Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

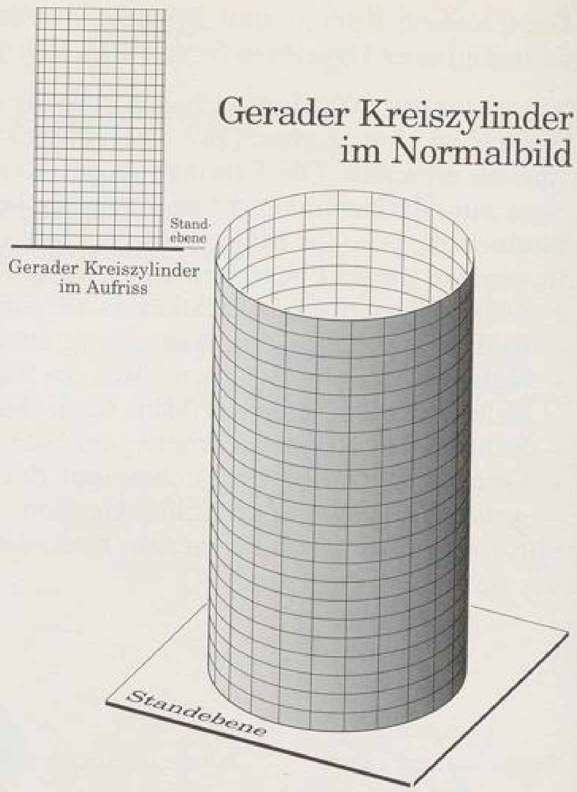
München, 1997

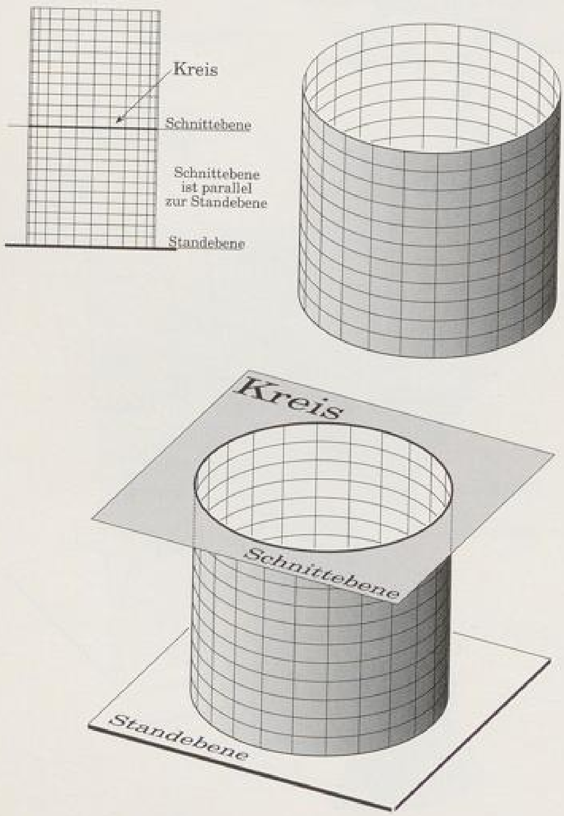
1. Die Ellipse als Zylinderschnitt Kreisstauchung - Hauptkreis-Konstruktion - Papierstreifen-Konstruktion

