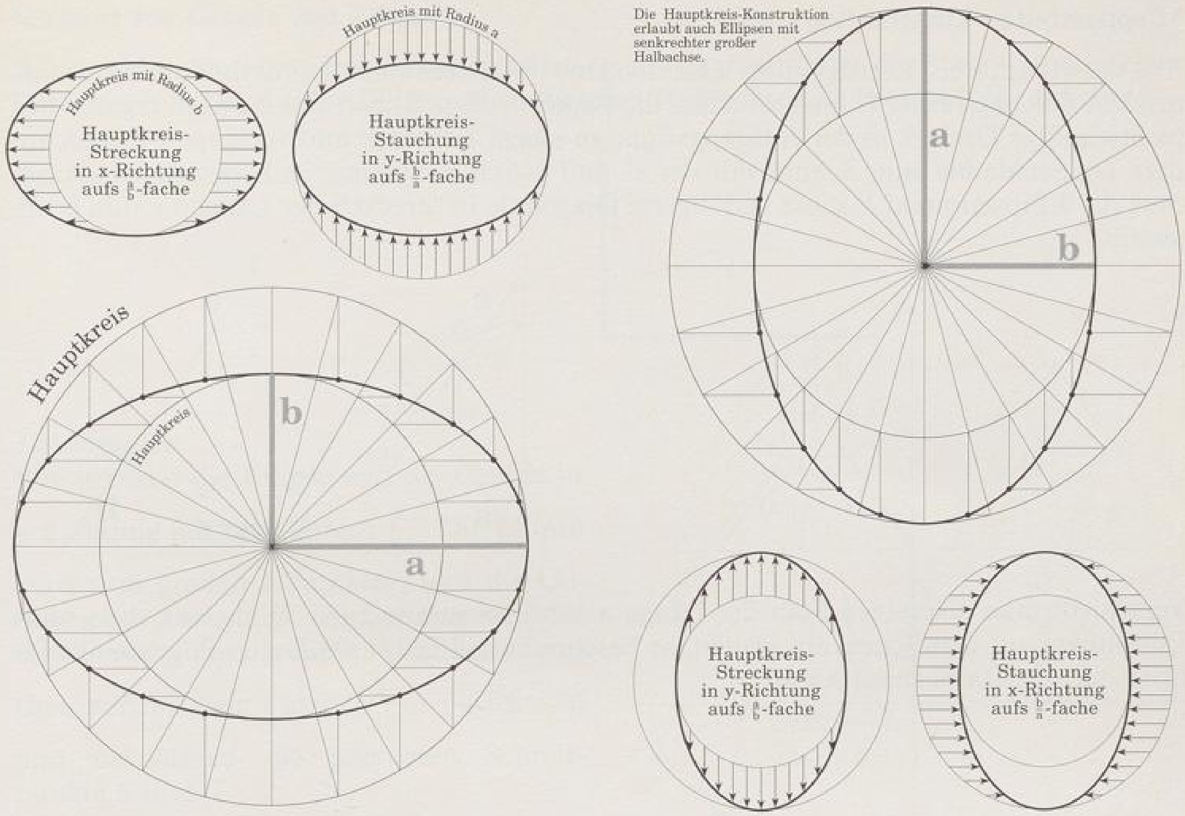


Diese Gleichungen beschreiben die Streckung des kleinen Kreises in x-Richtung aufs $\frac{a}{b}$-fache.

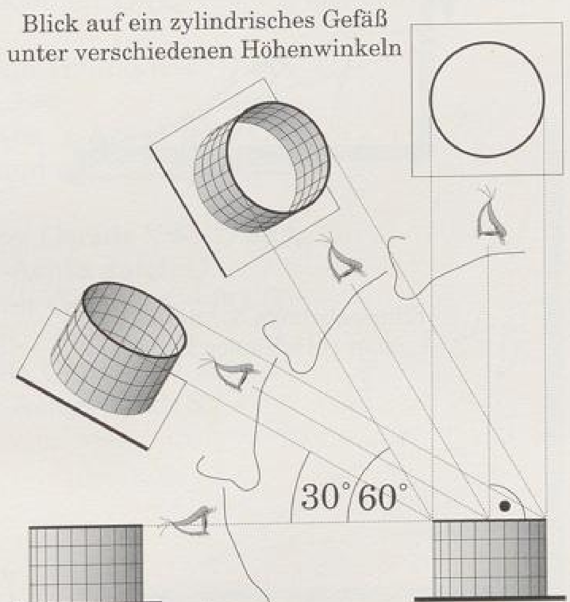
Andere Deutung: Stauchung des großen Kreises in y-Richtung aufs $\frac{b}{a}$-fache:

$$x_e = X_k$$

$$\frac{y_e}{Y_k} = \frac{b}{a} \Rightarrow y_e = \frac{b}{a} Y_k$$

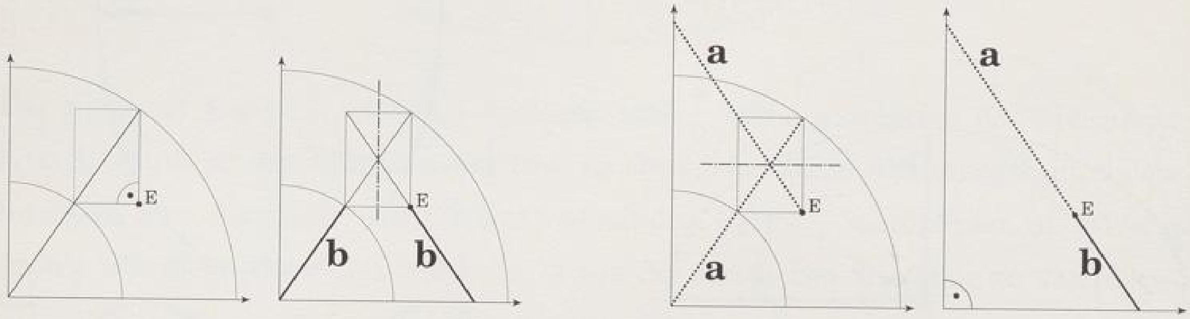


Die Streckung eines Kreises zur Ellipse beobachtet man am Schatten einer Kugel; die Stauchung eines Kreises zur Ellipse sieht man, wenn man aus verschiedenen Richtungen auf einen Kreis schaut.

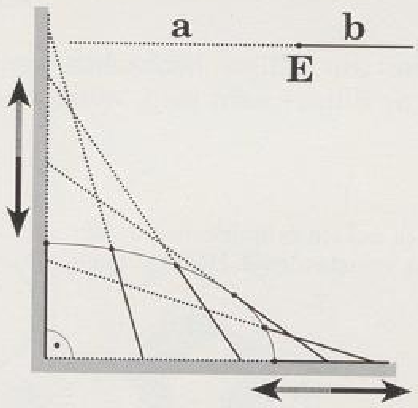


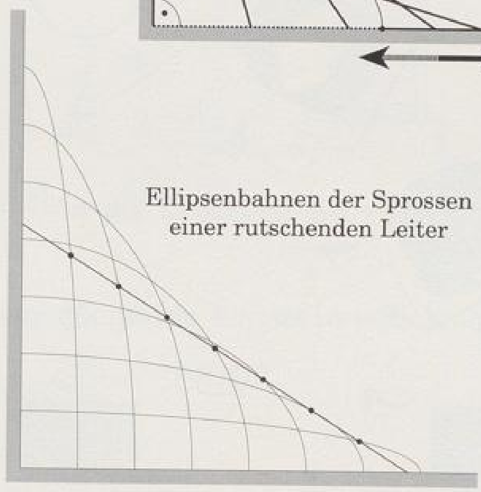
*** Papierstreifen-Konstruktion**

Aus der Hauptkreis-Konstruktion lässt sich eine besonders einfache Methode zum mechanischen Zeichnen einer Ellipse ableiten, die Papierstreifen-Konstruktion: Man ergänzt das rechtwinklige Dreieck in der Ausgangsfigur zu einem Rechteck und verlängert dessen andere Diagonale bis zum Schnitt mit der x- und y-Achse. Symmetrieüberlegungen zeigen, dass der Ellipsenpunkt E diese verlängerte Diagonale in Strecken der Längen a und b unterteilt.



