Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

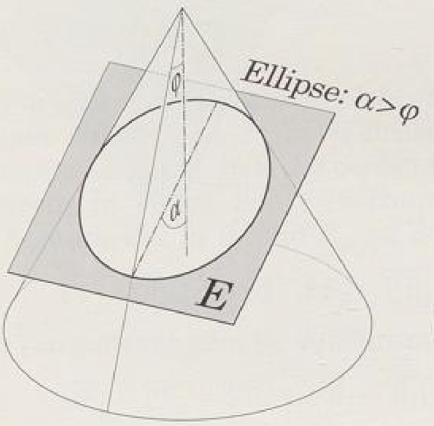
II. Kegelschnitte

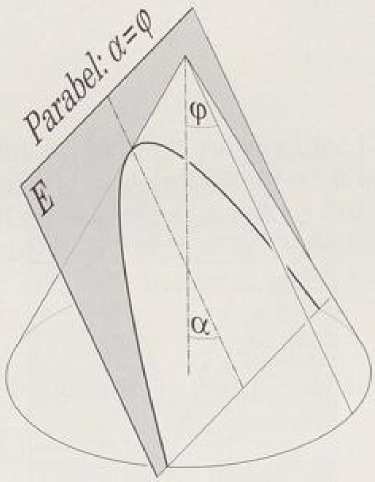
urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

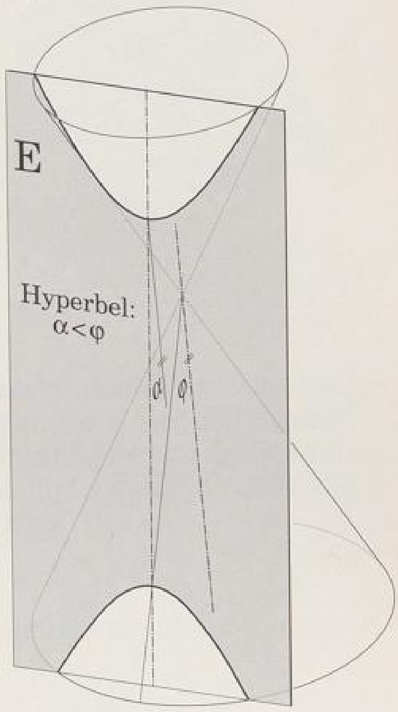
II. Kegelschnitte

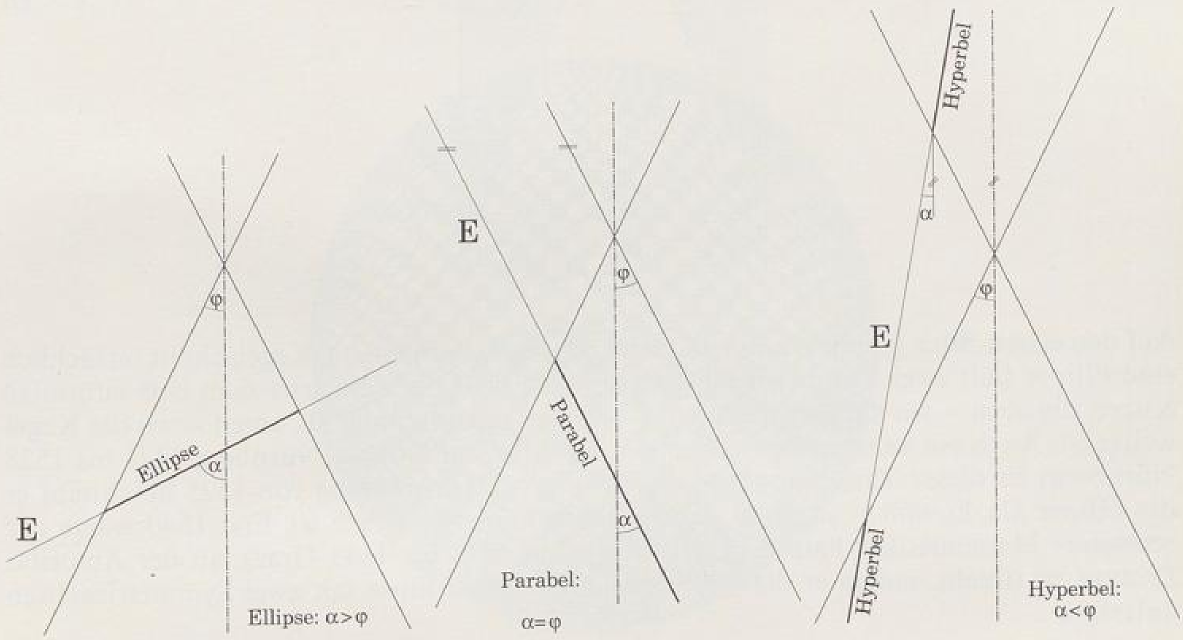
1. Überblick

In der Vorbemerkung haben wir schon erwähnt, dass beim Schnitt von Kegel und Ebene drei Typen von Kurven entstehen können. Welcher entsteht, hängt ab
vom halben Öffnungswinkel φ des Kegels und
vom Winkel α, den Kegelachse und Schnittebene bilden:
für $\alpha > \varphi$ entsteht eine Ellipse,
für $\alpha = \varphi$ eine Parabel und
für $\alpha < \varphi$ eine Hyperbel.

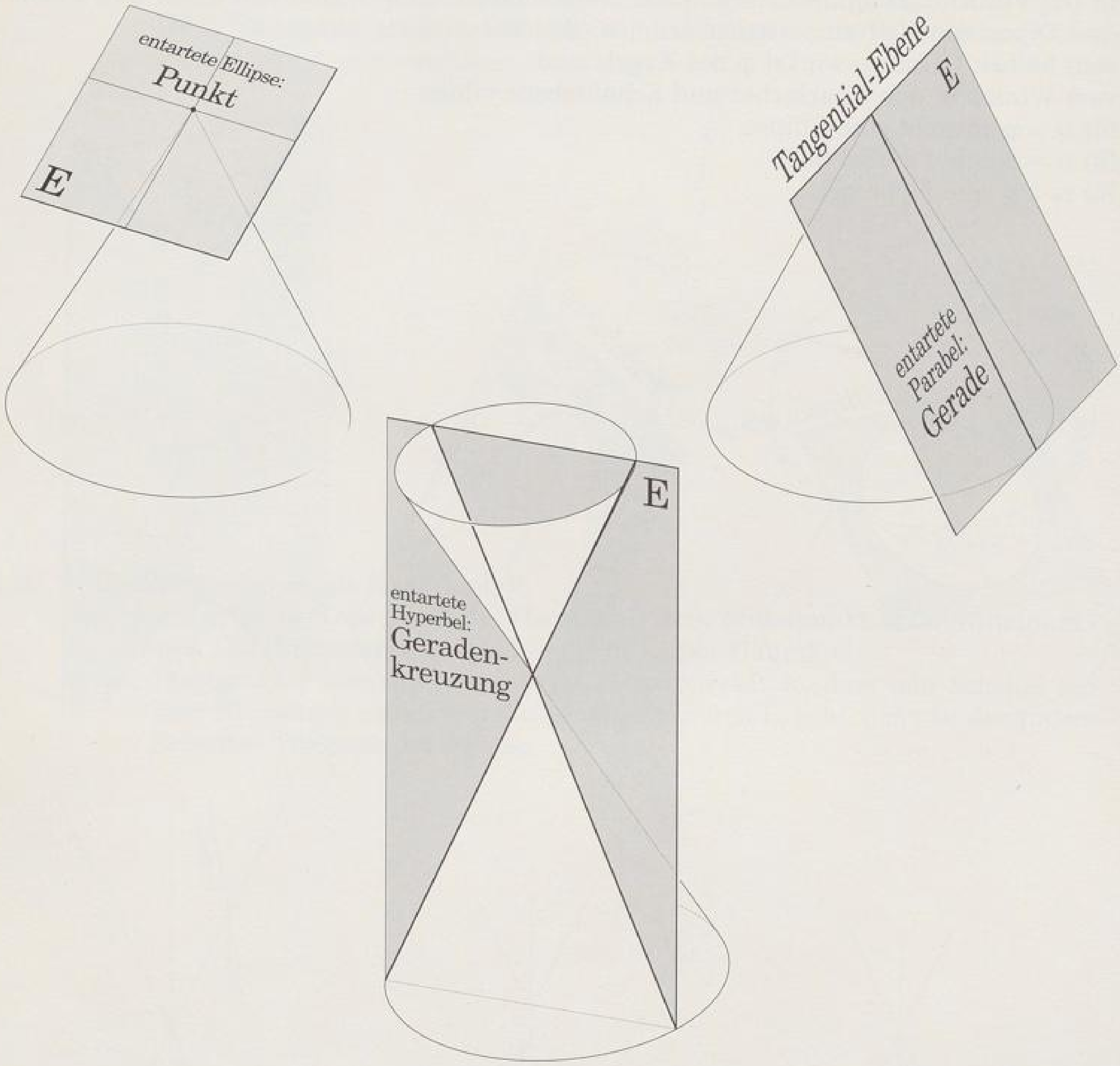




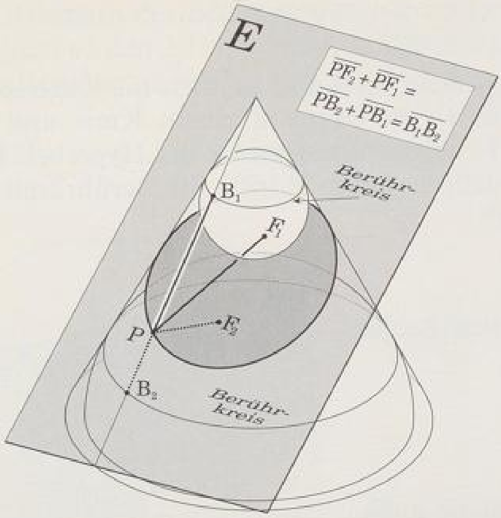


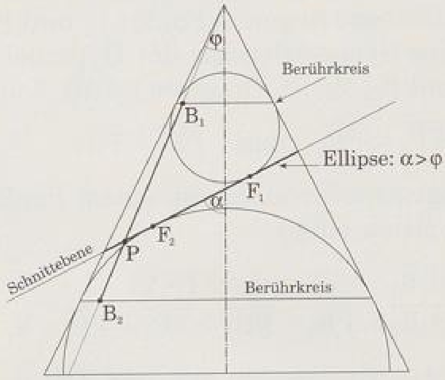


Wenn die Schnittebene die Kegelspitze enthält, dann entarten die Schnittkurven:
die Ellipse zu einem Punkt (Kegelspitze),
die Parabel zu einer Gerade (Mantellinie) und
die Hyperbel zu einer Geradenkreuzung (zwei Mantellinien).



Auf den ersten Blick glaubt man nicht recht, dass der geschlossene Kegelschnitt tatsächlich eine Ellipse (mit zwei Symmetrieachsen also) sein soll. Eher erwartet man eine eiförmige Kurve, die oben – wo der Kegel enger ist – stärker gekrümmt ist als unten – wo der Kegel weiter ist. Auch ein so scharfer Beobachter wie Albrecht DÜRER (Nürnberg 1471 bis 1528 Nürnberg) ist dieser Täuschung erlegen. In seiner *Underweysung* von 1525 beschreibt er die Ellipse als *Eierlini = darumb daß sie schier einem Ei gleich ist.* Erst 1640 wagte der schweizer Mathematiker Paul GULDIN (St. Gallen 1577 bis 1643 Graz), an der Autorität DÜRERS zu rütteln, indem er die wirkliche Gestalt der Ellipse mit zwei Symmetrieachsen aufzeigte.