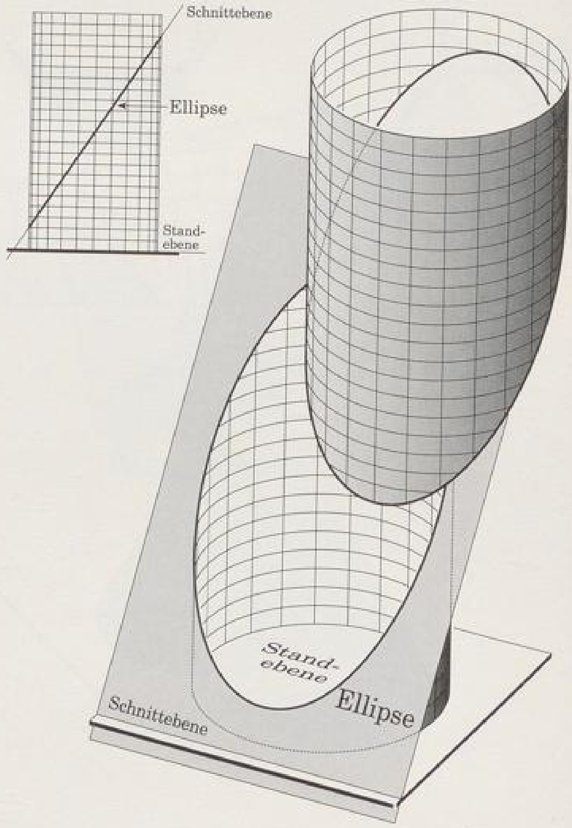
I. Die Ellipse

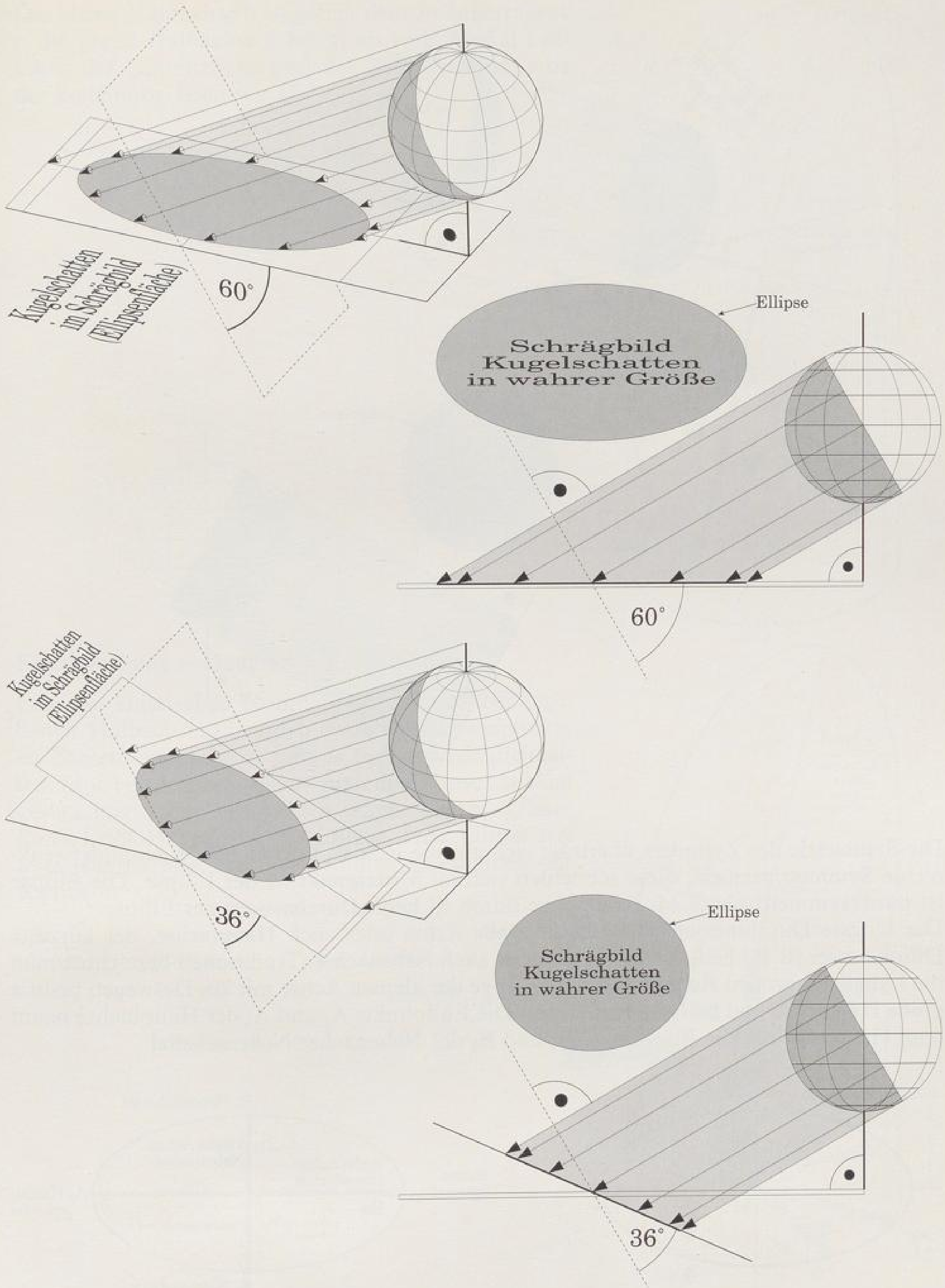
1. Die Ellipse als Zylinderschnitt

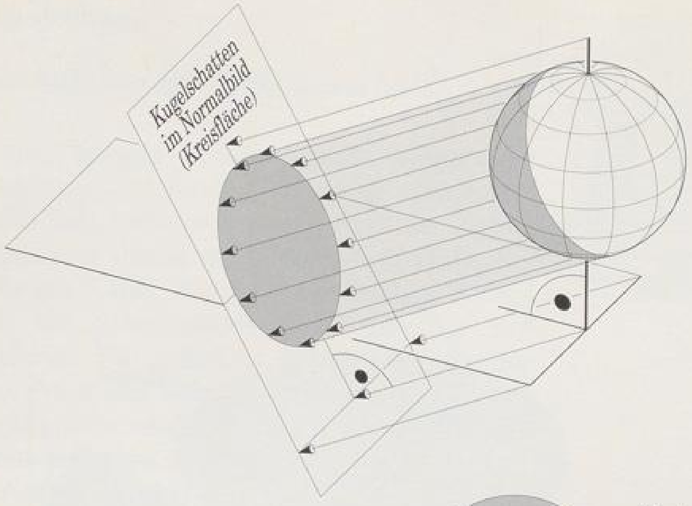
Kreis und Ellipse entstehen auch, wenn eine Ebene einen geraden Kreiszylinder schneidet. Steht die Schnittebene senkrecht auf der Zylinderachse und damit auf jeder Mantellinie, so entsteht ein Kreis; bei einem endlichen Zylinder ist die Schnittebene dann parallel zur Standebene. Ein schräger Schnitt liefert eine Ellipse. Auch der Schattenbereich einer Kugel im Parallellicht ist ein Kreiszylinder. Trifft der Schatten auf eine ebene Wand, so entsteht je nach Auftreffwinkel ein Kreis oder eine Ellipse.