Verschiebt man also einen Stab der Länge a + b in einem rechten Winkel so, dass seine Endpunkte auf den Schenkeln gleiten, so beschreibt der Teilpunkt E den Bogen einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

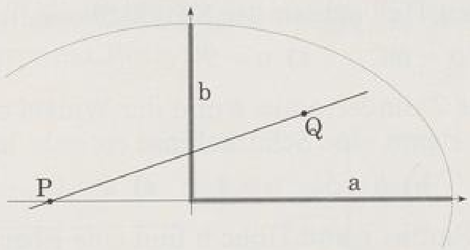




Ellipsenbahnen der Sprossen einer rutschenden Leiter

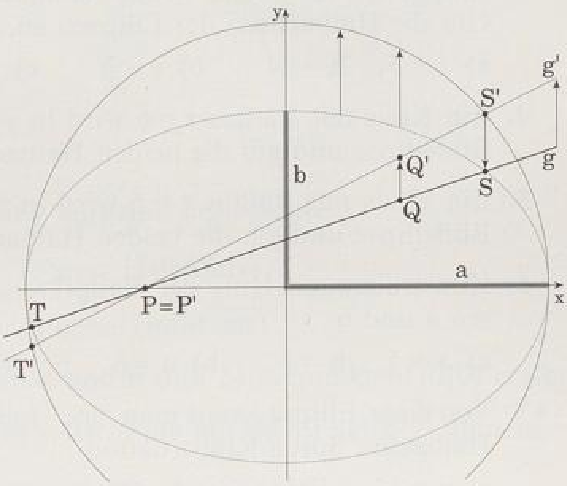
*Schnitt von Gerade und Ellipse

Wir wenden die Hauptkreis-Konstruktion an und konstruieren die Schnittpunkte einer Gerade g = PQ und einer Ellipse mit bekannten Halbachsen. P liege auf der x-Achse.



Lösungsidee

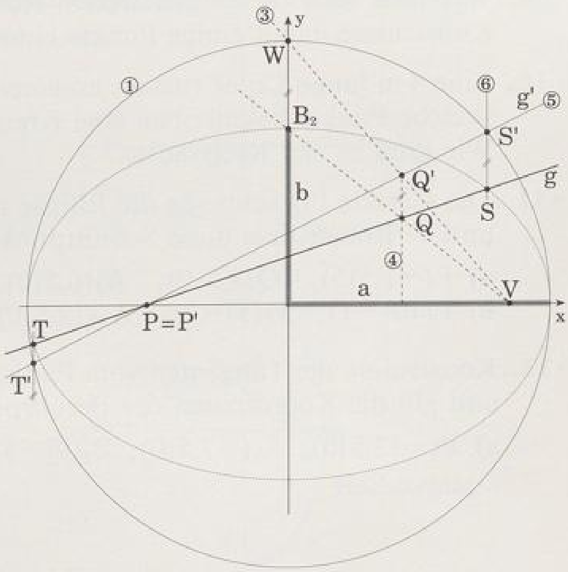
Wir strecken die Ellipse und die Gerade in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{a}{b}$: Die Ellipse wird zum großen Hauptkreis und die Gerade g zur Gerade g′. Die Schnittpunkte S′ und T′ von g′ und großem Hauptkreis stauchen wir mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ in y-Richtung und bekommen die gesuchten Schnittpunkte S und T.



Konstruktion

Der Schnittpunkt P von Gerade und x-Achse bleibt liegen: P = P′. Der Geradenpunkt $Q(x_q|y_q)$ wird abgebildet auf $Q'(x_q|\frac{a}{b}y_q)$. (Achte auf die gestrichelte V-Figur!)

W ist Schnittpunkt von Hauptkreis ① mit Radius a und y-Achse.
V ist Schnittpunkt von x-Achse und Gerade ② durch Q und den Nebenscheitel B_2.
Q′ ist Schnittpunkt von Gerade VW ③ und Parallele ④ zur y-Achse durch Q.
S′ ist Schnittpunkt von Gerade g′ = PQ ⑤ und Hauptkreis ①.
S ist Schnittpunkt von Gerade g = PQ und Parallele ⑥ zur y-Achse durch S′.



Aufgaben

1. Eine Ebene schneidet einen Zylinder mit Radius $r = 6$ so, dass sie mit der Zylinderachse den Winkel α bildet.
   Berechne die beiden Halbachsen der Schnittellipse für
   a) $\alpha = 45°$ **b)** $\alpha = 60°$ **c)** $\alpha = 90°$

2. Wie groß muss der Zylinderradius r und der Winkel α zwischen Zylinderachse und Schnittebene sein, damit eine Schnittellipse entsteht mit
   a) $a = 5, \quad b = 3$ **b)** $a = 5, \quad b = 4$ **c)** $a = 10, \quad b = 4$

3. Ein Zylinder mit Radius r und Höhe h und eine Ebene schneiden sich so, dass eine Ellipse mit maximaler großer Halbachse a entsteht.
   Gib die Halbachsen der Ellipsen an, falls
   a) $r = 5, \quad h = 24$ **b)** $e = h$ **c)** $2r = h$

4. Ein Kreis mit Radius $r = 6$ wird in y-Richtung aufs $\frac{2}{3}$-fache gestaucht. Zeichne die Bildellipse und gib die beiden Halbachsen an.

5. Ein Kreis mit Radius $r = 5$ wird in y-Richtung aufs $\frac{3}{2}$-fache gedehnt. Zeichne die Bildellipse und gib die beiden Halbachsen an.

6. Konstruiere mit Hilfe der Hauptkreise einige Punkte der Ellipsen mit den Halbachsen a und b
   a) $a = 5, \quad b = 3$ **b)** $a = 6, \quad b = 3$ **c)** $a = 6, \quad b = 2$

•7. Von einer Ellipse kennt man eine Halbachse und einen Punkt E. Ermittle die andere Halbachse durch Konstruktion.
   a) $a = 13, \quad E(5|4)$ **b)** $b = 5, \quad E(6|4)$ **c)** $a = 10, \quad E(6|6)$

8. Markiere auf einem 10 cm langen Kartonstreifen einen Punkt, der 4 cm vom Rand weg liegt. Zeichne damit eine Ellipse und gib ihre Halbachsen an.

9. Wie lässt sich die Papierstreifen-Konstruktion mit Zirkel und Lineal ausführen? Konstruiere damit einige Punkte einer Ellipse mit den Halbachsen 5 und 3.

10. Eine 4 m lange Leiter rutscht an einer Hauswand ab.
    Welche Punkte beschreiben eine Kreisbahn? Begründung!
    Wie groß ist der Kreisradius?

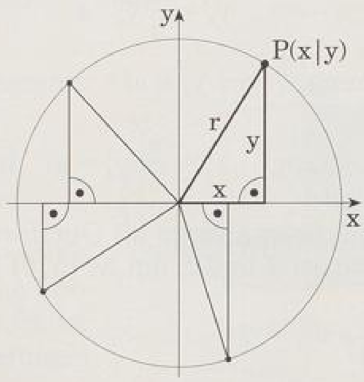
•11. Die Gerade PQ schneide die Ellipse mit den Scheiteln A_2 und B_2 in den Punkten S und T. Konstruiere diese Schnittpunkte und gib ihre Koordinaten an.
    a) $P(-1{,}5|5), \quad Q(8{,}5|0), \quad A_2(6{,}5|0), \quad B_2(0|3{,}25)$
    b) $P(10|-1), \quad Q(5|-7), \quad A_2(12{,}5|0), \quad B_2(0|5)$

•12. Konstruiere die Tangenten vom Punkt P an die Ellipse mit den Scheiteln A_2 und B_2 und gib die Koordinaten der Berührpunkte S und T an.
    a) $P(-12{,}5|0), \ A_2(-7{,}5|0), \ B_2(0|-5)$ **b)** $P(-1{,}5|-7), \ A_2(-7{,}5|0), \ B_2(0|-5)$

2. Die Mittelpunkt-Gleichung einer Ellipse

So wie man die Punkte einer Gerade durch die Gleichung $ay + bx + c = 0$ beschreiben kann, so lassen sich auch die Punkte einer Ellipse mit einer Gleichung festlegen. Beginnen wir mit der einfachsten Ellipse, dem Kreis. k sei ein Kreis um $M(0|0)$ mit Radius r. Nach Pythagoras gilt für jeden Kreispunkt $P(x|y)$:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



Damit ist die Gleichung schon gefunden. Nach y aufgelöst ergibt sich:

$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}$ das heißt $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ (oberer Halbkreis)

oder $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (unterer Halbkreis)

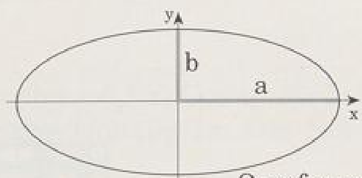
Die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen a und b und Mittelpunkt $M(0|0)$ ergibt sich, wenn man einen Kreis mit Radius $r = a$ in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ staucht.

Aus der Kreisgleichung $|y| = \sqrt{a^2 - x^2}$ bekommen wir die

Ellipsengleichung $|y| = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Quadrieren und Sortieren liefert die **Mittelpunkt-Gleichung** der Ellipse mit den Halbachsen a (in x-Richtung) und b (in y-Richtung).