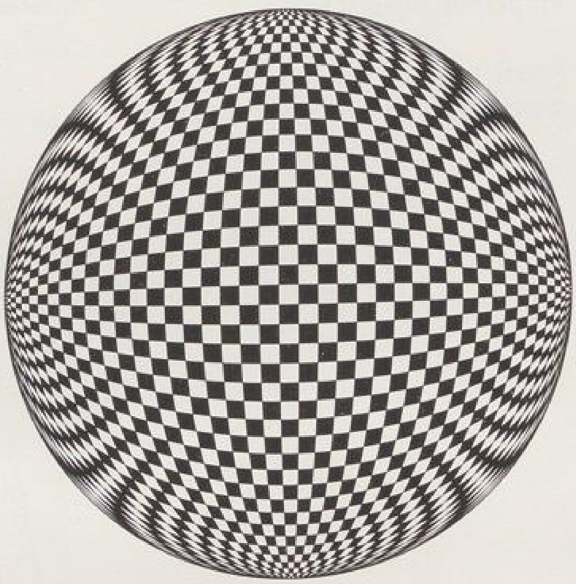
Für uns ist der Nachweis nicht schwer, weil wir auf die Idee Dandelins zurückgreifen können. Analog zum Zylinder stecken wir in den Kegel zwei Kugeln, die Kegel und Schnittebene berühren. Jede der beiden Kugeln berührt den Kegel in einem Kreis und die Schnittebene in einem Punkt (Brennpunkte F_1 und F_2). Die Mantellinie durch P trifft die Berührkreise in B_1 und B_2, sie ist Tangente beider Kugeln. Es gilt

$$\overline{PF_1} = \overline{PB_1} \quad \text{und} \quad \overline{PF_2} = \overline{PB_2}$$

(Tangentenabschnitte von einem Punkt aus an eine Kugel sind gleich lang.)

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = \overline{B_1B_2}\,(= \text{const.})$$

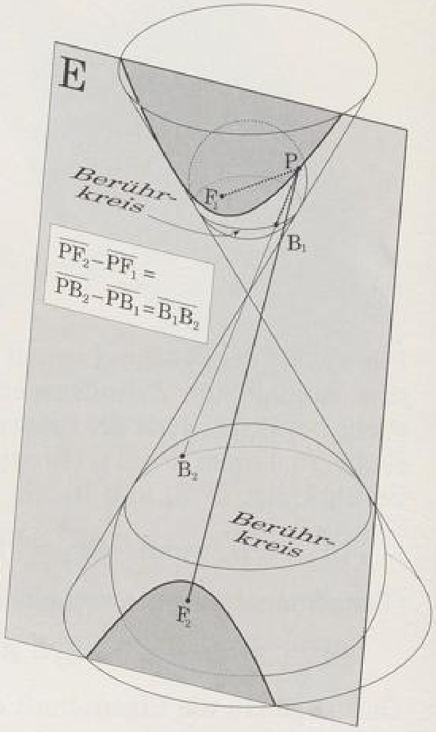
Das ist genau die Eigenschaft der Ellipse, die zur Gärtnerkonstruktion führt. (Siehe Kapitel 9. I, 3)



2. Die Hyperbel

Wieder stecken wir in den Kegel zwei Dandelin-Kugeln, jetzt aber so, dass die Kegelspitze dazwischen liegt. Jede der beiden Kugeln berührt den Kegel in einem Kreis und die Schnittebene in einem Punkt: F_1 und F_2. F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte der Hyperbel.** F_1F_2 ist eine **Symmetrieachse** der Hyperbel. Die Mantellinie durch P trifft die Berührkreise in B_1 und B_2, sie ist Tangente beider Kugeln. Es gilt

$$\overline{PF_1} = \overline{PB_1} \quad \text{und} \quad \overline{PF_2} = \overline{PB_2}$$



(Tangentenabschnitte von einem Punkt aus an eine Kugel sind gleich lang.)

$$\overline{B_1B_2} \quad \text{ist konstant } (= k)$$

$$\overline{B_1B_2} = \overline{PB_2} - \overline{PB_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = k \qquad (1)$$

Die Hyperbel besteht aus zwei Teilen, man nennt sie auch **Äste** der Hyperbel. Liegt P auf dem bei F_2 liegenden Ast, dann ergibt eine entsprechende Überlegung

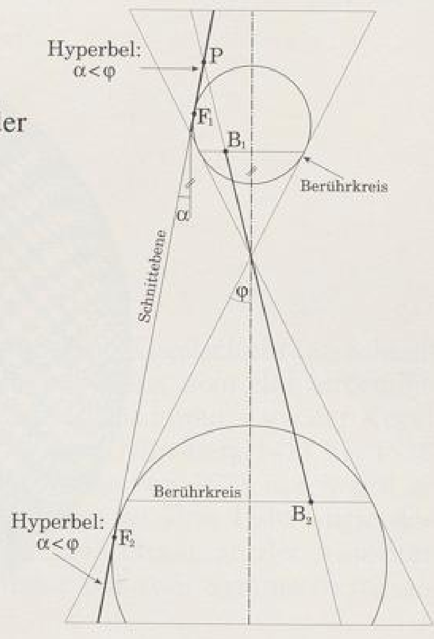
$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k \qquad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) lassen sich zur kennzeichnenden Eigenschaft der Hyperbel zusammenfassen:

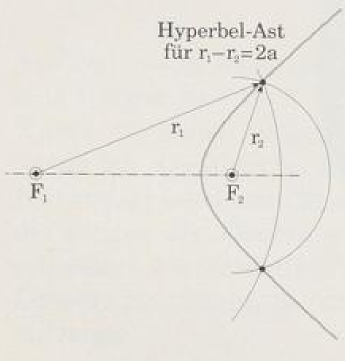
$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = k\,.$$

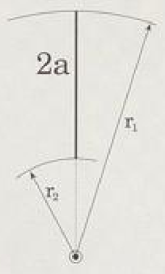
Für jeden Hyperbelpunkt P ist der Betrag der Differenz seiner Entfernungen von F_1 und F_2 eine Konstante. Diese Definition unterscheidet sich von der der Ellipse nur im Rechenzeichen! Wie bei der Ellipse bezeichnet man die Konstante k mit 2a

$$\boxed{\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a} \qquad \text{Hyperbel-Eigenschaft}$$

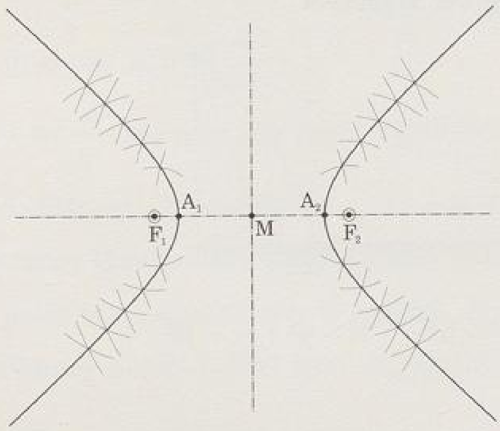


Aufgrund dieser Eigenschaft können wir jetzt Punkte der Hyperbel konstruieren, wenn F_1, F_2 und a bekannt sind.





Der Betrag in der Bedingung $|r_1 - r_2| = 2a$ erlaubt eine Vertauschung von r_1 und r_2 und ermöglicht so den 2. Hyperbel-Ast. Dieser ist symmetrisch zum 1. Ast, Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte von F_1 und F_2.



Bezeichnungen

Das Symmetriezentrum M heißt **Mittelpunkt** der Hyperbel.
Die Schnittpunkte A_1, A_2 von Hyperbel und einer Symmetrieachse heißen **Scheitel**. Dabei gilt

$$\overline{A_1F_2} - \overline{A_1F_1} = 2a \quad \text{oder wegen} \quad \overline{A_1F_1} = \overline{A_2F_2}$$

$$\underbrace{\overline{A_1F_2} - \overline{A_2F_2}}_{\overline{A_1A_2}} = 2a$$

$$\overline{A_1M} - \overline{MA_2} = a, \quad \text{a heißt } \textbf{reelle Halbachse.}$$

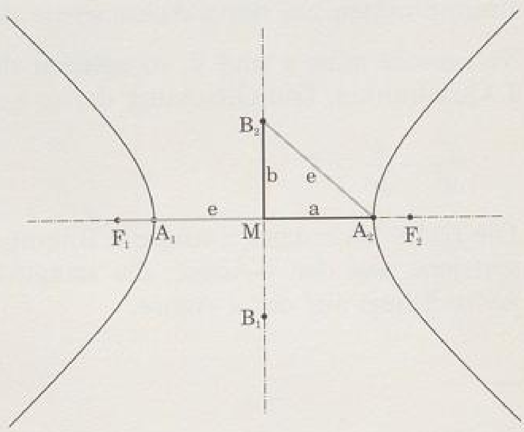
$$\overline{F_1M} = \overline{F_2M} = e, \quad \text{e heißt } \textbf{lineare Exzentrizität.}$$

$$\frac{a}{b} = \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ heißt } \textbf{numerische Exzentrizität.}$$

Ähnlich wie bei der Ellipse definiert man eine zweite Halbachse b durch

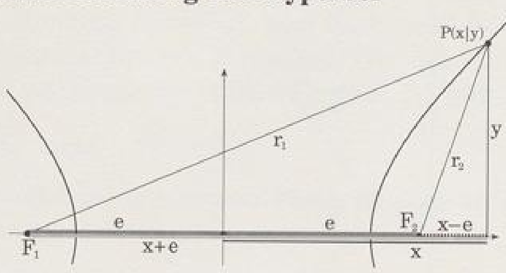
$$\boxed{b^2 = e^2 - a^2}$$

Trägt man b von M aus auf der 2. Symmetrieachse ab, so ergeben sich zwei Punkte B_1 und B_2, die aber nicht auf der Hyperbel liegen. Deshalb nennt man b **imaginäre Halbachse**. Im Gegensatz zur Ellipse muss hier a nicht größer sein als b.



Ähnlich wie bei der Ellipse lassen sich auch die Punkte der Hyperbel mit einer Gleichung festlegen. Wir verwenden dafür nur die Beziehung $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$.

Die Mittelpunkt-Gleichung der Hyperbel



$r_1^2 = y^2 + (x+e)^2 \qquad e^2 = a^2 + b^2 \qquad r_2^2 = y^2 + (x-e)^2$

$$
\begin{aligned}
|r_1 + r_2| &= 2a \\
r_1 &= \pm 2a - r_2 \quad \| \text{ quadrieren} \\
r_1^2 &= 4a^2 \pm 4ar_2 + r_2^2 \\
\cancel{y^2}(x+e)^2 &= 4a^2 \pm 4ar_2 + \cancel{y^2} + (x-e)^2 \\
\cancel{x^2} + 2xe + \cancel{e^2} &= 4a^2 \pm 4ar_2 + \cancel{x^2} - 2xe + \cancel{e^2} \\
xe - a^2 &= \pm ar_2 \quad \| \text{ quadrieren} \\
e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 &= a^2[y^2 + (x-e)^2] \\
e^2x^2 - \cancel{2a^2ex} + a^4 &= a^2y^2 + a^2x^2 - \cancel{2a^2ex} + a^2e^2 \\
x^2\underbrace{(e^2 - a^2)}_{b^2} - y^2a^2 &= a^2\underbrace{(e^2 - a^2)}_{b^2} \\
b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \quad \| : (a^2b^2)
\end{aligned}
$$

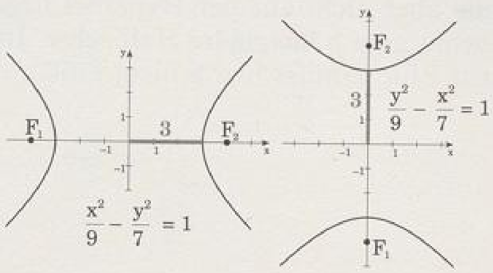
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Das ist die Mittelpunkt-Gleichung der Hyperbel mit der reellen Halbachse a und den Brennpunkten auf der x-Achse sowie der imaginären Halbachse b auf der y-Achse.

Vertauscht man x und y, so spiegelt man die Hyperbel an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten. Die Gleichung der so gespiegelten Hyperbel ist

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Die reelle Halbachse a und die Brennpunkte liegen jetzt auf der y-Achse, die imaginäre Halbachse b liegt auf der x-Achse.

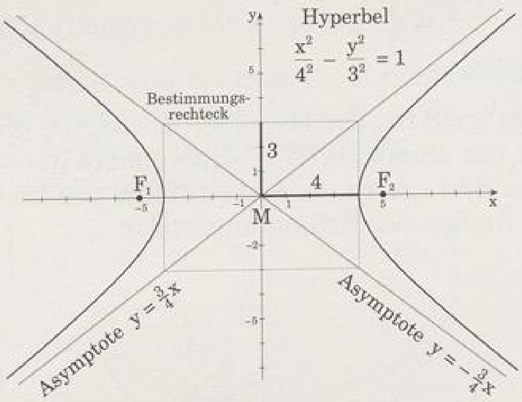


Die Asymptoten der Hyperbel

Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ lässt sich umformen zu $|y| = \frac{b}{a}|x|\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$. Speziell im I. Quadranten $(x > 0,\ y > 0)$ ergibt sich $y = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$.