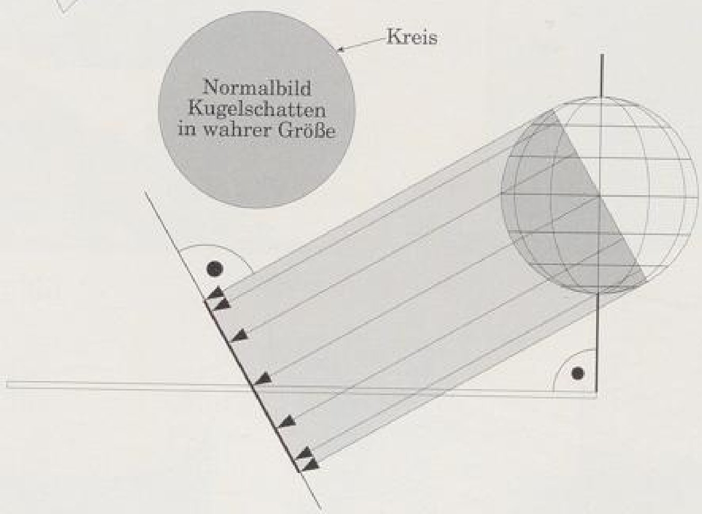




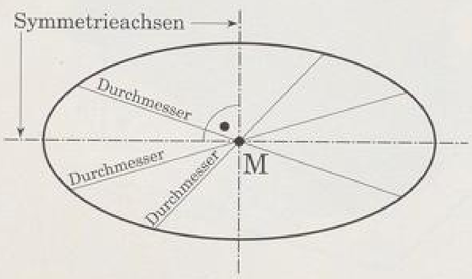


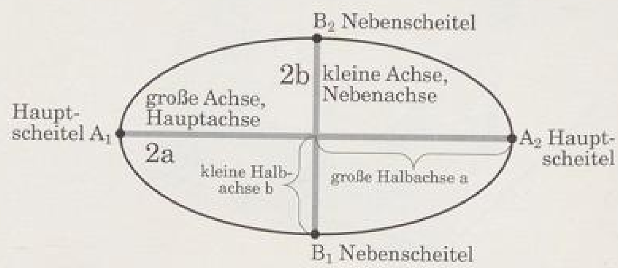

Kugelschatten
im Schrägbild
(Ellipsenfläche)
60°
Ellipse
Schrägbild
Kugelschatten
in wahrer Größe
60°
Kugelschatten
im Schrägbild
(Ellipsenfläche)
36°
Ellipse
Schrägbild
Kugelschatten
in wahrer Größe
36°





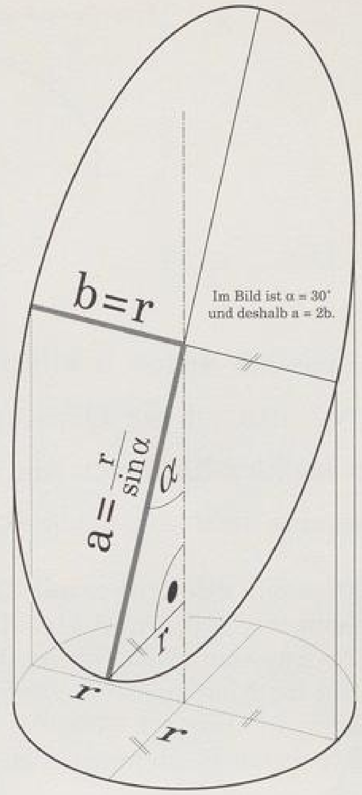
Die Symmetrie des Zylinders überträgt sich auf die Ellipse. Sie hat zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, diese schneiden sich im **Mittelpunkt M** der Ellipse. Die Ellipse ist punktsymmetrisch zu M. Jede Sehne durch M heißt **Durchmesser** der Ellipse.
Der längste Durchmesser $[A_1A_2]$ heißt **große Achse** oder auch **Hauptachse**, der kürzeste Durchmesser $[B_1B_2]$ heißt **kleine Achse** oder auch **Nebenachse**. Traditionell bezeichnet man die Länge der großen Achse mit 2a, die Länge der kleinen Achse mit 2b. Deswegen heißt **a große Halbachse** und **b kleine Halbachse**. Die Endpunkte $\mathbf{A_1}$ und $\mathbf{A_2}$ der Hauptachse nennt man **Hauptscheitel**, die Endpunkte $\mathbf{B_1}$ und $\mathbf{B_2}$ der Nebenachse **Nebenscheitel**.