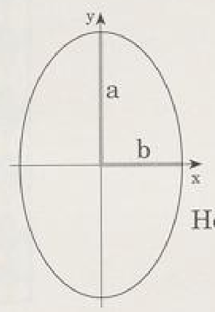
$$\boxed{\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}}$$



Querformat

Liegt die große Halbachse in y-Richtung, dann heißt die Gleichung:

$$\boxed{\mathbf{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}}$$



Hochformat

Ein anderer Weg von der Kreisgleichung zur Ellipsengleichung folgt aus den uns schon bekannten Koordinaten-Beziehungen zwischen einem Punkt $(x_k|y_k)$ des Hauptkreises mit Radius a und Ellipsenpunkt $(x_e|y_e)$:

$$x_e = x_k$$ (siehe Seite 210)

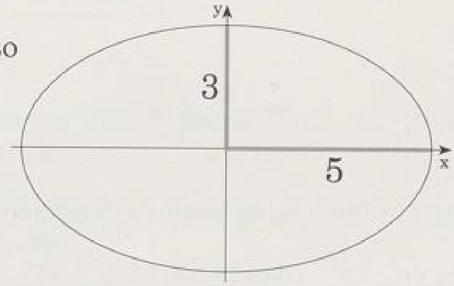
$$y_e = \frac{b}{a} y_k \quad \Rightarrow \quad y_k = \frac{a}{b} y_e$$

Kreisgleichung: $x_k^2 + y_k^2 = a^2$ eingesetzt ergibt

Ellipsengleichung: $x_e^2 + \frac{a^2}{b^2} y_e^2 = a^2$ in üblicher Form: $\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2} = 1$

Die Gleichung der Ellipse im Querformat mit den Halbachsen 3 und 5 um M (0|0) lautet also

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$



Diese Gleichung lässt sich umformen zu:

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

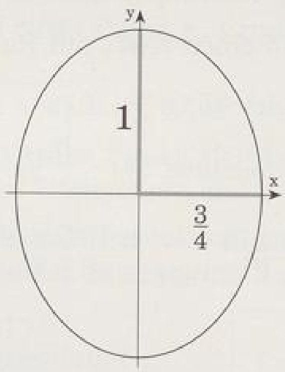
Allgemein beschreibt jede Gleichung der Form $px^2 + qy^2 - r = 0$ mit $p, q, r > 0$ eine Ellipse. Die Halbachsen finden wir durch geeignete Umformung:

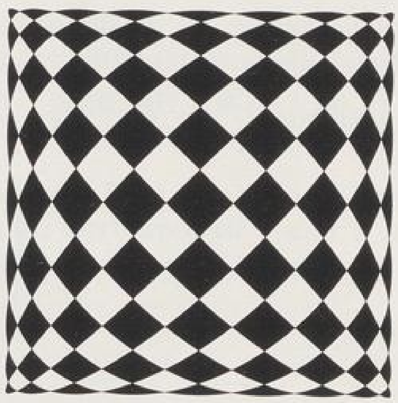
$$16x^2 + 9y^2 - 9 = 0$$

$$16x^2 + 9y^2 = 9$$

$$\frac{16x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$\frac{x^2}{(3/4)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1, \quad b = 3/4$$

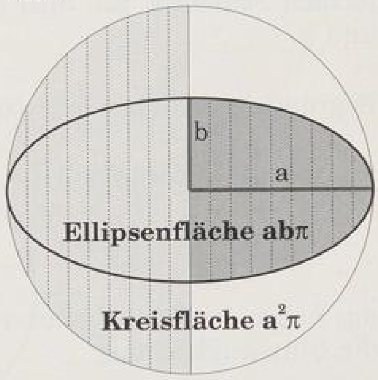




*Fläche und Umfang der Ellipse

Die Idee von der Ellipse als gestauchtem Kreis führt auch zu einer einfachen Formel für die Fläche einer Ellipse. Man denkt sich den Kreis in sehr schmale, annähernd rechteckige Streifen zerlegt. Beim Stauchen bleibt jeder Streifen gleich breit, seine Höhe und damit seine Fläche nehmen ab aufs $\frac{b}{a}$-fache. Also gilt $A_{Ellipse} = \frac{b}{a} A_{Kreis}$.

$$\boxed{A_{Ellipse} = ab\pi}$$



Wer nun nach dieser einfachen Flächenformel erwartet, dass es auch für den Umfang der Ellipse eine einfache Formel gibt, der irrt. Nur mit Hilfe höherer Mathematik findet man Ausdrücke, mit denen man den Umfang näherungsweise berechnen kann. Eine kleine Auswahl:

① $$U_{Ellipse} \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]$$

② $$U_{Ellipse} \approx \frac{\pi}{2} \left[a + b + \sqrt{2(a^2+b^2)}\right]$$

③ $$U_{Ellipse} \approx \pi \left(a + b + \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}\right)$$

Für $a = b = r$ wird aus diesen drei Formeln erwartungsgemäß der Term $\pi \cdot 2r$. Wer's exakt haben will, muss eine Summe mit unendlich vielen Summanden »berechnen«, zum Beispiel

④ $$U_{Ellipse} = 2a\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots\right]$$

mit $e^2 = a^2 - b^2$.

Für eine Ellipse mit $a = 1$ und $b = 0{,}5$ ergibt sich $F = ab\pi = 0{,}5\pi$. Das ist die halbe Fläche des großen Halbkreises mit $r = 1$. Dieser Kreis hat den Umfang 2π. Die Näherungsformeln für den Ellipsenumfang liefern (10 gültige Dezimalen)

① $$U_{Ellipse} \approx \pi \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right] = \pi \cdot 1{,}542\,893\,218\,8\dots$$

② $$U_{Ellipse} \approx \frac{\pi}{2} \left[\frac{3}{2} + \sqrt{2 \cdot \frac{5}{4}}\right] = \pi \cdot 1{,}540\,569\,415\,0\dots$$

③ $$U_{Ellipse} \approx \pi \left[\frac{3}{2} + \frac{1/4}{4 \cdot 3/2}\right] = \pi \cdot 1{,}541\,666\,666\,6\dots$$

④ $U_{Ellipse} \approx \pi \cdot 1{,}541\,964\,425\,1\dots$

* Ellipsenzirkel

Zum Zeichnen von Kreisen hat man als Werkzeug den Zirkel erfunden. Verblüffenderweise gibt es auch ein mechanisches Gerät zum Zeichnen von Ellipsen, den Ellipsenzirkel. Seine Funktionsweise beruht auf der Papierstreifen-Konstruktion.

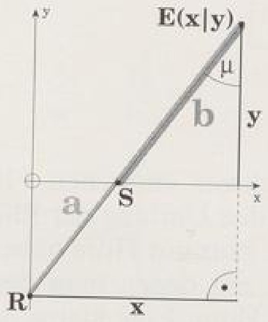
Zwei feste Punkte R und S eines Stabs mit $\overline{ER} = a$ und $\overline{ES} = b$ gleiten in zueinander senkrechten Schienen. Ein Stift im Endpunkt E zeichnet eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.

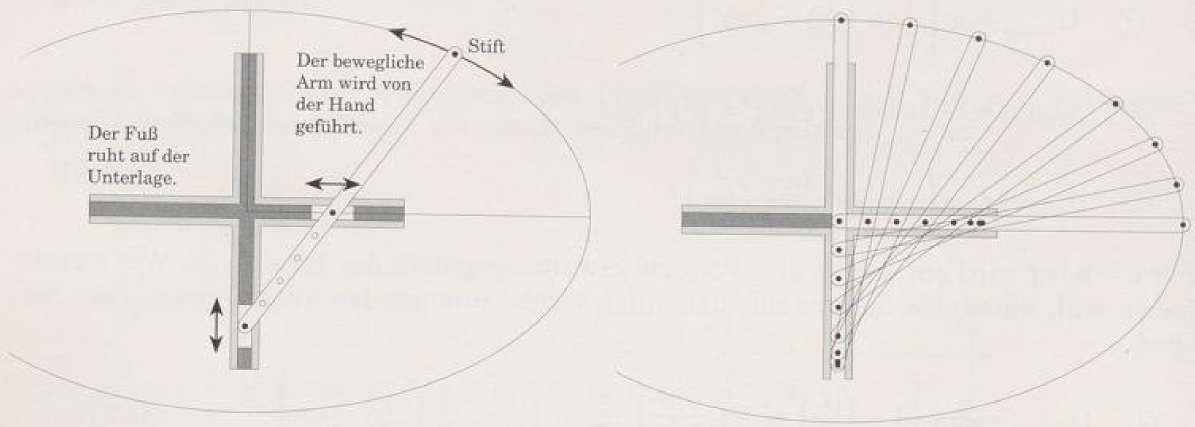
Begründung: $\sin\mu = \frac{x}{a}$, $\quad \cos\mu = \frac{y}{b}$