Für sehr große Werte von x ist $\frac{a^2}{x^2}$ fast null, das heißt, die Hyperbel unterscheidet sich fast nicht mehr von der Gerade mit der Gleichung $y = \frac{b}{a}x$. Aus Symmetriegründen gilt das Entsprechende in den anderen Quadranten. Die beiden Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}x$ heißen **Asymptoten** der Hyperbel. Es gilt: Für große $|x|$-Werte (also auch für große $|y|$-Werte) unterscheidet sich die Hyperbel kaum noch von ihren Asymptoten.

Wegen $\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} < \frac{b}{a}x$ (für $x > 0$) verläuft die Hyperbel im I. Quadranten immer unterhalb ihrer Asymptote. In größerer Entfernung von den Scheiteln geben die Asymptoten den Verlauf der Hyperbel im Groben wieder. Man zeichnet die Asymptoten als Verlängerungen der Diagonalen des *Bestimmungsrechtecks* mit Mittelpunkt M und den Seiten 2a und 2b.



$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Hyperbel:} & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\[2ex] \text{Asymptoten:} & y = \pm\frac{b}{a}x \end{array}}$$

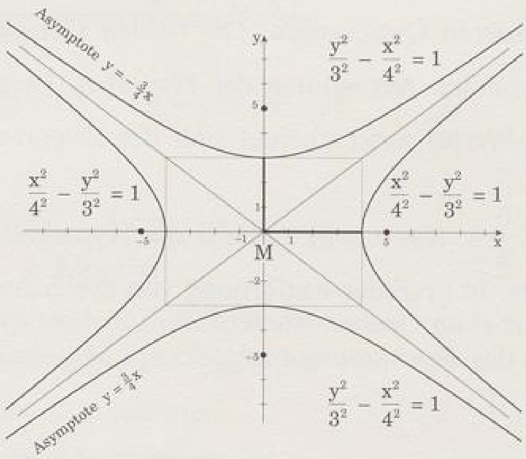
Zu einem Bestimmungsdreieck gibt es zwei Hyperbeln mit denselben Asymptoten.

Die eine hat die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ihre reelle Halbachse ist a, ihre Brennpunkte liegen auf der x-Achse.

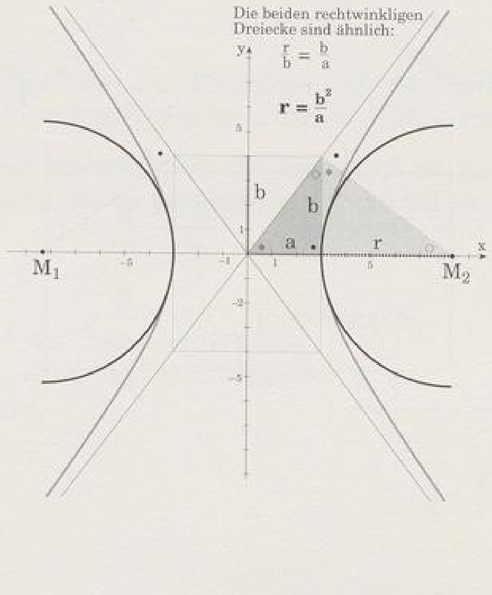
Die andre hat die Gleichung $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

ihre reelle Halbachse ist b, ihre Brennpunkte liegen auf der y-Achse.

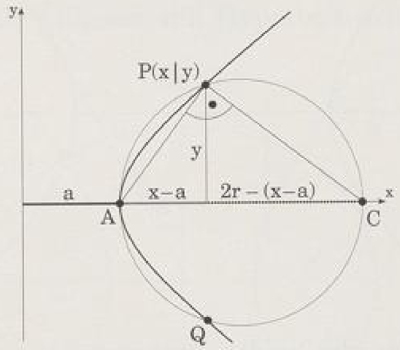


* Die Scheitel-Krümmungskreise

Wie bei der Ellipse gibt es auch bei der Hyperbel Kreise, die die Hyperbel in der Umgebung ihrer Scheitel recht gut annähern. Die Mittelpunkte liegen aus Symmetriegründen auf der reellen Achse. Das Bild erklärt die Konstruktion des Mittelpunkts und die Herleitung der Formel für den Radius der Krümmungskreise.



Die mathematische Begründung ist ähnlich wie bei der Ellipse.
Ein Kreis mit Mittelpunkt auf der x-Achse, der durch einen Hyperbelscheitel geht, schneidet die Hyperbel im Allgemeinen in zwei weiteren Punkten P und Q.



Für die Koordinaten von P und Q gelten zwei Gleichungen:

I. $y^2 = (x - a)(2r - x + a)$ (Höhensatz im Dreieck ACP)

II. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ (Hyperbelgleichung)

Gleichsetzen liefert: $(x - a)(2r - x + a) = \frac{b^2}{a^2}(x - a)(x + a)$

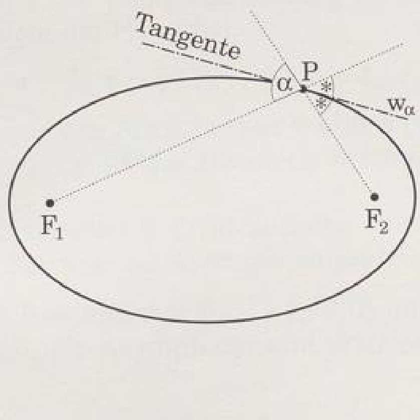
das ergibt eine quadratische Gleichung für x: $(x - a)\left[(2r - x + a) - \frac{b^2}{a^2}(x + a)\right] = 0$.

Eine Lösung ist $x_1 = a$, sie gehört zum Scheitel. r soll nun so bestimmt werden, dass auch die 2. Lösung x_2, für die die Klammer [...] gleich null ist, den Wert a hat. Geometrisch bedeutet das, dass die Punkte A, P und Q zusammenfallen.
Setzen wir in [...] a für x ein, so ergibt sich für r

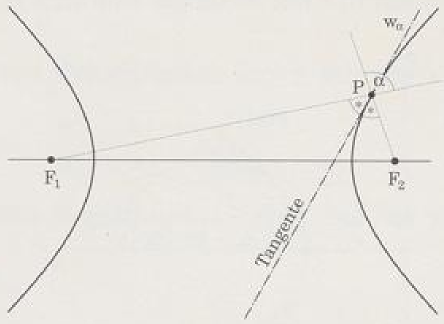
$$\left[(2r - a + a) - \frac{b^2}{a^2}(a + a)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r = 2\frac{b^2}{a} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{b^2}{a}$$

***Tangenten der Hyperbel**

Bei der Ellipse ist die Winkelhalbierende des Außenwinkels bei P im Dreieck F_1F_2P Tangente im Punkt P.



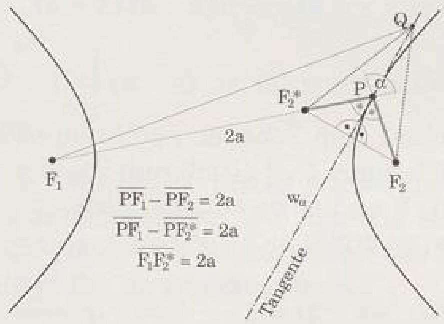
Ähnliches gilt bei der Hyperbel: Die Halbierende des Innenwinkels bei P im Dreieck F_1F_2P ist Tangente im Punkt P.



Zum Beweis spiegelt man einen der beiden Brennpunkte an der Winkelhalbierenden w_α (Spiegelpunkt F_2^*). Wegen Achsensymmetrie ist $\overline{PF_2} = \overline{PF_2^*}$.
Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt dann (Dreieck-Ungleichung!):

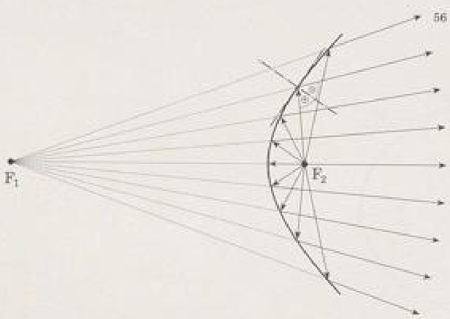
$$\overline{QF_1} - \overline{QF_2} = \overline{QF_1} - \overline{QF_2^*} < \overline{QF_2^*} + \overline{F_1F_2^*} - \overline{QF_2^*} = \overline{F_1F_2^*} = 2a$$

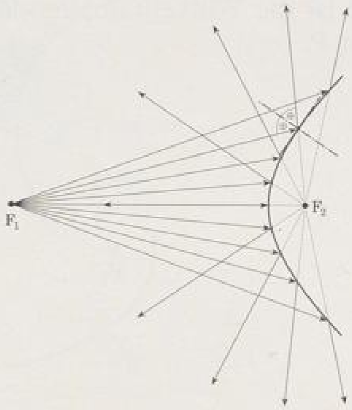
Also gilt $\overline{QF_1} - \overline{QF_2} < 2a \Rightarrow$ Q liegt nicht auf der Hyperbel $\Rightarrow w_\alpha$ ist Tangente im Punkt P.



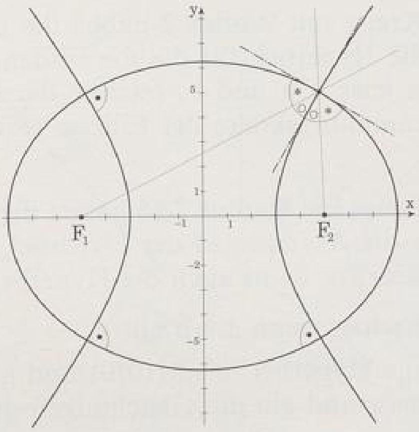
Folgerungen

a) Licht, das von einem Brennpunkt ausgeht, wird an der Hyperbel so reflektiert, als ob es vom andern Brennpunkt käme.





b) Zeichnet man zu zwei gegebenen Brennpunkten eine zugehörige Ellipse und Hyperbel, so schneiden sich diese in vier Punkten. In jedem Schnittpunkt sind die Tangenten von Hyperbel beziehungsweise Ellipse die Winkelhalbierenden des Innen-, beziehungsweise Außenwinkels der Brennstrahlen, das heißt, sie stehen aufeinander senkrecht. Man sagt auch: Konfokale Ellipsen und Hyperbeln schneiden sich rechtwinklig.



Hyperbel-Aufgaben

Bis auf Aufgabe **12.** liegen alle erwähnten Hyperbeln symmetrisch zum Ursprung und haben die Brennpunkte auf der x-Achse.

1. Zeichne die zwei Hyperbeln mit $a = 2$, $b = 1$ und $a = 4$, $b = 3$ in ein und dasselbe Koordinatensystem und berechne die Schnittpunkte.

2. Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel h mit $A_2(4|0)$ durch $P(5|3)$?

3. Bestimme die Gleichung der Hyperbel; zeichne die Scheitel, die Brennpunkte und die Asymptoten; skizziere die Hyperbel.

a) $a = 3,\ b = 4$ **b)** $a = 2,\ e = \sqrt{13}$ **c)** $b = 1,\ e = \sqrt{2}$

4. Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 6 (waagrecht). Skizziere die Hyperbeln, für die das Rechteck Bestimmungsrechteck ist.

5. Eine Hyperbel hat den Scheitel $A_2(2|0)$ und den Brennpunkt $F_2\left(2\sqrt{2}\,|0\right)$. Bestimme a, b und e. Zeichne die Asymptoten und skizziere die Hyperbel.

6. Eine Hyperbel hat die Brennpunkte $F_{2,1}(\pm 3{,}75|0)$ und geht durch $P(5|3)$. Konstruiere die Scheitel, die Asymptoten und skizziere die Hyperbel.

7. Eine Hyperbel hat die Asymptoten $y = \pm 2{,}4x$ und einen Scheitel $A_1(-2{,}5|0)$. Bestimme a, b und e. Skizziere die Hyperbel.

8. Die Gerade durch $P(1|0)$ und $Q(-2|-3)$ berührt eine Hyperbel mit den Brennpunkten $F_{2,1}(\pm 3|0)$. Konstruiere den Berührpunkt B, die Scheitel und die Asymptoten; skizziere die Hyperbel.

