Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

II. Lineare Gleichungssysteme

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

II. Lineare Gleichungssysteme

Karl Friedrich Gauß (1777 bis 1855)

1. Bezeichnungen

Ein einfacher Fall eines linearen Gleichungssystems sind zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x - 3y = 21 \\ \text{II} & 3x + 4y = 6 \end{array}$$

Linear heißt ein Gleichungssystem, wenn in allen Gleichungen die Unbekannten höchstens in der ersten Potenz vorkommen. Weil wir künftig auch mit mehr als zwei Unbekannten arbeiten werden, numerieren wir sie und schreiben statt x, y, z, (?)... nun $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$. Das Gleichungssystem schaut dann so aus

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - 3x_2 = 21 \\ \text{II} & 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{array}$$

Eine Lösung ist ein **Zahlenpaar**; man schreibt $x_1 = 6$, $x_2 = -3$ oder kürzer $(6 \mid -3)$ oder das ganze untereinander $\binom{6}{-3}$.

Ein allgemeines lineares Gleichungssystem besteht aus **m Gleichungen** mit **n Unbekannten**. Man bezeichnet es auch als **m, n-System**.

Eine Lösung ist ein **n-Tupel** von Zahlen $(x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_n)$ beziehungsweise $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Beispiel für ein 2,3-System:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \text{II} & x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}$$

Eine Lösung ist das 3-Tupel $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, eine andere $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Statt 3-Tupel sagt man auch Tripel.

Normalerweise schreibt man die Gleichungen so, daß alle Unbekannten auf der linken Seite und die konstanten Summanden auf der rechten Seite stehen. Haben alle Konstanten den Wert null, dann nennt man das Gleichungssystem **homogen**, sonst heißt das Gleichungssystem **inhomogen**.

Beispiel für ein homogenes 3, 3-System:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \text{II} & x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}$$

Die Faktoren bei den Unbekannten und die Konstanten heißen **Koeffizienten** des Systems. Dank einer raffinierten Kennzeichnung sieht man sofort, an welche Stelle im System der Koeffizient hingehört:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{II} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ (m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

a_{32} ist zum Beispiel der Koeffizient in der 3.Gleichung bei der Unbekannten x_2.
b_3 ist die Konstante der 3.Gleichung.

Ziel unsrer Untersuchungen wird es sein, bei einem m,n-System herauszufinden:

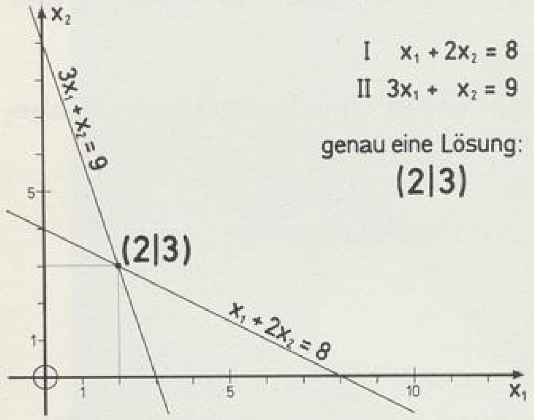
- wann ist das System überhaupt lösbar ?
- wann hat das System genau eine Lösung ?
- wie findet man die Lösung(en) ?
- wie stellt man die Lösungsmenge übersichtlich dar ?

Erstaunlicherweise treten alle möglichen Fälle von Lösungsmengen schon bei 2,2-Systemen auf und sind durch geometrische Überlegungen sogar leicht verständlich. Man deutet die beiden Zeilen des Systems als Gleichungen von Geraden:

genau eine Lösung:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 = 8 \\ \text{II} & 3x_1 + x_2 = 9 \end{array} \qquad \text{Lösung} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

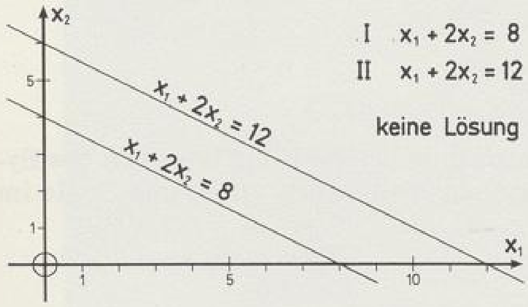
Deutung: Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt (2 | 3).

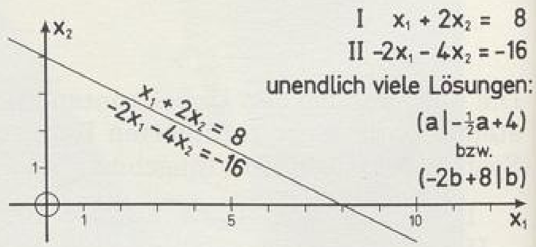


keine Lösung:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 = 8 \\ \text{II} & x_1 + 2x_2 = 12 \end{array}$$

Deutung: Die beiden Geraden sind parallel, fallen aber nicht zusammen.





unendlich viele Lösungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 = 8 \\ \text{II} & -2x_1 - 4x_2 = -16 \end{array} \qquad \text{Lösung} \begin{pmatrix} -2b + 8 \\ b \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge kann man mit einem Parameter b darstellen. Für jeden Wert $b \in \mathbb{R}$ ergibt sich eine andre Lösung. Deutung: Die beiden Geraden sind identisch. Die Lösungen sind die Punkte der Gerade. Der Parameter numeriert sie durch.