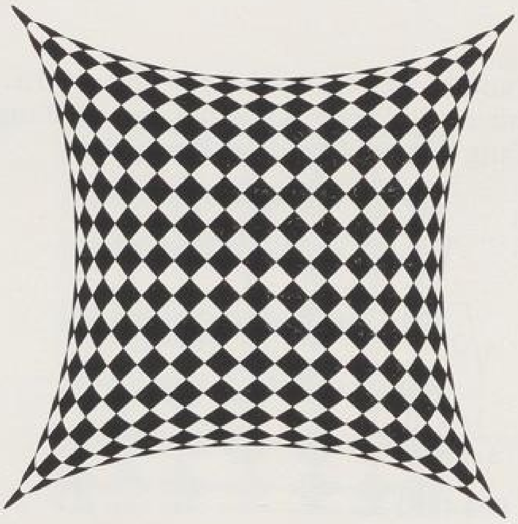
$$(\sin\mu)^2 + (\cos\mu)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

das heißt, die Koordinaten von E erfüllen die Ellipsengleichung.

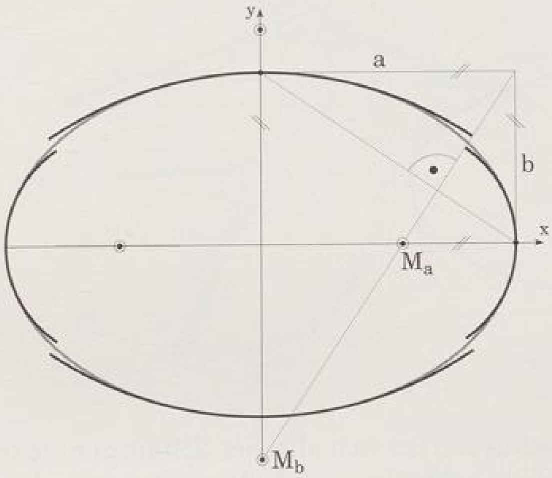






* Die Scheitel-Krümmungskreise

Normalerweise hat man keinen Ellipsenzirkel zur Hand. Aber auch ein Kreiszirkel eignet sich zum näherungsweisen Zeichnen von Ellipsen. Dazu dienen vier Kreisbögen, die die Ellipse in der Umgebung der Scheitel am besten annähern. Sie heißen **Scheitel-Krümmungskreise**. Ihre Mittelpunkte liegen aus Symmetriegründen auf den Achsen. Das Bild erklärt die Konstruktion dieser Mittelpunkte M_a und M_b.



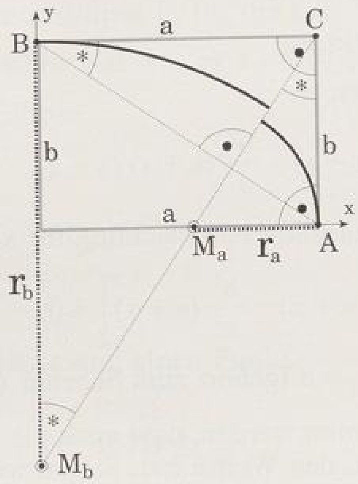
Zeichnet man die vier Kreisbögen (die sich nicht schneiden!), dann hat man schon einen verblüffend guten Eindruck von Ellipse. Diese lässt sich jetzt gut skizzieren – aber Obacht: immer innerhalb der großen und außerhalb der kleinen Näherungskreise bleiben, denn nur die vier Scheitel sind Ellipsenpunkte! Die Kreisradien liest man aus der Konstruktionsfigur ab:

Aus $\Delta CAM_a \sim \Delta BCA$ folgt

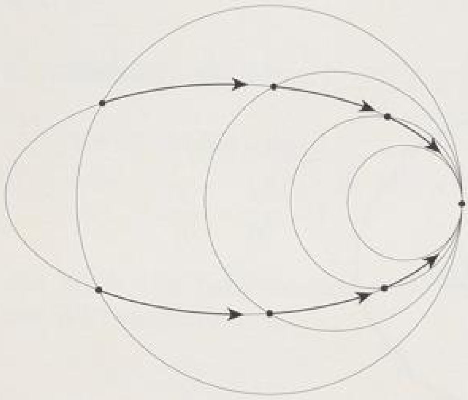
$$\frac{r_a}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{also} \quad \boxed{r_a = \frac{b^2}{a}}$$

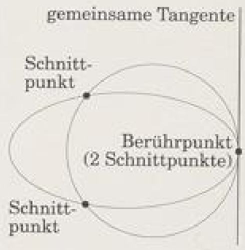
Aus $\Delta BCM_b \sim \Delta CAB$ folgt

$$\frac{r_b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{also} \quad \boxed{r_b = \frac{a^2}{b}}$$



Wer's genauer wissen will, erfährt jetzt den mathematischen Hintergrund.
Im Allgemeinen schneiden sich Kreis und Ellipse in vier Punkten.
Haben sie eine gemeinsame Tangente, dann berühren sie sich: Zwei Schnittpunkte fallen in einem Berührpunkt zusammen. Als Berührpunkt wählen wir den rechten Hauptscheitel, halten ihn fest und verkleinern den Radius. Dabei wandern die beiden andern Schnittpunkte auf der Ellipse in Richtung Berührpunkt.

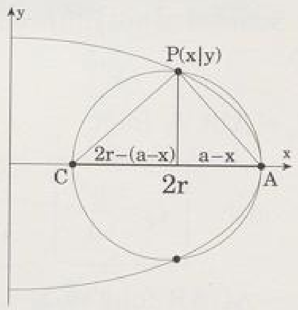




Bei einem bestimmten Radius treffen sich alle vier Schnittpunkte im Berührpunkt und bilden einen vierfachen Schnittpunkt. Grafisch äußert sich das darin, dass sich der Kreis jetzt besonders innig an die Ellipse anschmiegt.
Für die Koordinaten der beiden beweglichen Schnittpunkte gelten zwei Gleichungen

I $\quad y^2 = (2r - a + x)(a - x)$
(Höhensatz im Dreieck CAP)

II $\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$
(Ellipsengleichung)



Gleichsetzen liefert:

$$(2r - a + x)(a - x) = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x)$$

das ergibt eine quadratische Gleichung für x

$$(a - x)\left[(2r - a + x) - \frac{b^2}{a^2}(a + x)\right] = 0$$

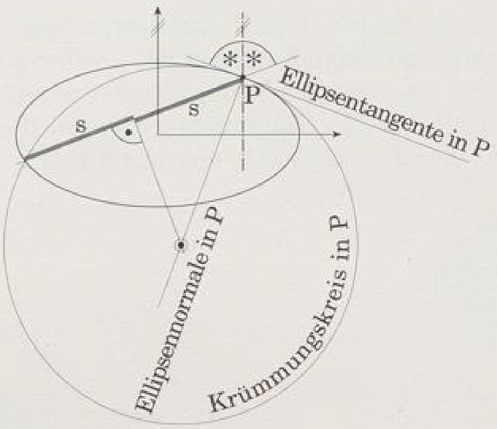
Eine Lösung ist $x_1 = a$ (gehört zum Scheitel A).

r soll nun so bestimmt werden, dass auch die zweite Lösung x_2, für die die zweite Klammer [...] gleich null ist, den Wert a hat. Setzen wir in [...] a für x ein, so ergibt sich für r

$$\left[(2r - a + a) - \frac{b^2}{a^2}(a + a)\right] = 0$$

$2r = 2\,\frac{b^2}{a} \;\Rightarrow\; r = \frac{b^2}{a}$, das ist der Radius r_a des kleinen Scheitel-Krümmungskreises.

Für den Radius r_b des großen Scheitel-Krümmungskreises gelten entsprechende Überlegungen. Die Scheitel-Krümmungskreise sind deshalb so besonders gute Schmiegekreise, weil in jedem Scheitel vier Schnittpunkte zusammenfallen. Dieselbe Überlegung für andere Ellipsenpunkte zeigt, dass nur drei Schnittpunkte zusammenfallen: Jetzt durchdringen die Schmiegekreise die Ellipse. Ihre Konstruktion ist schwieriger.



Aufgaben

Wenn nichts anderes vermerkt ist, liegt die Ellipse im Querformat. Ihr Mittelpunkt ist immer der Ursprung.