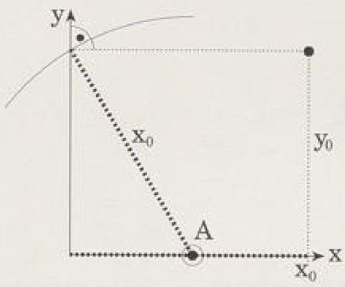
9. Die Mittelpunkte zweier Kreise mit Radius 2 haben die Entfernung 5.
Zeichne die Ellipse und die Hyperbel, für die die beiden Kreise Krümmungskreise sind. Anleitung: Berechne jeweils a und b, zeichne die Asymptoten der Hyperbel und die andern beiden Krümmungskreise der Ellipse. (Für die Ellipse: Mittelpunkt $M(0|0)$, Querformat)

10. Die Mittelpunkte zweier Kreise mit Radius 2,25 haben die Entfernung 12,5. Zeichne die Kreise und *konstruiere* die Asymptoten der Hyperbel, für die die beiden Kreise Krümmungskreise sind. Skizziere dann auch die Hyperbel.

11. Eine Hyperbel heißt **gleichseitig**, wenn $a = b$ gilt.

a) Zeichne eine gleichseitige Hyperbel mit $M(0|0)$ und $a = 2$. Berechne e und den Krümmungskreis-Radius r und gib die Gleichungen der Asymptoten an.

b) Begründe folgende Konstruktion für die Punkte $(x_0|y_0)$ einer gleichseitigen Hyperbel.



12. Zeichne die Halbachsen und die Lage der Brennpunkte einer Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ (siehe auch Aufgabe 19.).

13. Zeige:
Für den Punkt $P(e|p)$ über dem Brennpunkt von Ellipse (Mittelpunkt $M(0|0)$, Querformat) oder Hyperbel gilt

$$p = \frac{b^2}{a}$$

p heißt **Formparameter**. p ist auch der Radius der Krümmungskreise.

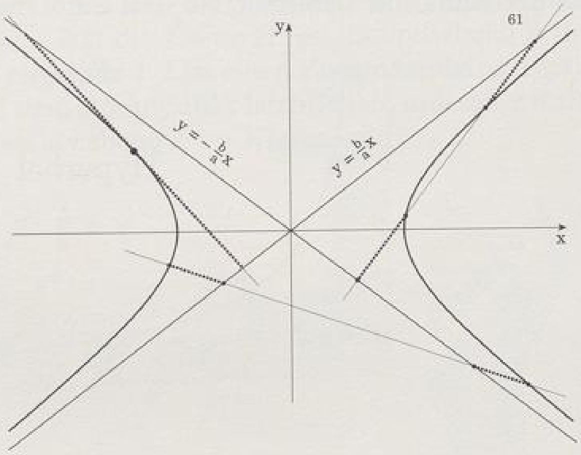
14. Gegeben sind die Hyperbel h: $4x^2 - 9y^2 = 16^2$ und die Gerade g: $y = 2x - 24$.

a) Berechne die Schnittpunkte A und B der Gerade und der Hyperbel.

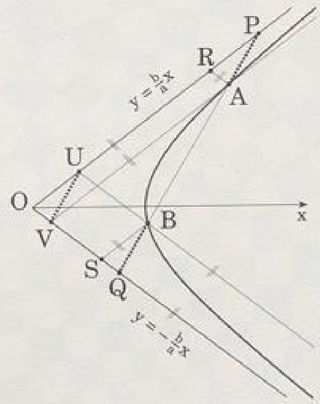
b) Berechne die Schnittpunkte P und Q der Gerade und der Hyperbel-Asymptoten.

•c) Berechne den Mittelpunkt M_{AB} von [AB] und M_{PQ} von [PQ]. Folgerung?

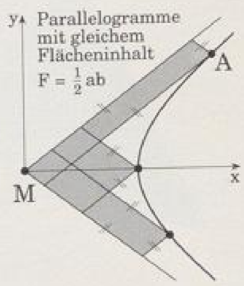
15. Gegeben sind die Hyperbel h: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ und die Gerade g: $y = mx + t$. A und B seien die Schnittpunkte von g und h, P und Q seien die Schnittpunkte von g und den Hyperbel-Asymptoten. Berechne die x-Werte der Mittelpunkte von [AB] und [PQ] – VIETA erspart viel Rechnerei! – und begründe damit den Satz: Bei jeder Hyperbel-Sekante sind die beiden Abschnitte zwischen Hyperbel und Asymptote gleich lang.



16. A und B seien Punkte der Hyperbel h: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
Zeige mit Hilfe des Satzes der vorigen Aufgabe: Die Parallelogramme OVAR und OSBU sind flächengleich.
Folgere dazu zunächst aus dem Satz der vorigen Aufgabe, dass die Strecken [AB], [BQ] und [UV] gleich lang und parallel sind.

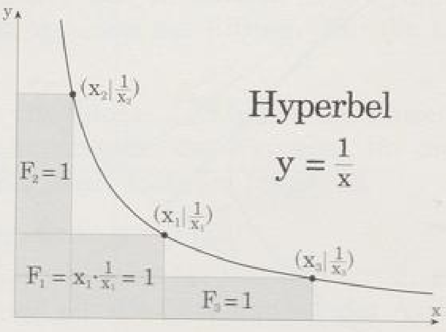


17. 1. Flächensatz
Zeige:
Zeichnet man durch einen Hyperbelpunkt A die Parallelen zu den Asymptoten, so entsteht ein Parallelogramm mit den Gegenecken A und M (Mittelpunkt der Hyperbel). Dieses Parallelogramm hat für jeden Hyperbelpunkt den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ ab.

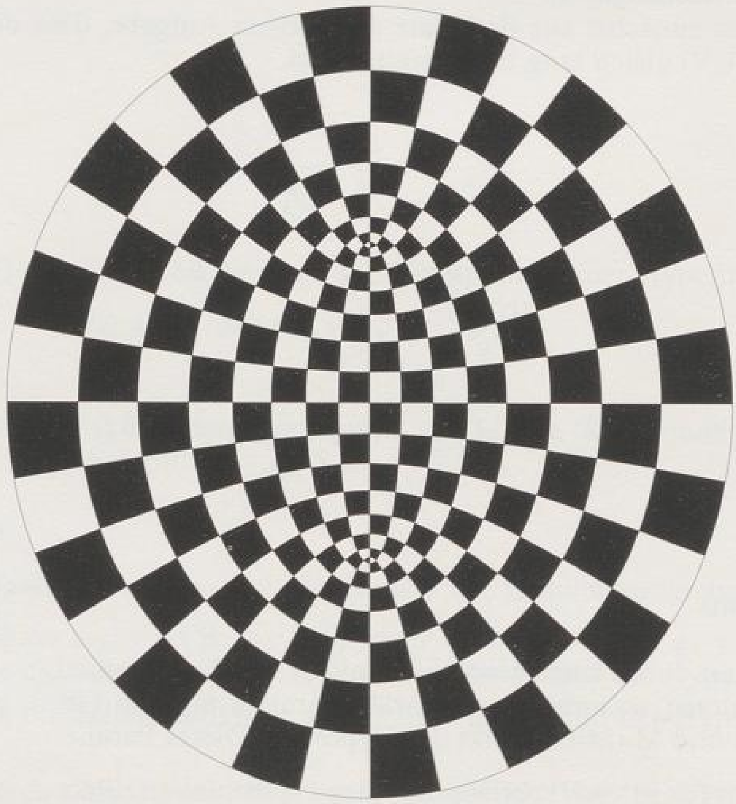


18. Umkehrung des 1. Flächensatzes
Zeige:
Vom 1. Flächensatz gilt auch die Umkehrung:
Zeichnet man in einen Winkel flächengleiche Parallelogramme, bei denen eine Ecke im Scheitel liegt und die Seiten parallel zu den Schenkeln sind, dann liegen die freien Ecken auf einem Hyperbelast.

19. Zeige: Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel. Was sind ihre Asymptoten?
(Tip: **17.** und **18.**)



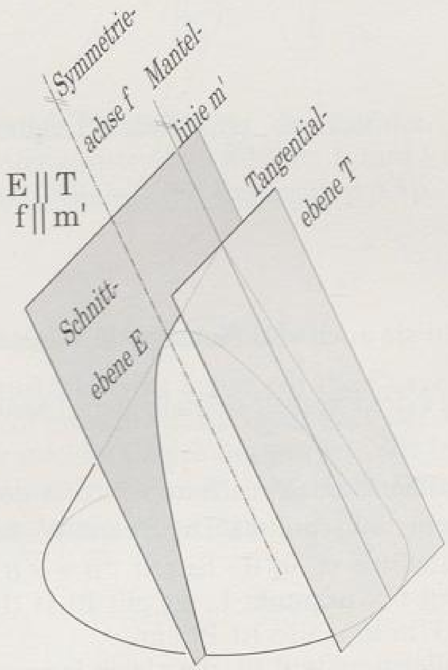
20. 2. Flächensatz
Zeige:
Jede Hyperbel-Tangente und die Asymptoten schließen ein Dreieck vom Flächeninhalt $a \cdot b$ ein.

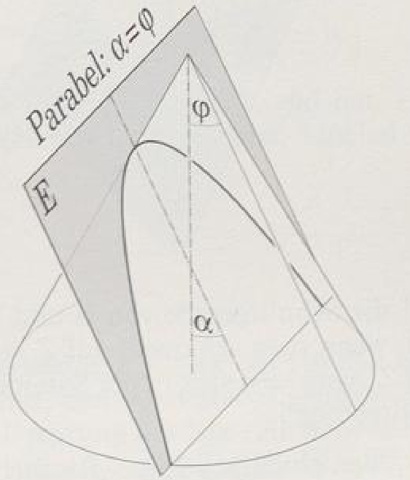


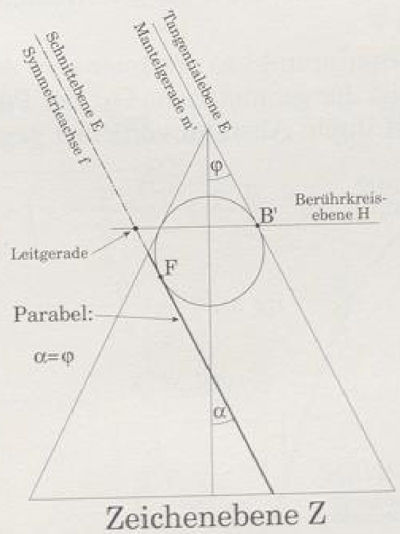
3. Die Parabel

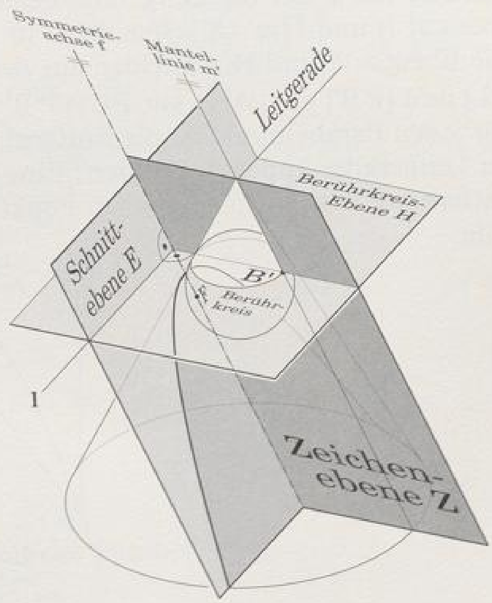
Brennpunkt und Leitgerade

Eine Ebene, die mit einem Kegel genau eine Mantellinie gemeinsam hat, heißt **Tangentialebene**. Schneidet eine Ebene E einen Kegel parallel zu einer Tangentialebene T, so ergibt sich als Kegelschnitt eine Parabel. In diesem Fall gibt es nur eine Dandelin-Kugel. Sie berührt den Kegel in einem Kreis und die Schnittebene in einem Punkt, dem **Brennpunkt F**. Der Dandelin-Berührkreis legt die Ebene H fest. Schnittebene E und Berührkreisebene H schneiden sich in der **Leitgerade l**. Um einen Zusammenhang zwischen den Parabelpunkten, der Leitgerade und dem Brennpunkt herzuleiten, müssen wir uns über die Lage dieser drei Ebenen und der Zeichenebene Z im Klaren sein:

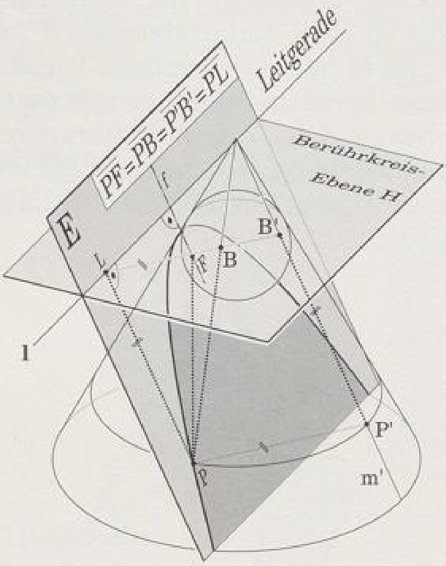


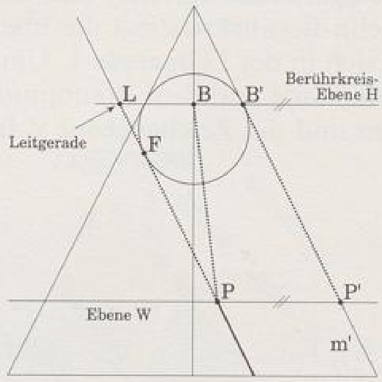






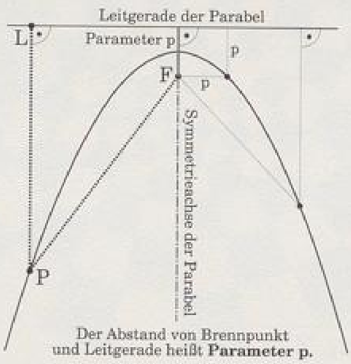
Die Tangentialebene T berührt den Kegel in der Mantellinie m'.
m' und die Kegelachse bestimmen die Zeichenebene Z.
Schnittebene E, Tangentialebene T und Berührkreisebene H stehen senkrecht auf Z; man sieht E, T und H deshalb als Geraden, wenn man senkrecht auf die Zeichenebene Z schaut.



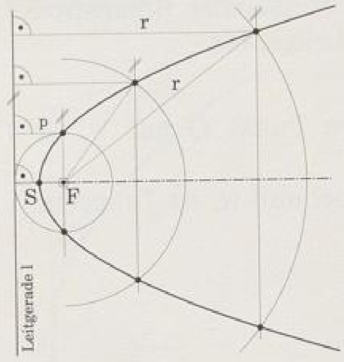


Weil l die Schnittgerade von H und E ist, steht sie auch senkrecht auf Z; sie erscheint als Punkt, wenn man senkrecht auf Z schaut.
E und Z schneiden sich in der Symmetrieachse f der Parabel; deshalb steht f senkrecht auf der Leitgerade l.

Wir wählen einen beliebigen Parabelpunkt P. Die Mantellinie durch P trifft den Berührkreis in B. Es gilt $\overline{PF} = \overline{PB}$ (gleich lange Tangentenabschnitte). Die Ebene W, die parallel ist zu H und durch P geht, schneidet die Mantellinie m' in B'. Es gilt $\overline{PB} = \overline{P'B'}$.
Das Lot von P auf die Leitgerade l erzeugt den Lotfußpunkt L. Es gilt $PL \parallel f$ (beide sind Lote auf l) und $f \parallel m'$ (Z schneidet E in f und T in m'), also ist $PL \parallel m'$.
Die Ebenen W und H schneiden aus den Parallelen m' und PL die gleich langen Strecken [PL] und [P'B'] aus. Also gilt $\overline{\mathbf{PL}} = \overline{P'B'} = \overline{PB} = \overline{\mathbf{PF}}$.
Für jeden Parabelpunkt ist die Entfernung vom Brennpunkt so groß wie sein Abstand von der Leitgerade. Anders formuliert: Eine Parabel ist der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernung von einem gegebenen Punkt gleich ist ihrem Abstand von einer gegebenen Gerade.



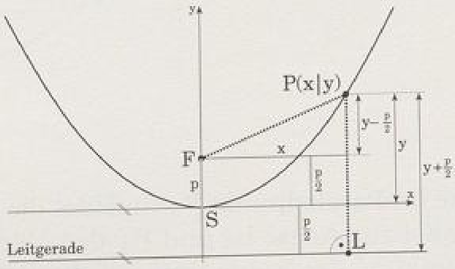
Diese Eigenschaft gibt uns eine einfache Möglichkeit, Parabelpunkte zu konstruieren, wenn die Leitgerade l und der Brennpunkt F gegeben sind: Man schneidet eine Parallele zur Leitgerade im Abstand r mit einem Kreis um F mit Radius r.



S ist derjenige Parabelpunkt, der von der Leitgerade den kleinsten Abstand hat. Er halbiert die Abstandstrecke zwischen F und l und heißt **Scheitel** der Parabel. Scheitel S und Brennpunkt F haben die Entfernung 0,5 p.

Die Scheitelgleichung der Parabel

Im Algebra-Unterricht haben wir die Kurve mit der Gleichung $y = ax^2$ als Parabel kennen gelernt. Wir müssen jetzt zeigen, dass der Kegelschnitt, den wir Parabel genannt haben, auch einer solchen Gleichung genügt. Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitel und die y-Achse durch den Brennpunkt. Aus der Eigenschaft $\overline{PF} = \overline{PL}$ leiten wir die Parabelgleichung her.



$$\overline{PF} = \overline{PL}$$

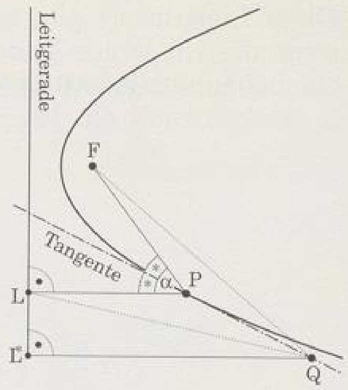
$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2} \quad \| \text{ quadrieren}$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - yp + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{y^2} + yp + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

$$x^2 = 2py$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2p}x^2} \quad \text{Scheitelgleichung der Parabel}$$

*Tangenten der Parabel

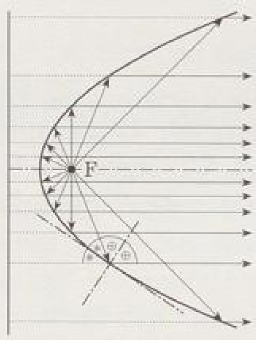


Wie bei Ellipse und Hyperbel ist auch die Parabeltangente die Winkelhalbierende geeigneter Geraden: Im Parabelpunkt P halbiert sie den Winkel der Brennstrecke [PF] und des Lots [PL] auf die Leitgerade.

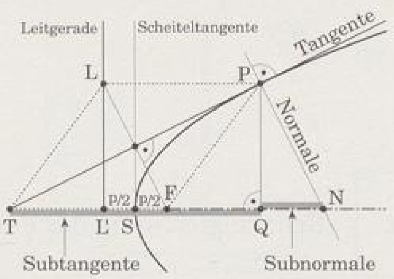
Beweis
Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt: $\overline{QL^*} < \overline{QL} = \overline{QF}$.
Also liegt Q nicht auf der Parabel und w_α ist Tangente.

Folgerungen

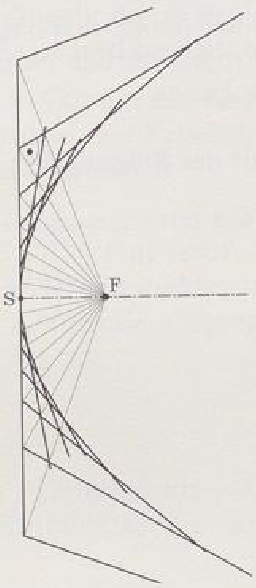
a) Licht, das vom Brennpunkt ausgeht, wird an der Parabel so reflektiert, dass es die Parabel senkrecht zur Leitgerade, also parallel zur Achse verlässt. (Scheinwerfer)
Umgekehrt: Strahlung, die parallel zur Achse einfällt, wird im Brennpunkt gebündelt. (Parabol-Antenne)



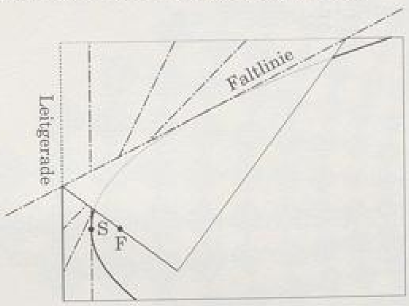
b) Die Tangente im Parabelpunkt P schneidet die Parabelachse im Punkt T. Weil $\overline{PL} = \overline{PF}$ und PL parallel zur Achse ist und PT den Winkel bei P halbiert, ist PLTF eine Raute. Der Mittelpunkt M der Raute liegt auf der Scheiteltangente, weil diese Mittelparallele im Dreieck FLL′ ist.

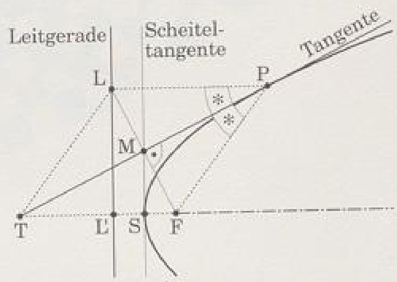


Auf dieser Eigenschaft beruht die Konstruktion der Parabel als Hüllkurve ihrer Tangentenschar: Man zeichnet die Scheiteltangente und den Brennpunkt. Gleitet der Scheitel eines rechten Winkels auf der Scheiteltangente und geht ein Schenkel durch den Brennpunkt, dann ist der andere Schenkel Tangente der Parabel.



Die Eigenschaft, dass die Parabeltangente den Winkel zwischen Brennstrecke und Lot auf die Leitgerade halbiert, liegt auch der folgenden Faltkonstruktion zu Grunde: Auf einem Blatt markiert man einen Punkt als Brennpunkt. Die Blattkante ist dann die Leitgerade. Faltet man das Blatt so, dass die Kante auf dem Brennpunkt zu liegen kommt, dann ist die Knicklinie eine Parabeltangente.





Aus dem Bild mit der Raute liest man auch ab:

$$\overline{TF} = \overline{LP} = \overline{SQ} + \frac{p}{2}$$

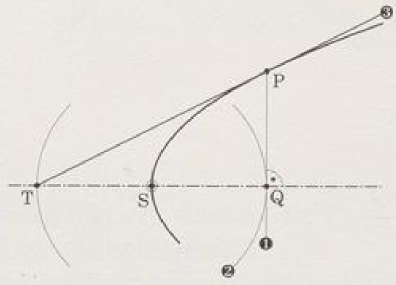
$$\overline{TF} = \overline{TS} + \frac{p}{2}$$

also ist $\overline{TS} = \overline{SQ}$, das heißt, S halbiert die **Subtangente** (senkrechte Projektion der Tangentenstrecke [PT] auf die Parabelachse).

Diese Eigenschaft erlaubt eine einfache Konstruktion der Tangente in einem Parabelpunkt: Man projiziert den Berührpunkt P senkrecht auf die Achse, das ist Q. Q an S gespiegelt ergibt T. PT ist die gesuchte Tangente.
Die **Normale** in P (Lot auf die Tangente) schneidet die Achse in N.
Dann gilt $\overline{TF} = \overline{FN}$, weil LF Mittelparallele im Dreieck TPN ist.
Damit gilt auch $\overline{QN} = \overline{L'F} = p$, und wir haben den Satz:
Die **Subnormale** [QN] (senkrechte Projektion der Normalstrecke [PN] auf die Parabelachse) hat für alle Parabelpunkte die Länge p.