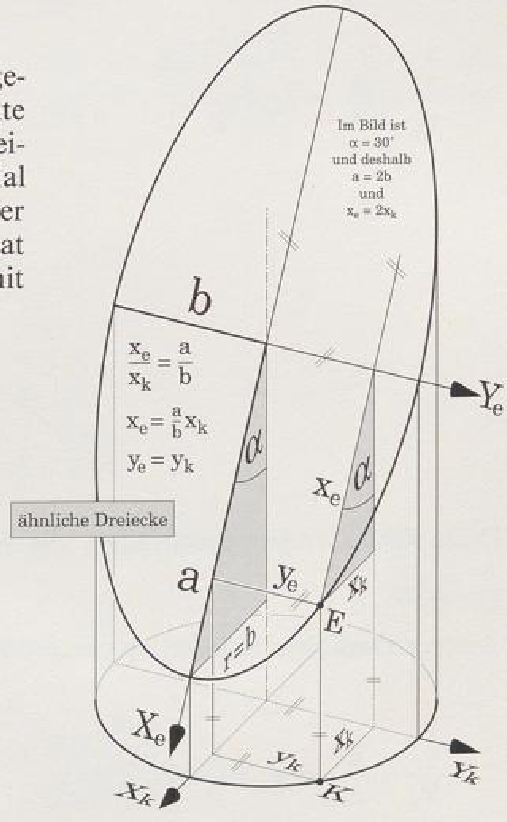
Die kleine Halbachse b ist gleich dem Zylinderradius r, die große Halbachse a hängt ab vom Winkel zwischen der Schnittebene und der Zylinderachse. Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$b = r \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{r}{a} \quad \text{also} \quad a = \frac{r}{\sin\alpha}$$

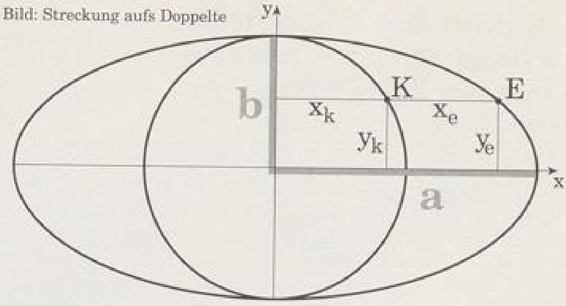


Kreisstreckung – Hauptkreis-Konstruktion

Eine der klassischen Grundaufgaben ist es, bei gegebenen Halbachsen a und b einzelne Ellipsenpunkte zu konstruieren. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine beruht darauf, dass man die Ellipse als axial gestauchten oder gestreckten Kreis deutet. Dieser Kreis heißt **Hauptkreis** der Ellipse. Jede Ellipse hat zwei Hauptkreise: einen mit Radius a und einen mit Radius b.



Im Bild: Streckung aufs Doppelte

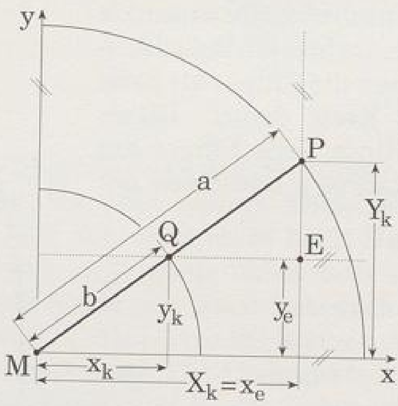


Der Kreis mit Radius b wird in x-Richtung aufs $\frac{a}{b}$-fache gestreckt – der Kreispunkt $K(x_k|y_k)$ wird auf den Ellipsenpunkt $E(s_e|y_e)$ abgebildet. Diese Abbildung heißt **axiale Streckung** (in x-Richtung): Alle x-Werte sind mit dem Faktor $\frac{a}{b}$ multipliziert, die y-Werte ändern sich nicht. Die axiale Streckung ist von der zentrischen Streckung zu unterscheiden.