1. Wie lautet die Mittelpunkt-Gleichung einer Ellipse E, für die gilt

   a) $a = 2,\ b = 1$ **b)** $a = 2,\ b = 1$, Hochformat **c)** $a = \sqrt{10},\ b = \sqrt{5}$

2. Bestimme die Halbachsen a und b der Ellipse.
   Hat die Ellipse Quer- oder Hochformat?

   a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ **b)** $0{,}5\,x^2 + 2\,y^2 = 2$

   c) $4x^2 + y^2 = 1$ **d)** $\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{25}y^2 = \frac{1}{4}$

3. Von einer Ellipse kennt man eine Halbachse und einen Punkt.
   Bestimme die andere Halbachse.

   a) $a = 5\sqrt{5}$, $P(10|1)$ **b)** $b = 5\sqrt{2}$, $P(-14|1)$

   c) $a = 5\sqrt{10}$, $P(15|-3)$ **d)** $b = 4\sqrt{13}$, $P(-15|-8)$

4. Von einer Ellipse kennt man die Punkte P und Q.
   Bestimme die Mittelpunkt-Gleichung. (Tip: Substitution von $^1/_{a^2}$ und $^1/_{b^2}$)

   a) $P(9|-1)$, $Q(-7|3)$ **b)** $P(-1|9)$, $Q(-9|6)$
   c) $P(17|4)$, $Q(23|-1)$ **d)** $P(-19|4)$, $Q(16|11)$

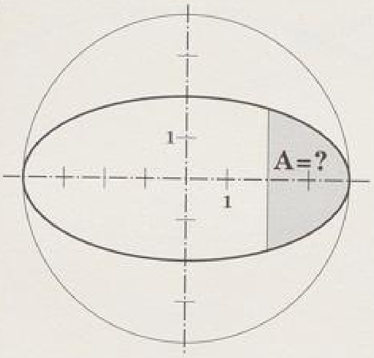
5. Der Ellipse mit der Gleichung $16x^2 + 9y^2 = 144$ ist ein Quadrat einbeschrieben. Berechne seine Seitenlänge s.

6. Die Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 500$ und die Gerade mit der Gleichung $3y = 2x - 25$ schneiden sich zweimal. Berechne die Schnittpunkte.

7. Bestimme den Flächeninhalt und näherungsweise den Umfang der Ellipse mit der Gleichung

a) $9x^2 = 25y^2 = 225$ **b)** $x^2 + 100y^2 = 100$

:8.



9. Von einer Ellipse kennt man den Punkt $P(4{,}5|2)$ und die kleine Halbachse $b = 2{,}5$. Konstruiere die Länge der großen Halbachse a mit Hilfe der Idee des Ellipsenzirkels.

10. Konstruiere die Scheitelkrümmungs-Kreise und skizziere die Ellipse mit den Halbachsen

a) $a = 5,\ b = 4$ **b)** $a = 5,\ b = 3$ **c)** $a = 5,\ b = 2$

11. Eine Ellipse, bei der die Mittelpunkte der großen Scheitelkrümmungs-Kreise die Nebenscheitel sind, heißt **Fagnano-Ellipse.**
Der italienische Mathematiker Giulio Carlo FAGNANO, Marquis von Toschi und S. Onorio (1682 bis 1766) hat sich einen Namen gemacht wegen seiner Bogenlängen-Berechnungen bei Ellipse, Hyperbel, Parabel und Lemniskate.

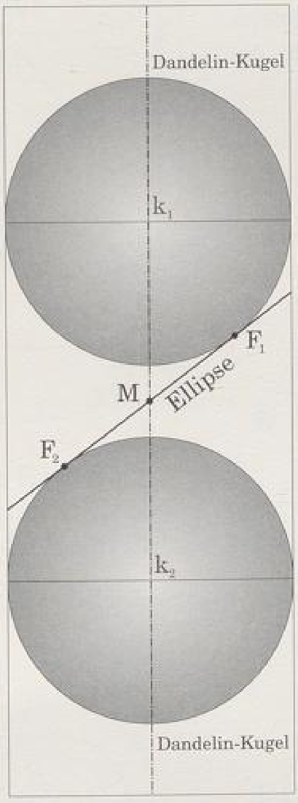
a) Die kleine Halbachse einer Fagnano-Ellipse sei b. Berechne
– die große Halbachse a
– den Radius des kleinen Scheitelkrümmungs-Kreises.

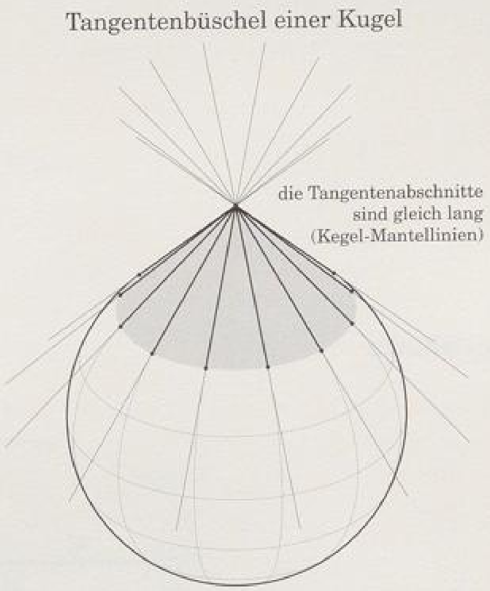
b) Zeichne eine Fagnano-Ellipse mit Hilfe ihrer Scheitelkrümmungs-Kreise für $b = 3$.

c) Zeige: Wenn eine Ellipse mit den Halbachsen a und b eine Fagnano-Ellipse ist, dann ist auch die Ellipse mit den Halbachsen b und $a/2$ eine Fagnano-Ellipse.

3. Die Brennpunkte der Ellipse

Der belgische Mathematiker und Baumeister Pierre Germinal DANDELIN (1794 bis 1847) hatte bei der Untersuchung von Kegelschnitten eine schöne Idee aus der Raumgeometrie, die uns eine sehr wichtige Eigenschaft der Ellipse vor Augen führt. Dazu betrachten wir die Ellipse wieder als Schnitt einer Ebene E und eines Zylinders. Auf beiden Seiten der Ebene schiebt man eine genau passende Kugel (Kugelradius = Zylinderradius) in den Zylinder, bis sie die Ebene berührt. Die beiden Kugeln berühren außerdem den Zylinder in den Kreisen k_1 und k_2. Aus Symmetriegründen liegen die beiden Berührpunkte F_1 und F_2 auf der Hauptachse gleich weit vom Mittelpunkt M der Ellipse weg. F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte** der Ellipse. Zu Ehren von DANDELIN nennt man die beiden Kugeln **Dandelin-Kugeln.**





P sei ein beliebiger Punkt der Schnittellipse. Weil die Schnittebene auch Tangentialebene der beiden Dandelin-Kugeln ist, sind PF_1 und PF_2 Tangenten dieser Kugeln. Die Mantellinie durch P schneidet die beiden Berührkreise k_1 und k_2 in Q_1 und Q_2. PQ_1 und PQ_2 sind also auch Tangenten der Dandelin-Kugeln. Alle Kugel-Tangentenabschnitte durch einen Punkt sind gleich lang. Deshalb gilt:

$$\overline{PQ_1} = \overline{PF_1} \quad \text{und} \quad \overline{PQ_2} = \overline{PF_2} \quad \text{also} \quad \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} = \overline{Q_1Q_2} = \text{const.}$$

Für jeden Ellipsenpunkt ist die Summe seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten die Konstante $\overline{Q_1Q_2}$, der Abstand der beiden Berührkreise. Der Wert dieser Konstante ergibt sich, wenn wir P in einen Hauptscheitel, zum Beispiel A_2, legen, wenn also $P = A_2$ ist:

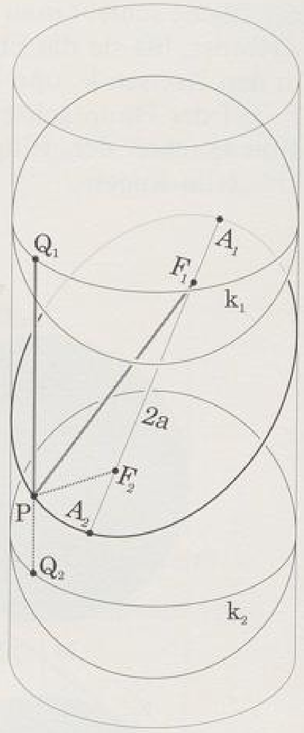
$$\overline{Q_1Q_2} = \overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} = \overline{A_2F_1} + \overline{F_1A_1} = 2a$$

Zusammenfassung
Für jeden Ellipsenpunkt P gilt

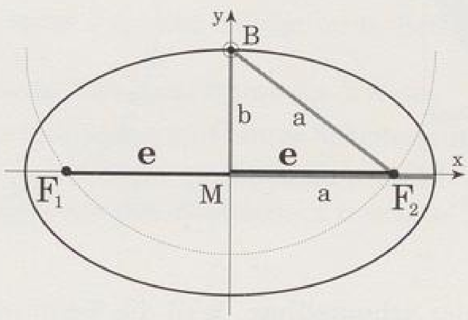
$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a}$$

Die beiden Brennstrecken $[PF_1]$ und $[PF_2]$ sind zusammen so lang wie die Hauptachse 2a.