Konstruktion der Parabeltangente mit der Subtangente

① Lot auf P auf Achse: Q
② Kreis um S mit $r = \overline{SQ}$ schneidet Achse in T
③ PT ist Tangente

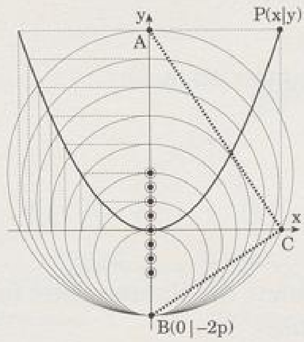


Aufgaben

1. Von einer Parabel ist der Brennpunkt F und die Leitgerade l bekannt.
Konstruiere einige Parabelpunkte und skizziere die Parabel.
Gib zur Kontrolle die fehlende Koordinate des Parabelpunkts P an.

a) l: $y = -1$ F(0|0) P(2|?)
b) l: $x = -1$ F(1|0) P(4|?)
c) l: $y = x$ F(2|−2) P(4|?)

2. Parabelkonstruktion von Werner
Der Nürnberger Geistliche Johannes Werner veröffentlichte in seinem Todesjahr 1522 eine einfache Konstruktion von Parabelpunkten. Beschreibe und begründe sie und führe sie für B(0|−3) aus.



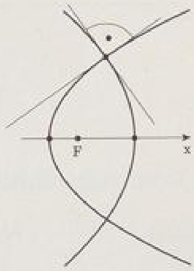
3. Zeige: Die Sehne, die im Brennpunkt senkrecht auf der Parabelachse steht, hat die Länge 2p.

4. Zeige: Für jeden Parabelpunkt P ist das Dreieck gleichschenklig, dessen Seiten auf Brennstrahl, Normale und Achse liegen.

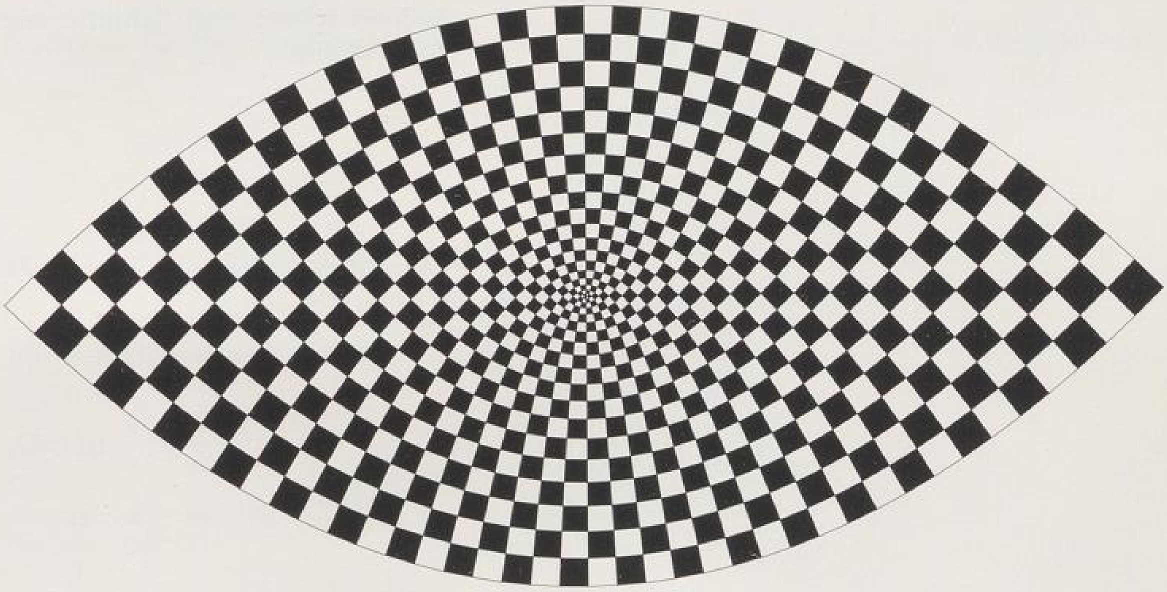
5. Eine Parabel mit Scheitel S(1|0) geht durch P(4|2); ihre Achse ist die x-Achse. Konstruiere die Tangente der Parabel P und bestimme aus der Zeichnung den Wert von p.

6. Eine Parabel mit Brennpunkt F(5|0) hat die Tangente mit der Gleichung $2y = x$; ihre Achse ist die x-Achse. Konstruiere den Scheitel, die Leitgerade und einige Parabelpunkte, darunter auch den Berührpunkt B.

7. Gegeben sind zwei konfokale entgegengesetzt geöffnete Parabeln mit gemeinsamer Achse.
Zeige: Die Tangenten in den Schnittpunkten stehen aufeinander senkrecht. (Dazu sagt man: Konfokale Gegenparabeln schneiden sich senkrecht.)



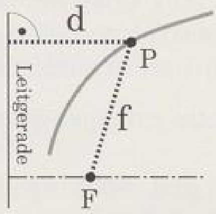
:8. Eine Parabel mit Brennpunkt F(2|0) hat die y-Achse als Leitgerade. Konstruiere diejenigen Parabelpunkte, die auf der Gerade mit der Gleichung $y = -x + 6$ liegen.



*4. Die Leitgerade

Auch bei Ellipse und Hyperbel gibt es Leitgeraden, die eine ähnliche Rolle spielen wie die Leitgerade der Parabel. Sie ergeben sich auch dort als Schnitt von Berührkreisebene und Schnittebene. Deshalb haben Ellipse und Hyperbel zwei Leitgeraden, für jeden Brennpunkt eine. Bezeichnen wir mit d den Abstand eines Kurvenpunkts P von der Leitgerade und mit f seine Entfernung vom Brennpunkt F, dann gilt für alle drei Kegelschnitt-Typen

$$\boxed{\frac{f}{d} \text{ ist konstant}}$$

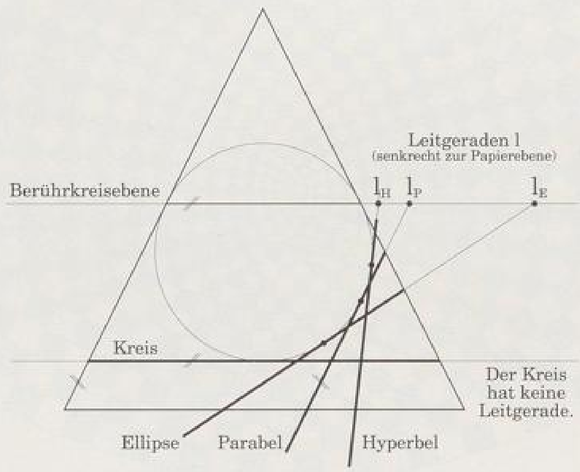


Diese Konstante ist bei Ellipse und Hyperbel nichts anderes als die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a}$. (Nachweis siehe unten)

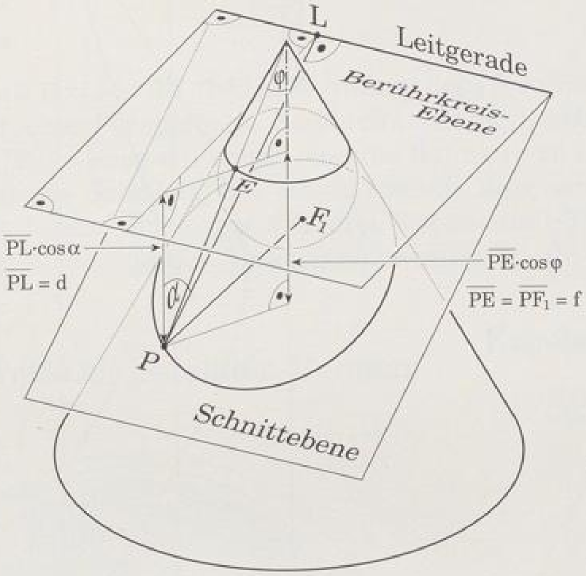
Je nach der Größe von ε bekommt man

- eine Ellipse $\varepsilon = \frac{f}{d} < 1$, also $f < d$
- eine Parabel $\varepsilon = \frac{f}{d} = 1$, also $f = d$
- eine Hyperbel $\varepsilon = \frac{f}{d} > 1$, also $f > d$

Allerdings lässt sich der Kreis als Sonderfall der Ellipse ($\varepsilon = 0$) nicht mit Leitgerade und Brennpunkt erzeugen, weil dann Berührkreisebene und Schnittebene parallel sind.



Zum Beweis der Konstanz von f/d bei der Ellipse projiziert man die Strecken [PL] und [PE] senkrecht auf die Kegelachse.

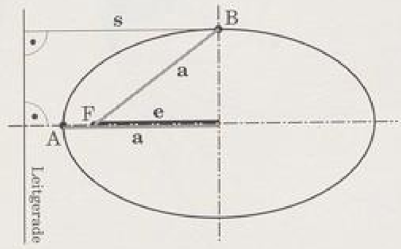


$$\overline{PL}\cdot\cos\alpha = \overline{PE}\cdot\cos\varphi$$

$$\frac{f}{d} = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} \quad \text{(konstant)}$$

Für die Hyperbel läuft der Beweis entsprechend, bloß ist hier $\alpha = \varphi$, also $\cos\alpha > \cos\varphi$, also $\varepsilon > 1$.

Nachweis für die Gleichheit $\frac{f}{d} = \varepsilon$



im Bild ist
$a = 5$
$e = 4$
$\varepsilon = 0{,}8$
$s = 6{,}25$

Für den Nebenscheitel B gilt $\frac{f}{d} = \frac{a}{s}$

Für den Hauptscheitel A gilt $\frac{f}{d} = \frac{a-e}{s-a}$

Also ist $\frac{a}{s} = \frac{a-e}{s-a}$

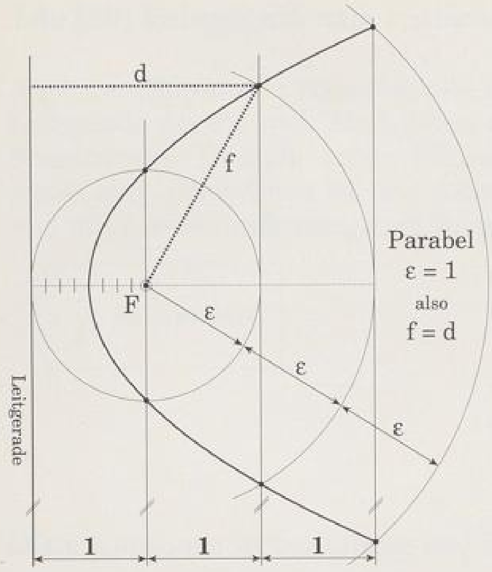
$$as - a^2 = as - es$$

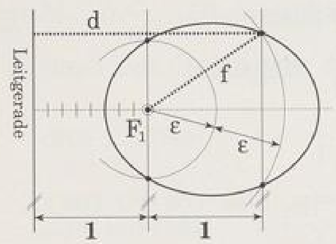
$$\frac{a}{s} = \frac{e}{a}$$

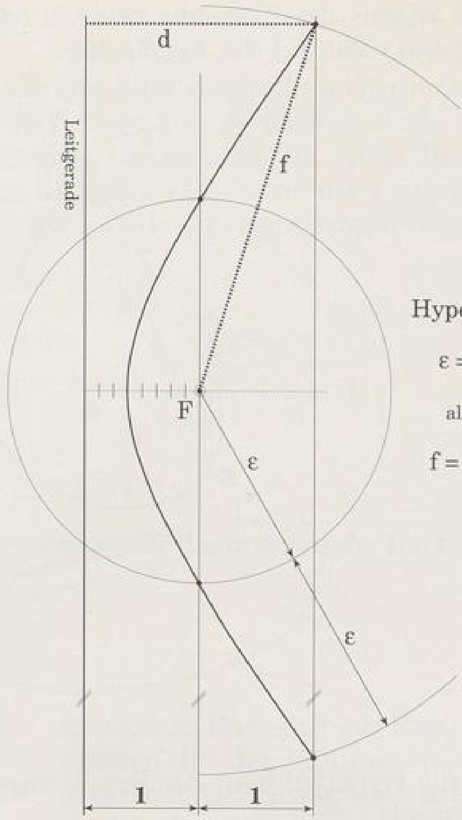
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{f}{d} = \varepsilon$$

Für die Hyperbel geht der Beweis entsprechend.