Die Streckung des Kreises mit Radius b zu einer Ellipse mit den Halbachsen a und b lässt sich auch mit Zirkel und Lineal einfach konstruieren. Sind a und b gegeben, so zeichnet man zwei konzentrische Kreise mit den Radien a und b. Einen Ellipsenpunkt $E(x_e|y_e)$ findet man so: Man zeichnet einen Radius, der den großen Kreis in $P(X_k|Y_k)$ und den kleinen Kreis in $Q(x_k|y_k)$ schneidet. Die Parallele zur x-Achse durch Q und die Parallele zur y-Achse durch P schneiden sich im Ellipsenpunkt E. Die Begründung lesen wir aus dem Bild ab.

$$y_e = y_k$$

$$\frac{x_e}{x_k} = \frac{a}{b} \Rightarrow x_e = \frac{a}{b} x_k$$

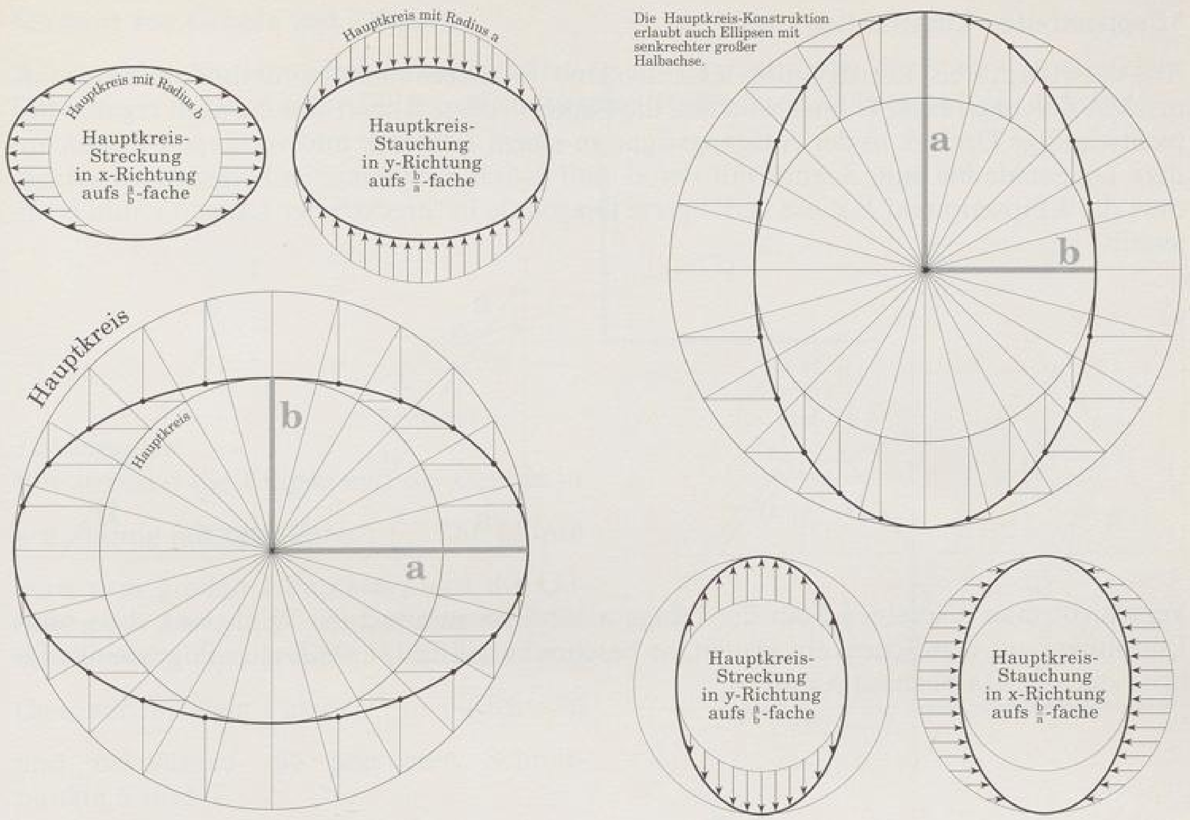


Diese Gleichungen beschreiben die Streckung des kleinen Kreises in x-Richtung aufs $\frac{a}{b}$-fache.