Legt man P in einen Nebenscheitel B, dann gilt aus Symmetriegründen $\overline{F_1B} = \overline{F_2B} = a$. Mit dieser Beziehung lassen sich die Brennpunkte einfach konstruieren.



***Exzentrizitäten**



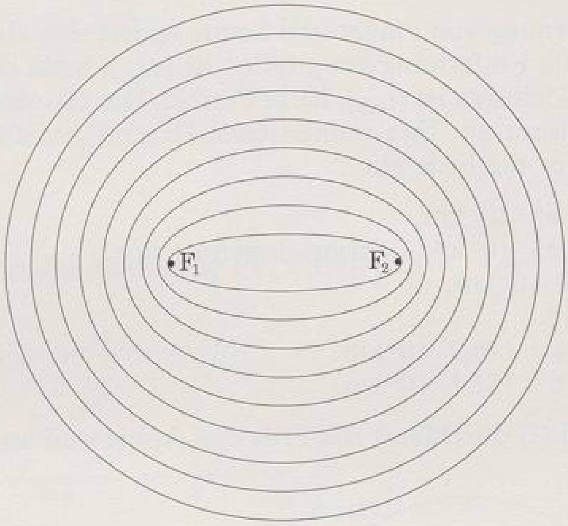
Die Entfernung **e** der Brennpunkte vom Mittelpunkt heißt **lineare Exzentrizität**. Die Zeichnung (Pythagoras!) zeigt:

$$\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$$

Für einen Kreis gilt $a = b$, also $e = 0$. e ist aber noch kein Maß dafür, wie die Ellipse vom Kreis abweicht. Denn bei einer Ähnlichkeitsabbildung, zum Beispiel zentrische Streckung, ändert sich zwar e, nicht aber die Form. Umgekehrt gibt es zu ein und demselben Wert für e verschieden geformte Ellipsen. Bezieht man jedoch e auf die große Halbachse, dann entsteht eine Zahl, in der die Gestalt der Ellipse zum Ausdruck kommt, sie heißt **numerische Exzentrizität** ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$$

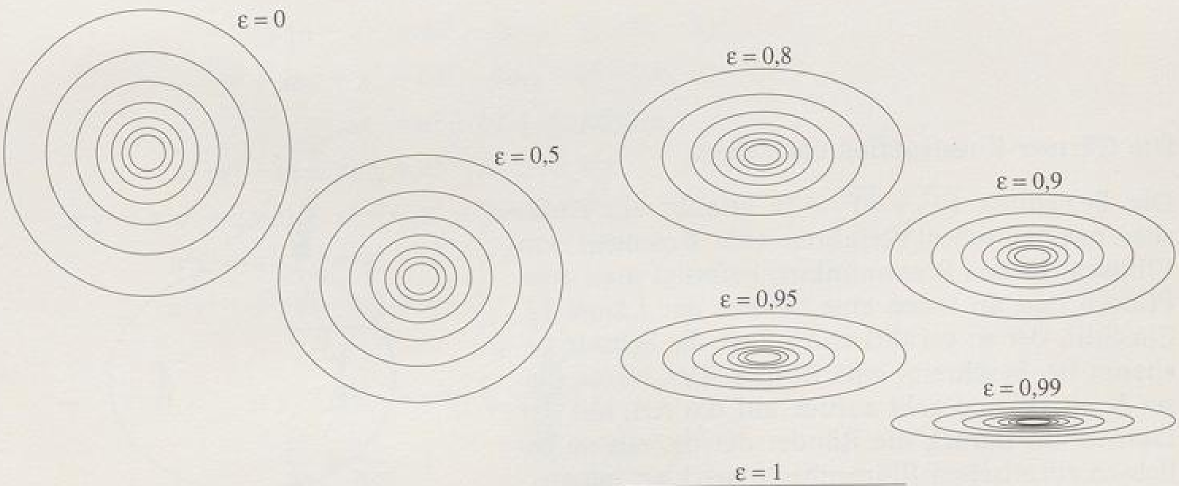
Konfokale Ellipsen mit $\overline{F_1F_2} = 2e = \text{const.}$



Wegen $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$ ist $0 \leq \varepsilon \leq 1$

Für die Grenzfälle gilt
$\varepsilon = 0$, das heißt $a = b$: Kreis
$\varepsilon = 1$, das heißt $b = 0$: Strecke

Konfokale Ellipsen mit $\overline{F_1F_2} = 2e = \text{const.}$



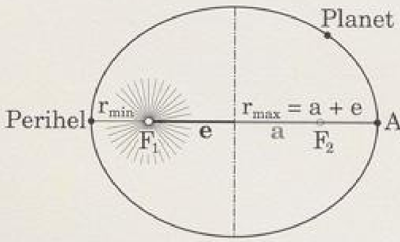
Die Ellipse in der Astronomie

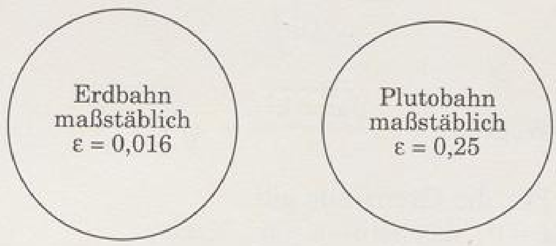
Bis ins 16. Jahrhundert glaubte man, dass sich alle Gestirne auf Kreisbahnen oder auf Überlagerungen von Kreisbahnen bewegen. Als Johannes KEPLER (Weil der Stadt 1571 bis 1630 Regensburg) auf der Grundlage der Beobachtungen von Tycho BRAHE die Planetenbewegung mathematisch beschreiben wollte, musste er dieses Ideal der Kreisbahn aufgeben. Er stellte fest, dass die Planeten auf Ellipsenbahnen laufen, bei denen die Sonne in einem Brennpunkt steht.

Die Entfernung von Planet und Sonne ändert sich also während des Umlaufs. Der Punkt, bei dem die Entfernung am größten ist (r_{max}), heißt **Aphel**; der Punkt, bei dem die Entfernung am kleinsten ist (r_{min}), heißt **Perihel**. Die Ellipsenbahnen weichen nur sehr wenig von der Kreisform ab. Ihre numerischen Exzentrizitäten reichen von 0,007 (Venus) bis 0,25 (Pluto). Für die Erde gilt

$a = 148{,}65 \cdot 10^6\,\text{km}$,
$b = 148{,}63 \cdot 10^6\,\text{km}$, daraus errechnet sich
$e = 2{,}44 \cdot 10^6\,\text{km}$,
$\varepsilon = 0{,}016$
$r_{min} = a - e = 146{,}2 \cdot 10^6\,\text{km}$
$r_{max} = a + e = 151{,}1 \cdot 10^6\,\text{km}$.

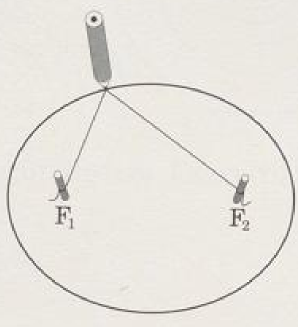
Am 3. Juli (!) durchläuft die Erde das Aphel und am 2. Januar das Periphel.



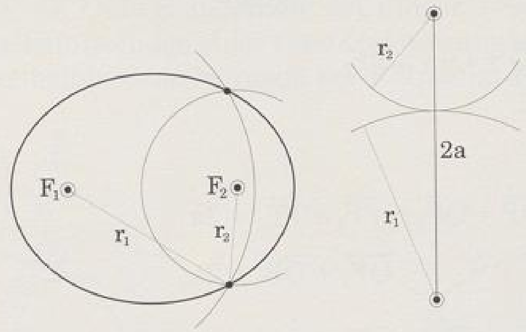


Die Gärtner-Konstruktion der Ellipse

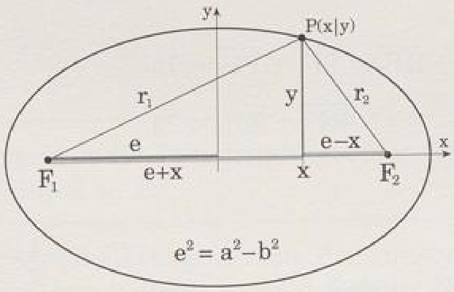
Die Beziehung $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ erlaubt ein einfaches mechanisches Verfahren zum Erzeugen von Ellipsen. In den Brennpunkten befestigt man zwei Pflöcke und an ihnen eine Schnur der Länge 2a. Ein Stift, der so geführt wird, dass die Schnur gespannt ist, beschreibt eine Ellipse. Der Name dieser Konstruktion geht zurück auf die Art, mit der Gärtner im Barock die Ränder der damals so beliebten elliptischen Blumenbeete markiert haben.