d
f
Leitgerade
F
ε
ε
ε
1
1
1
Parabel
ε = 1
also
f = d


d
f
Leitgerade
F1
ε
ε
1
1
Ellipse
ε = 3/5
also
f = 3/5 d

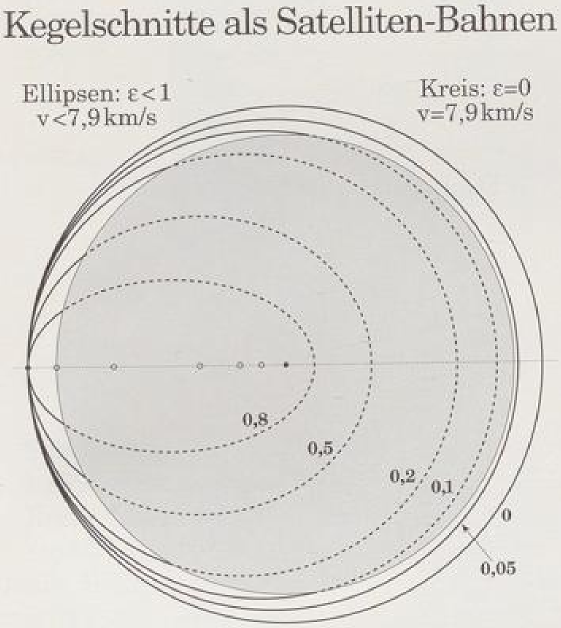

d
f
Leitgerade
F
ε
ε
1
1
Hyperbel
ε = 5/3
also
f = 5/3 d

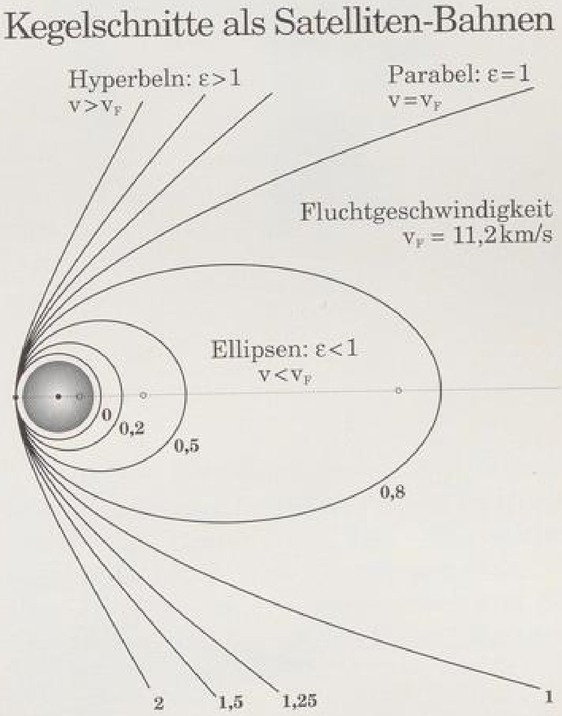
5. Anwendungen

Auf Kegelschnitte trifft man in Natur, Technik und Architektur.

Bahnkurven

Galileo Galilei (1564 bis 1642) hat Anfang des 17. Jahrhunderts erkannt, dass ein geworfener Körper eine Parabelbahn beschreibt. Dank Kepler (1571 bis 1630) und Newton (1643 bis 1727) wissen wir heute, dass die Bahnkurven eigentlich Ellipsen sind, die aber in der Gegend des Scheitels, des Abwurfpunkts also, sehr gut durch Parabeln angenähert werden. Es lassen sich sogar alle drei Kegelschnitt-Typen beim Werfen erzeugen. Ihre Form hängt allein von der Abwurfgeschwindigkeit ab.

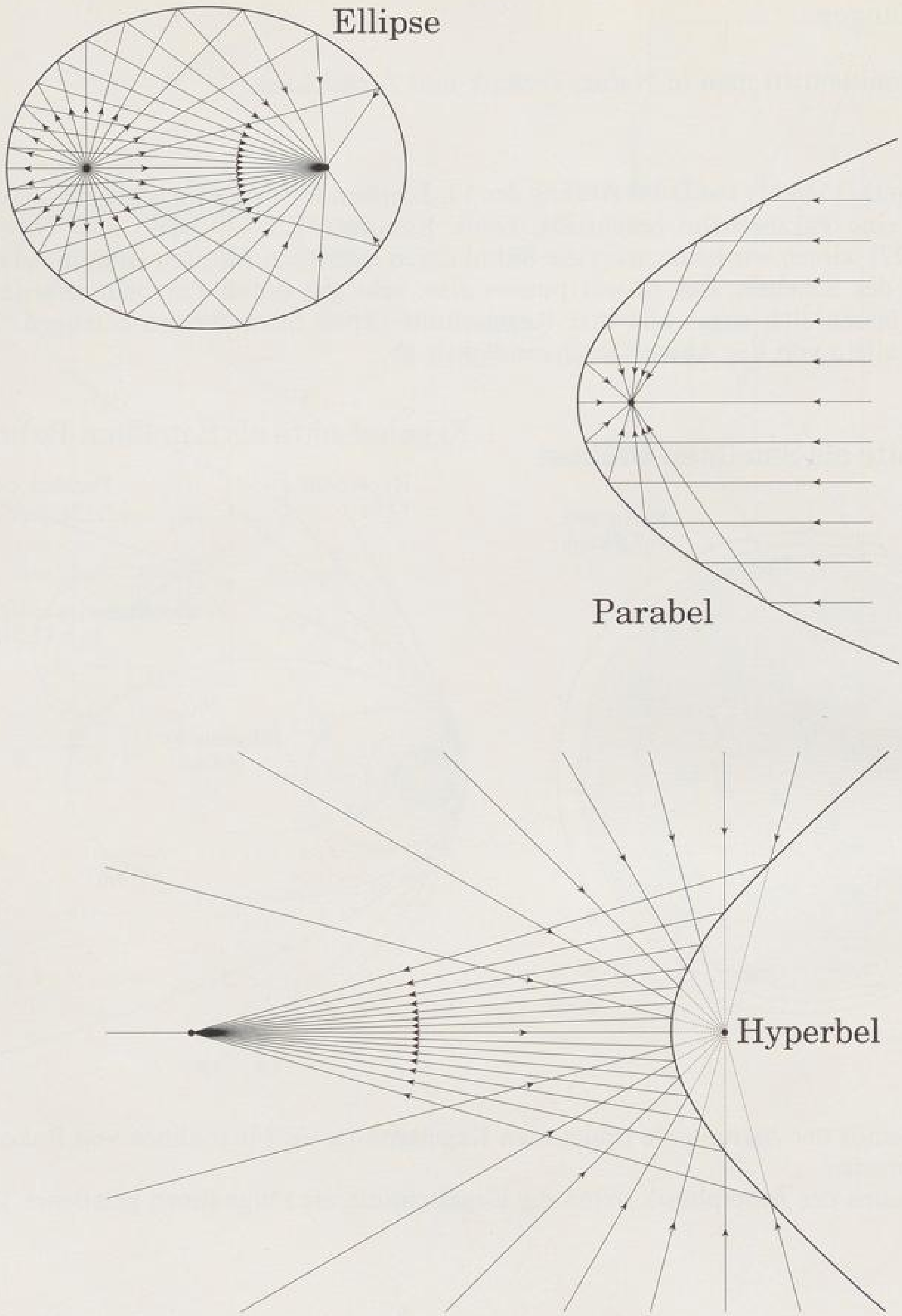




Im Makrokosmos der Astronomie findet man Kegelschnitte als Flugbahnen von Raketen, Planeten, Kometen …
Im Mikrokosmos der Atomphysik treten die Kegelschnitte als Flugbahnen geladener Teilchen auf.

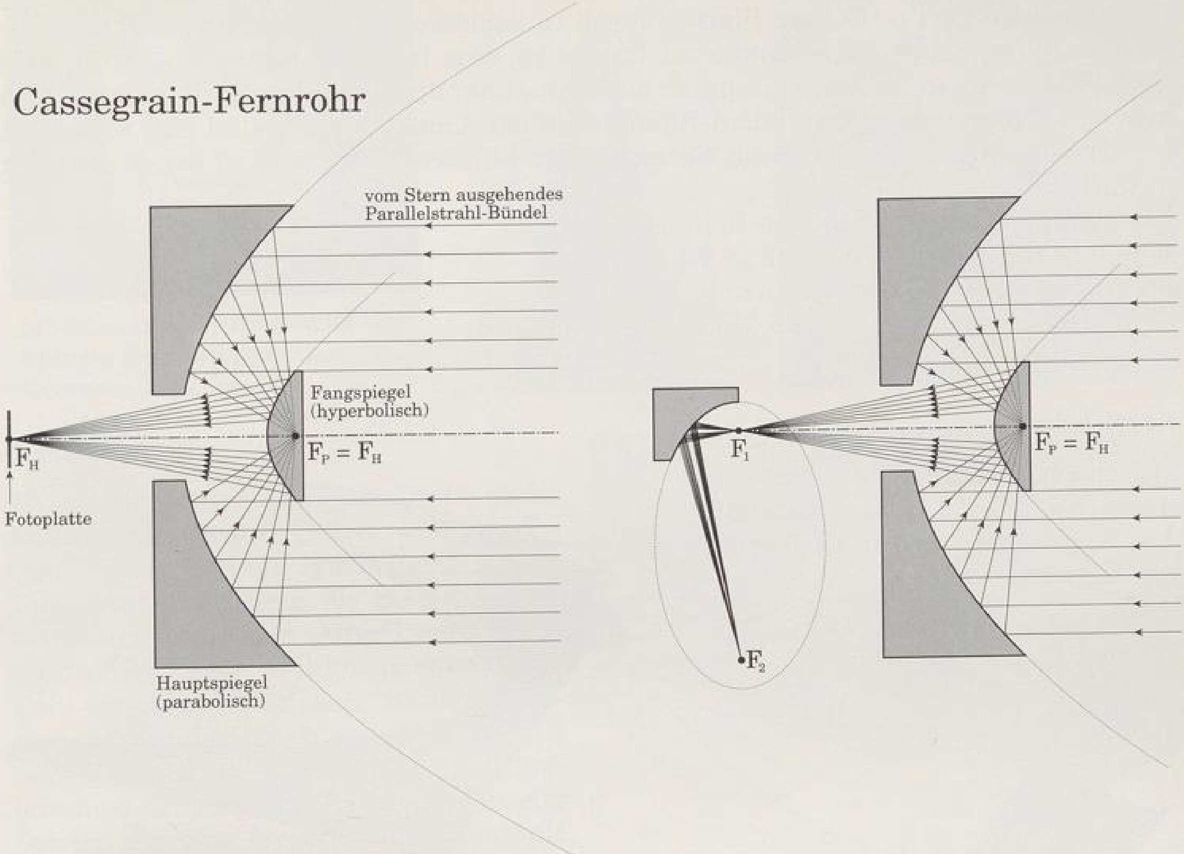
Reflexionen

Die Reflexionseigenschaften von Spiegeln, deren Querschnitte Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln sind, nutzt vor allem die Technik.
Mit Parabolspiegeln erzeugt man Parallelstrahl-Bündel, zum Beispiel in Sendeantennen (Richtfunk) oder Autoscheinwerfern (Fernlicht).
Mit Parabolspiegeln empfängt man Parallelstrahl-Bündel, zum Beispiel in Empfangsantennen für kosmische Strahlung und Satelliten-Fernsehen oder in astronomischen Spiegel-



fernrohren. Im *Cassegrain-Teleskop* ist ein Parabolspiegel mit einem hyperbolisch gekrümmten Spiegel gekoppelt. Mit dieser Spiegelkombination erzielt man eine Brennweite, die größer ist als die des Parabolspiegels allein. (Ein Fernrohr vergrößert um so stärker, je länger seine Brennweite ist.) Man könnte sogar ein Teleskop mit Spiegeln bauen, in denen alle drei Kegelschnitt-Typen vorkommen.

Cassegrain-Fernrohr



Seit es den *Nierenlithotripter* gibt, das ist ein Nierenstein-Zerbrösler, lassen sich Nierensteine ohne blutige Operation entfernen. Sein Funktionsprinzip ist recht einfach: In einem Brennpunkt eines Ellipsenspiegels sendet ein starker Funke einen Knall aus – das ist eine Stoßwelle. Der Patient ist so justiert, dass im andern Brennpunkt sein Nierenstein sitzt. Die am Ellipsenspiegel reflektierte Stoßwelle konzentriert sich auf den Nierenstein und bewirkt, dass eine dünne Außenschicht abplatzt. Einige hundert Funkenknalle zerbröseln so den Stein zu Grieß.