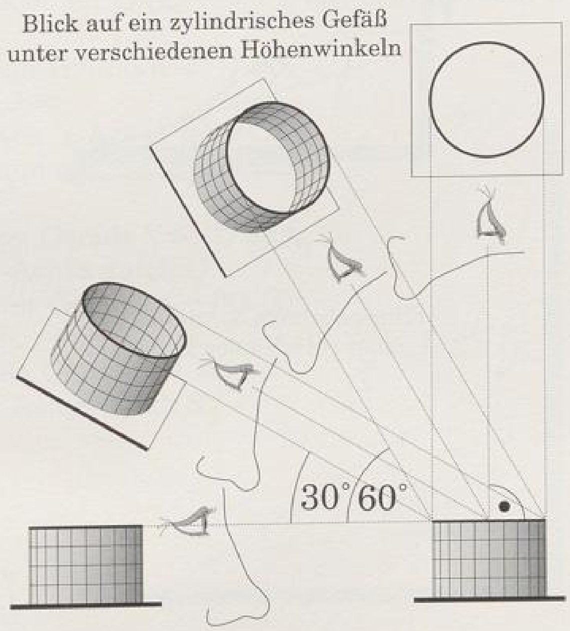
Andere Deutung: Stauchung des großen Kreises in y-Richtung aufs $\frac{b}{a}$-fache:

$$x_e = X_k$$

$$\frac{y_e}{Y_k} = \frac{b}{a} \Rightarrow y_e = \frac{b}{a} Y_k$$

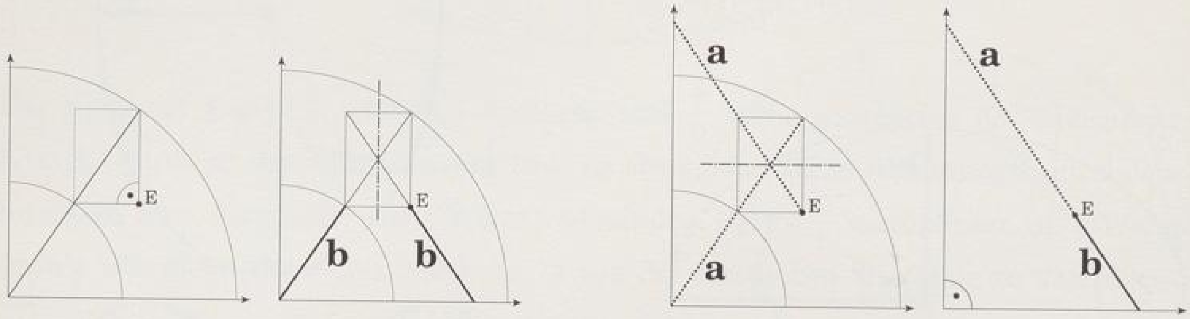


Die Streckung eines Kreises zur Ellipse beobachtet man am Schatten einer Kugel; die Stauchung eines Kreises zur Ellipse sieht man, wenn man aus verschiedenen Richtungen auf einen Kreis schaut.