Die Ellipseneigenschaft, die der Gärtner-Konstruktion zugrunde liegt, führt auch zu einer Konstruktion einzelner Ellipsenpunkte: Man zeichnet um die Brennpunkte Kreise, deren Radien zusammen 2a ergeben; die Schnittpunkte sind Ellipsenpunkte.



Herleitung der Ellipsen-Gleichung aus der Beziehung $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$



$$r_1^2 = y^2 + (e+x)^2 \qquad\qquad r_2^2 = y^2 + (e-x)^2$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$r_1 = 2a - r_2 \quad \| \text{ quadrieren}$$

$$r_1^2 = 4a^2 - 4ar_2 + r_2^2$$

$$\cancel{y^2}(e+x)^2 = 4a^2 - 4ar_2 + \cancel{y^2} + (e-x)^2$$

$$\cancel{e^2} + 2ex + \cancel{x^2} = 4a^2 - 4ar_2 + \cancel{e^2} - 2ex + \cancel{x^2}$$

$$ar_2 = a^2 - ex \quad \| \text{ quadrieren}$$

$$a^2\left[y^2 + (e-x)^2\right] = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

$$a^2y^2 + a^2e^2 - \cancel{2a^2ex} + a^2x^2 = a^4 - \cancel{2a^2ex} + e^2x^2$$

$$a^2y^2 + a^2x^2 - e^2x^2 = a^4 - a^2e^2$$

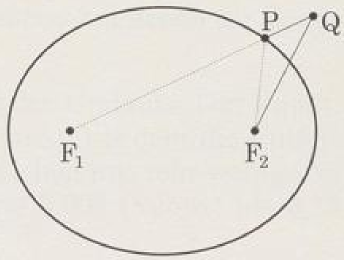
$$a^2y^2 + x^2\underbrace{(a^2 - e^2)}_{b^2} = a^2\underbrace{(a^2 - e^2)}_{b^2}$$

$$a^2y^2 + x^2b^2 = a^2b^2 \quad \| \; :(a^2b^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

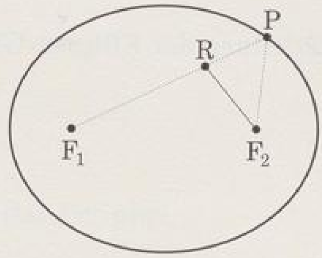
Ein Punkt P liegt also genau dann auf der Ellipse, wenn die Summe der beiden Brennstrecken r_1 und r_2 gleich der Hauptachse 2a ist. Für einen Punkt Q, der außerhalb der Ellipse liegt, ist die Summe der Brennstrecken größer als 2a; für einen Punkt R, der innerhalb liegt, ist sie kleiner als 2a. Zur Begründung verwenden wir die Dreieck-Ungleichung.

Im Dreieck QPF_2 gilt: $\overline{PQ} + \overline{QF_2} > \overline{PF_2}$



$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{PF_1} + \overline{QP} + \overline{QF_2} > \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$
$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a$$

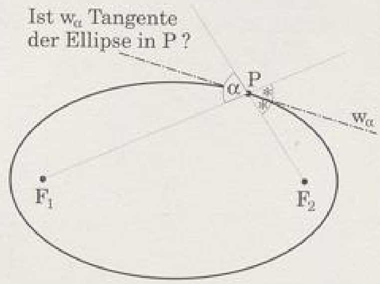
Im Dreieck RPF_2 gilt: $\overline{RP} + \overline{PF_2} > \overline{RF_2}$



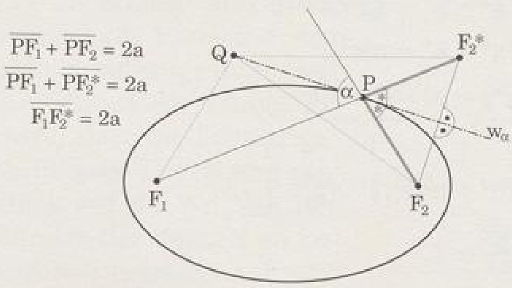
$$\overline{RF_1} + \overline{RF_2} < \overline{RF_1} + \overline{RP} + \overline{RF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$
$$\overline{RF_1} + \overline{RF_2} < 2a$$

***Brennpunkt und Tangente**

oder: Wie der Brennpunkt zu seinem Namen kommt.



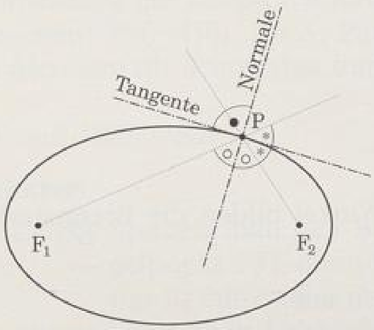
Das Bild zeigt einen Ellipsenpunkt P und eine Winkelhalbierende w_α der Brennstrahlen $[F_1P$ und $[F_2P$. Dem Augenschein nach ist w_α Tangente der Ellipse in P. Aber nicht nur dem Augenschein nach! Mit einem kleinen Trick lässt sich das beweisen: Man spiegelt einen der beiden Brennpunkte an w_α (Spiegelpunkt F_2^*). Wegen Achsensymmetrie ist $\overline{PF_2} = \overline{PF_2^*}$.

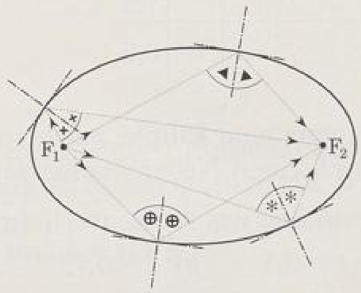


Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt dann (Dreieck-Ungleichung!):

$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QF_2^*} > \overline{F_1F_2^*} = 2a$$

Also gilt $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a \Rightarrow$ Q liegt außerhalb der Ellipse $\Rightarrow$ w_α ist Tangente im Punkt P. Weil die beiden Winkelhalbierenden einer Geradenkreuzung aufeinander senkrecht stehen, ist die andere Winkelhalbierende Normale der Ellipse im Punkt P.

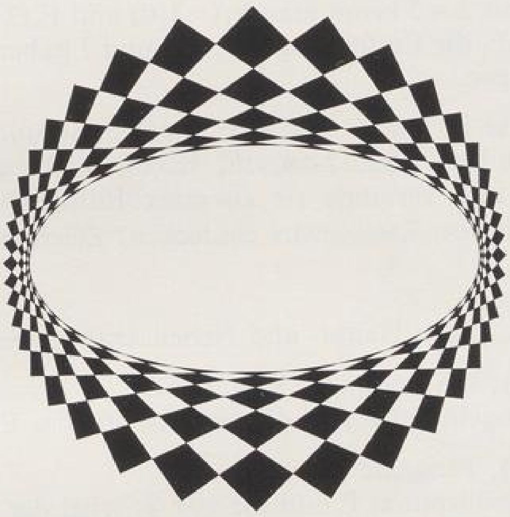




Damit haben wir den **Satz**:

Die beiden Winkelhalbierenden der Brennstrahlen eines Ellipsenpunkts P sind Tangente und Normale der Ellipse in P.

Wir haben so eine einfache Möglichkeit gefunden, die Tangenten in einem beliebigen Ellipsenpunkt zu konstruieren: Man halbiert den Winkel der Brennstrahlen, durch den die Ellipse geht.
Nach dem Reflexionsgesetz der Physik sind Einfalls- und Ausfallswinkel gleich groß. Alle von einem Brennpunkt ausgehenden (Licht-)Strahlen werden an der Ellipse so reflektiert, dass sie sich im andern Brennpunkt treffen. Weil die Wege aller Strahlen gleich lang (= 2a) sind, treffen sich die reflektierten Strahlen auch alle zum selben Zeitpunkt. (Anwendung dieses Effekts im Kapitel 9. II, 5)



Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Größen

	a	b	e	ε
a)	4	2		
b)	4		2	
c)	7			0,5
d)			4	0,8

2. Zeichne eine Ellipse mit $e = b = 4$. Welchen Winkel bilden die Brennstrahlen, die durch einen Nebenscheitel gehen?

3. Bestimme das Achsenverhältnis b/a bei Ellipsen mit

a) $\varepsilon = 0{,}5$ **b)** $\varepsilon = 0{,}75$ **c)** $\varepsilon = 0{,}9$ **d)** $\varepsilon = 0{,}95$ **e)** $\varepsilon = 0{,}99$

4. Zeichne (mit Hilfe der Scheitelkrümmungs-Kreise) die Ellipse E_1 mit den Halbachsen $a = 4$ und $b = 3{,}5$ sowie die beiden Brennpunkte. Zeichne dann die Ellipse E_2 mit der gleichen linearen Exzentrizität wie E_1, deren große Halbachse die Länge 2,5 hat. Berechne für beide Ellipsen die numerische Exzentrizität.