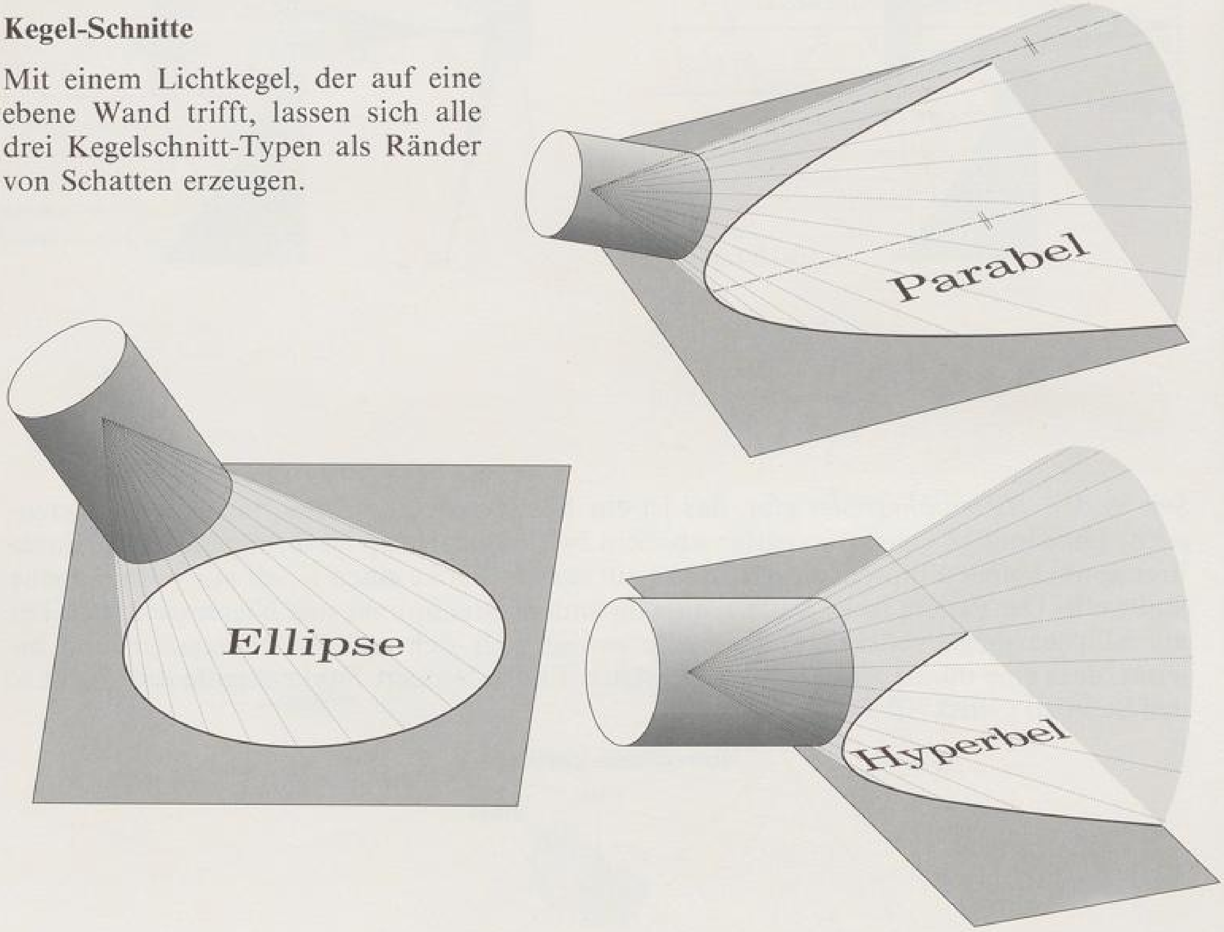
Nierenstein-Zerbrösler

Flüstergalerien sind raffinierte Einrichtungen in Schlössern und Residenzen: Eine elliptisch gewölbte Decke überspannt zwei Räume so, dass in jedem Raum ein Brennpunkt liegt. Findet ein (geflüstertes) Gespräch im Brennpunkt des einen Raums statt, dann kann man es im Brennpunkt des andern Raums abhören. Lauschangriffe sind also schon seit der Renaissance durch trickreiche Nutzung einer Ellipsen-Eigenschaft in der Architektur möglich!

Flüstergewölbe finden sich zum Beispiel
- in der Vorhalle der Residenz in Würzburg
- im Karyatiden-Saal des Louvre in Paris
- in einem Raum des Castello Sforzesco in Mailand
- in St. Paul's in London.

Kegel-Schnitte

Mit einem Lichtkegel, der auf eine ebene Wand trifft, lassen sich alle drei Kegelschnitt-Typen als Ränder von Schatten erzeugen.



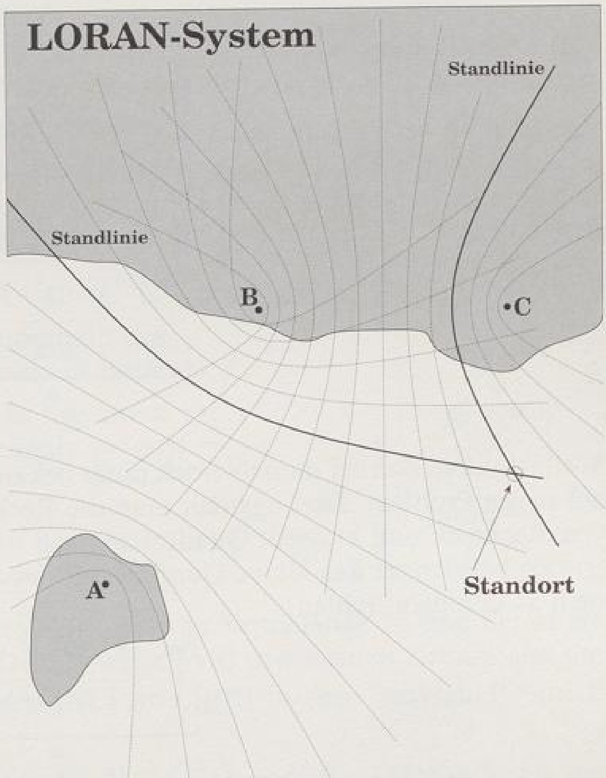
Beim Anspitzen eines sechskantigen Bleistifts entstehen Hyperbeln als Schnitte eines Kegels (im Spitzer) mit Ebenen (Bleistift), die parallel sind zur Kreisachse. Ähnlich kommen auch die Hyperbeln auf Gewindemuttern zustande.

Bei der Sonnenuhr wirft ein fester Stab einen Schatten, der die wahre Sonnenzeit angibt. Die Schattenspitze beschreibt jeden Tag eine andere Kurve (*Datumslinie*). Diese Kurve entsteht als Schnitt der Bildebene und des Kegels, den die Verbindungsgeraden Stabspitze–Sonne bilden. Sie ist deshalb ein Kegelschnitt, und zwar meistens eine Hyperbel.

Modebewusste Messingmutter beim Mustern ihrer hyperbolischen Konturen vorm Spiegel

Navigation

Hyperbeln spielen eine große Rolle in der Ortung von Schiffen. Das LORAN-System (**LO**ng **RA**nge **N**avigation) ist ein Funkortungsverfahren für die Langstrekkenpeilung (von den Amerikanern während des Zweiten Weltkriegs entwickelt). Drei verschiedene ortsfeste Stationen senden gleichzeitig Signale aus, die ein Schiff oder Flugzeug empfängt. Der Laufzeitunterschied der empfangenen Signale zweier Sender legt eine Hyperbel als Standlinie fest (die Sender stehen in den Brennpunkten). Der Standort ergibt sich als Schnittpunkt von zwei oder drei Hyperbeln. Die Genauigkeit bei Auswertung der Bodenwellenimpulse liegt bei 5 km, bei Auswertung der Raumwellenimpulse bei 15 km. Die Reichweite der Sender beträgt tagsüber 1400 km und nachts etwa das Doppelte. Das LORAN-System überdeckt fast vollständig den Nordatlantik sowie große Teile des Indischen Ozeans.

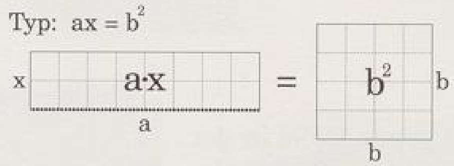


Die Sender A, B und C strahlen synchrone Signale ab.

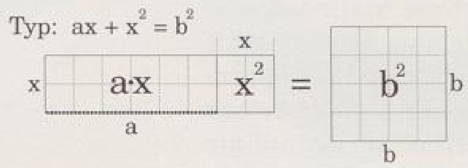
6. Geschichtliches

Etwa um 350 v. Chr. erfindet MENAICHMOS, der Lehrer Alexanders des Großen, die Kegelschnitte als Kegel-Schnitte zur Lösung geometrischer Probleme, bei denen man mit der klassischen Methode (Zirkel, Lineal) nicht weiterkommt. Er löst zum Beispiel das Delische Problem der Würfelverdopplung über den Schnitt von Parabeln: Aus $x^2 = ay$ und $y^2 = 2ax$ folgt nämlich $x = a\sqrt[3]{2}$.
Mit den Kegelschnitten ist es auch möglich, einen Winkel in drei gleich große Winkel zu zerlegen.
Nur das dritte der drei klassischen Probleme, die Quadratur des Kreises, kann MENAICHMOS nicht lösen.

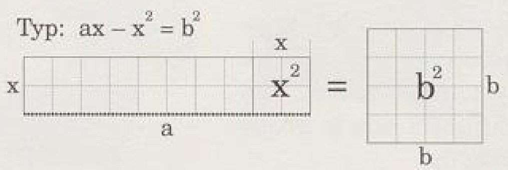
Apollonios von Perge (262 bis 190) untersucht die Kegelschnitte eingehend und schreibt seine *Konika*, acht Bücher über Kegelschnitte: I bis IV sind griechisch überliefert, V bis VII liegen arabisch vor und VIII ist verloren gegangen. Im Gegensatz zu Menaichmos, der für jeden Kegelschnitt-Typ einen neuen Kegel braucht, weil er immer senkrecht zu einer Mantellinie schneidet, bekommt Apollonios alle Kegelschnitte an einem Kegel durch Schnitte unter verschiedenen Winkeln. Er treibt *geometrische Algebra*, indem er versucht, quadratische Gleichungen über Flächengleichheiten zu lösen:
Die Gleichung $ax = b^2$ ist gelöst, wenn es gelingt, zu einer gegebenen Rechteckseite a die andere Rechteckseite x so zu finden, dass dieses Rechteck flächengleich ist einem Quadrat mit gegebener Seitenlänge b. (parab**a**llein = vergleichen, gleich sein)



Zur Lösung der Gleichung $ax + x^2 = b^2$ braucht man die Rechteckseite x so, dass Rechteck- und Quadratfläche (Seite x) zusammen so groß sind wie das Quadrat mit Seitenlänge b. Apollonios bezeichnet das kleine Quadrat mit der Seite x als *überschießendes Quadrat.* (hyperb**a**llein = über ein Ziel hinauswerfen, übers Ziel hinausschießen)



Weil negative Zahlen damals noch nicht bekannt sind, schafft die Gleichung $ax - x^2 = b^2$ ein neues Problem. Jetzt braucht man die Rechteckseite x so, dass der Flächenunterschied von Rechteck und kleinem Quadrat so groß ist wie das Quadrat mit Seitenlänge b. Apollonios bezeichnet das kleine Quadrat mit der Seite x als *unterschießendes Quadrat.* (ell**ei**pein = mangeln, fehlen)



Schreibt man die drei Gleichungen in der Form

$$y^2 = ax$$
$$y^2 = ax + x^2$$
$$y^2 = ax - x^2$$

so ergeben sich Gleichungen von Parabeln, Hyperbeln und Ellipsen. Die Mittelpunkte dieser Hyperbeln und Ellipsen liegen nicht im Koordinatenursprung.

Nach den Griechen kümmert man sich kaum noch um die Kegelschnitte. Erst Johannes Werner (1468 bis 1522) erweckt sie zu neuem Leben in seiner Schrift *Elemente der Kegelschnitte.* Darin steht zum Beispiel eine einfache Parabelkonstruktion mittels einer Schar von Kreisen mit gemeinsamem Berührpunkt (siehe Kapitel 9. II, 3).