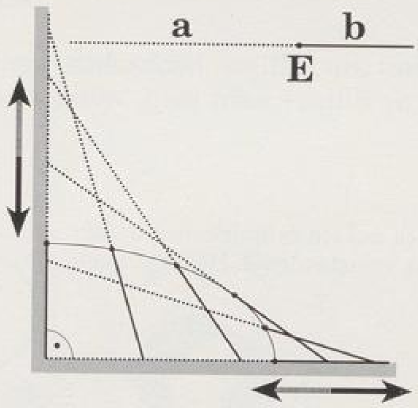


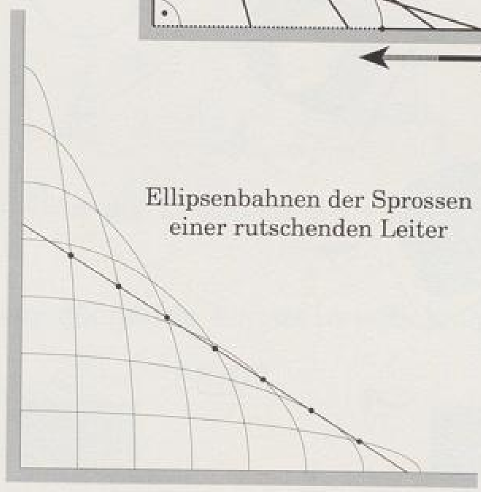
* Papierstreifen-Konstruktion

Aus der Hauptkreis-Konstruktion lässt sich eine besonders einfache Methode zum mechanischen Zeichnen einer Ellipse ableiten, die Papierstreifen-Konstruktion: Man ergänzt das rechtwinklige Dreieck in der Ausgangsfigur zu einem Rechteck und verlängert dessen andere Diagonale bis zum Schnitt mit der x- und y-Achse. Symmetrieüberlegungen zeigen, dass der Ellipsenpunkt E diese verlängerte Diagonale in Strecken der Längen a und b unterteilt.



Verschiebt man also einen Stab der Länge a + b in einem rechten Winkel so, dass seine Endpunkte auf den Schenkeln gleiten, so beschreibt der Teilpunkt E den Bogen einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

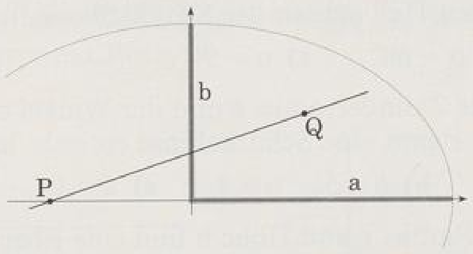




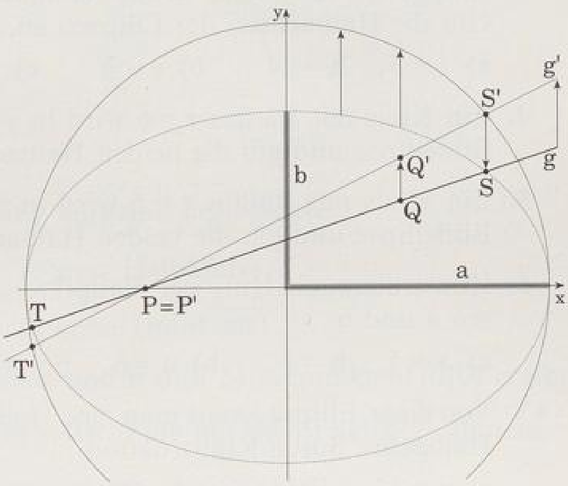
Ellipsenbahnen der Sprossen
einer rutschenden Leiter

*Schnitt von Gerade und Ellipse

Wir wenden die Hauptkreis-Konstruktion an und konstruieren die Schnittpunkte einer Gerade g = PQ und einer Ellipse mit bekannten Halbachsen. P liege auf der x-Achse.



Lösungsidee
Wir strecken die Ellipse und die Gerade in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{a}{b}$: Die Ellipse wird zum großen Hauptkreis und die Gerade g zur Gerade g′. Die Schnittpunkte S′ und T′ von g′ und großem Hauptkreis stauchen wir mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ in y-Richtung und bekommen die gesuchten Schnittpunkte S und T.



Konstruktion
Der Schnittpunkt P von Gerade und x-Achse bleibt liegen: P = P′. Der Geradenpunkt $Q(x_q|y_q)$ wird abgebildet auf $Q'(x_q|\frac{a}{b}y_q)$. (Achte auf die gestrichelte V-Figur!)

W ist Schnittpunkt von Hauptkreis ① mit Radius a und y-Achse.
V ist Schnittpunkt von x-Achse und Gerade ② durch Q und den Nebenscheitel B_2.
Q′ ist Schnittpunkt von Gerade VW ③ und Parallele ④ zur y-Achse durch Q.
S′ ist Schnittpunkt von Gerade g′ = PQ ⑤ und Hauptkreis ①.
S ist Schnittpunkt von Gerade g = PQ und Parallele ⑥ zur y-Achse durch S′.