5. Zeichne (mit Hilfe der Scheitelkrümmungs-Kreise) die Ellipse E_1 mit den Halbachsen $a = 3$ und $b = 1{,}5$ sowie die beiden Brennpunkte. Zeichne dann die Ellipse E_2 mit der gleichen numerischen Exzentrizität wie E_1, deren große Halbachse die Länge 4 hat. Berechne für beide Ellipsen die lineare Exzentrizität.

6. Der Komet Halley läuft auf einer Ellipsenbahn um die Sonne. Ein Umlauf dauert etwa 76 Jahre. Seine kleinste Entfernung bis zur Sonne ist $87{,}8 \cdot 10^6$ km, seine größte $5232{,}5 \cdot 10^6$ km. Berechne die Werte a, b, e und ε seiner Ellipsenbahn.

7. Berechne allgemein a, b, e und ε aus r_{min} und r_{max} einer Planetenbahn.

8. Von einer Ellipse mit $a = 5$ kennt man $F_1(-3|0)$ und $F_2(3|0)$. Konstruiere die Ellipsenpunkte, die von F_1 die Entfernungen 3, 5, 6 und 7 haben und zeichne damit näherungsweise die Ellipse.

9. Zeichne zwei Punkte F_1 und F_2 mit 8 cm Entfernung und um jeden dieser Punkte Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, ..., 10 cm. Suche alle Schnittpunkte P mit $PF_1 + PF_2 = 12$ cm und verbinde sie zu einer Ellipse. Welche weiteren Ellipsen ($a = ?$) kannst du in dem Kreisgewirr entdecken? Zeichne sie!

Ellipsentangenten

Wenn nichts vermerkt ist, liegen Haupt- und Nebenachse in den Koordinatenachsen.

10. Gegeben: $F_1(-4|0)$, Ellipsenpunkt $P(3|-2{,}5)$
Konstruiere die Tangente in P und die vier Scheitel der Ellipse.

11. Gegeben: $F_1(-3|0)$, Tangente $y = 0{,}5x + 4$
Konstruiere den Berührpunkt P und die vier Scheitel der Ellipse.

12. Gegeben: Halbachse $a = 5$, Tangente $y = -0{,}5x + \times 4$
Konstruiere die Brennpunkte und die Nebenscheitel der Ellipse.

13. Gegeben: $F_2(4|0)$, $a = 5$, Tangente $y = -\frac{1}{3}x + 3{,}5$ mit Berührpunkt $P(3|2{,}5)$
Konstruiere den zweiten Brennpunkt und die vier Scheitel der Ellipse. (Die Ellipse liegt nicht symmetrisch zum Koordinatensystem!)

14. Gegeben: $F_1(-4|0)$, $a = 5$, Tangentensteigung $m = -0{,}5$
Konstruiere die Tangenten und die Berührpunkte.

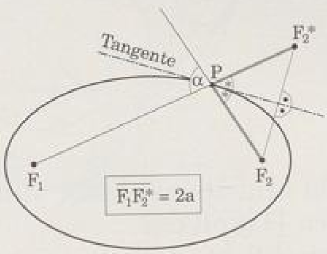
15. Gegeben: $F_1(-4|0)$, $a = 5$, Punkt $Q(1|4)$ außerhalb der Ellipse
Konstruiere die Tangenten durch Q.

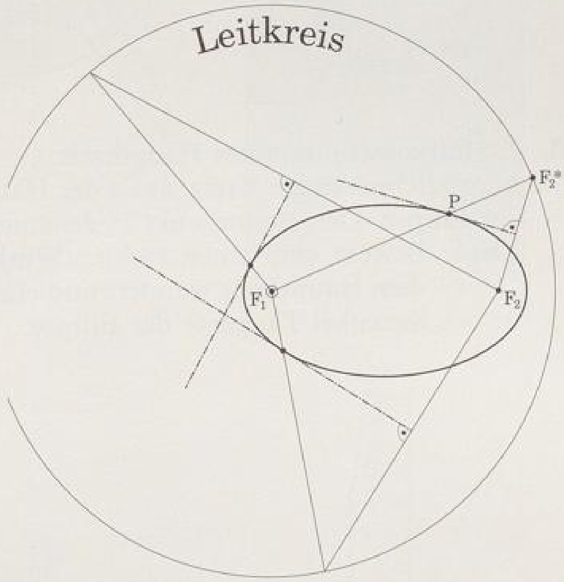
Leitkreis und Hüllgeraden

• 16. Leitkreis

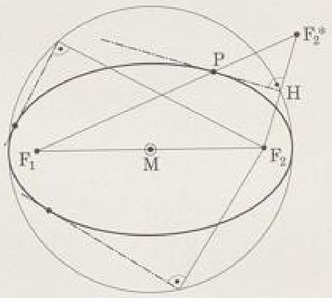
a) Zeige: Spiegelt man den Brennpunkt F_2 an irgendeiner Ellipsentangente (Spiegelpunkt F_2^*), dann liegen alle so erzeugten Spiegelpunkte auf dem Kreis um F_1 mit Radius 2a.

Dieser Kreis heißt **Leitkreis der Ellipse zum Brennpunkt F_1**.





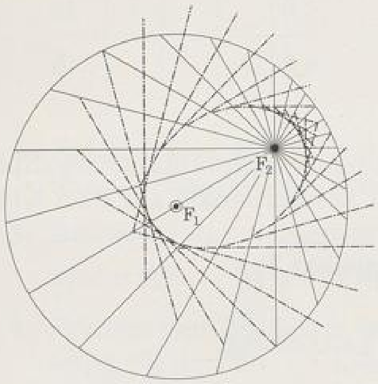
b) Zeige: Der Mittelpunkt H der Strecke $[F_2F_2^*]$ liegt auf dem Hauptkreis mit Radius a (siehe Aufgabe **a)**).

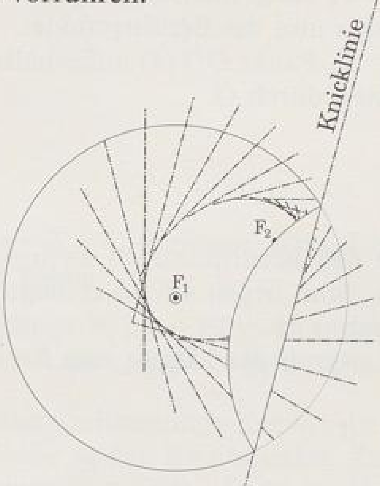


⁝17. 1. Hüllkonstruktion mit Leitkreis

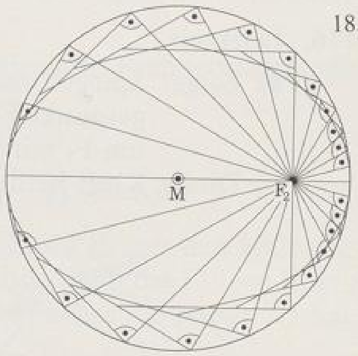
Man zeichnet einen Kreis; er ist der Leitkreis, sein Mittelpunkt F_1 ist ein Brennpunkt der Ellipse. Den andern Brennpunkt F_2 zeichnet man in den Leitkreis.

Zeige: Verbindet man F_2 mit irgendeinem Kreispunkt L, dann ist die Mittelsenkrechte von $[F_2L]$ Tangente der Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2. Diese Konstruktion lässt sich auch eindrucksvoll durch Falten einer Kreisscheibe aus Papier vorführen.





18.



⁝18. 2. Hüllkonstruktion mit Hauptkreis

Man zeichnet einen Kreis; er ist der Hauptkreis, sein Mittelpunkt M ist Mittelpunkt der Ellipse. Den Brennpunkt F_2 zeichnet man in den Hauptkreis.

Zeige: Bewegt man einen rechten Winkel (Geodreieck!) so, dass sein Scheitel auf dem Hauptkreis wandert und ein Schenkel durch F_2 geht, dann ist der andere Schenkel Tangente der Ellipse.