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Bestimme die Lösungen und zeichne die zugehörigen Geraden:

a) $\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + x_2 = 1 \\ \text{II} & 2x_1 - x_2 = 8 \end{array}$ b) $\begin{array}{ll} \text{I} & -4x_1 + 2x_2 = -6 \\ \text{II} & 6x_1 - 3x_2 = 9 \end{array}$ c) $\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 - x_2 = 0 \\ \text{II} & x_1 + x_2 = 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{ll} \text{I} & 6x_1 - 9x_2 = 1 \\ \text{II} & 4x_1 - 6x_2 = 0 \end{array}$ e) $\begin{array}{ll} \text{I} & 3x_1 - 0{,}5x_2 = 0 \\ \text{II} & -6x_1 + x_2 = 0 \end{array}$ f) $\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 = 1 \\ \text{II} & x_2 = 2 \end{array}$

2. Gib ein 2,2-System an, das die Lösung $\binom{2}{-4}$ hat und

a) keine weitere Lösung hat

b) auch noch die Lösung $\binom{1}{1}$ hat **c)** homogen ist.

3. Ein m,2-System hat die Lösung $\binom{2}{3}$. Gib ein Beispiel an für $m = 1, 2, 3$.

Kann man es so einrichten, daß $\binom{2}{3}$ jeweils die einzige Lösung ist?

4. $\begin{array}{ll} \text{I} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ \text{II} & 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}$ Gib die Koeffizienten an: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{23}$ und b_1.

5. Gib ein 3,2-System an, für das gilt:

a) $a_{11} = a_{21} = 1$, $b_1 = -b_2 = 2$ $a_{12} = b_3 = 0$, $a_{31} = 2a_{32} = -a_{22} = 6$

b) $a_{i1} = 1$, $a_{k2} = -1$, $b_j = j$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$

c) $a_{ik} = i + k$, $b_j = 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$

6. In einem homogenen 3,3-System gilt $a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{23} = 2$ und $a_{ik} = -a_{ki}$ $(i,k = 1, 2, 3)$. Schreib das Gleichungssystem hin.

2. Das Einsetzverfahren

ist der naheliegendste Weg, ein Gleichungssystem zu lösen: Man löst **eine** Gleichung nach **einer** Unbekannten auf und ersetzt diese Unbekannte in **allen andern** Gleichungen durch den gefundenen Term. Das wiederholt man immer wieder. Wir führen das Einsetzverfahren zunächst an einigen 3,3-Systemen vor; wir haben sie so ausgewählt, daß die wichtigsten Fälle vorkommen.

Inhomogene Gleichungssysteme

Genau eine Lösung

$$\begin{array}{lrcll}
\text{I} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & -1 & \\
\text{II} & x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 0 & \Rightarrow \boxed{x_1 = -x_2 - 5x_3} \text{ in I und III} \\
\text{III} & -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 & \\
\hline
\text{in I} & 2(-x_2 - 5x_3) - 3x_2 + x_3 & = & -1 & \\
\text{in III} & -(-x_2 - 5x_3) + 2x_2 - x_3 & = & 2 & \\
\text{I'} & -5x_2 - 9x_3 & = & -1 & \\
\text{III'} & 3x_2 + 4x_3 & = & 2 & \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}} \text{ in I'} \\
\hline
\text{in I'} & -5(-\frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}) - 9x_3 & = & -1 & \\
 & 20x_3 - 10 - 27x_3 & = & -3 & \\
\text{I''} & -7x_3 & = & 7 & \Rightarrow \boxed{x_3 = -1} \text{ in III' und II} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathbf{x_3 = -1} \\
\text{in III'} & \mathbf{x_2 = 2} \\
\text{in II} & \mathbf{x_1 = 3}
\end{array} \qquad \textbf{Lösung:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beim Einsetzverfahren geht es nur darum, Gleichungen umzuformen und Terme einzusetzen. Es kommen keine gefährlichen Umformungen vor wie Quadrieren und Multiplizieren beziehungsweise Dividieren durch Terme, die null werden könnten. So ist sichergestellt, daß weder Lösungen verloren gehen noch sich Scheinlösungen einschleichen. Allerdings muß man darauf achten, daß die Anzahl der aktuellen Gleichungen nach jedem Rechenschritt dieselbe ist. In unserm Schema heben wir die zum Einsetzen reife Gleichung mit einem Rahmen hervor. Aktuell sind dann jeweils die Gleichungen unterm Strich und die eingerahmten.

Keine Lösung

$$\begin{array}{lrcll}
\text{I} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 4 & \\
\text{II} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 & \Rightarrow \boxed{x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3} \text{ in I und III} \\
\text{III} & 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 & = & 5 & \\
\hline
\text{I'} & -7x_2 - 7x_3 & = & 2 & \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{2}{7} - x_3} \text{ in III'} \\
\text{III'} & -14x_2 - 14x_3 & = & 2 & \\
\hline
\text{III''} & 0 & = & -2 & \lightning \ \textbf{keine Lösung!}
\end{array}$$

III'' ist eine widersprüchliche Gleichung. Wenn ein Widerspruch auftaucht, dann muß irgendwo eine Annahme stecken. Tatsächlich beruht das Lösungsverfahren auf der

Annahme, daß das Gleichungssystem mindestens eine Lösung $(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ hat, die alle Gleichungen erfüllt. Stößt man beim Rechnen irgendwo auf einen Widerspruch, dann erweist sich die Annahme als falsch, das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{rrcl}
\text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 6 \quad \Rightarrow \boxed{x_1 = 6 - 2x_2 + 3x_3} \\
\text{II} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 2 \\
\text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 14 \\
\hline
\text{II'} & -5x_2 + 10x_3 & = & -10 \quad \Rightarrow \boxed{x_2 = 2 + 2x_3} \\
\text{III'} & -5x_2 + 10x_3 & = & -10 \\
\hline
\text{III''} & -10 - 10x_3 + 10x_3 & = & -10 \\
 & 0 & = & 0
\end{array}$$

Die aktuellen Gleichungen reichen nicht aus, um die Unbekannten eindeutig zu bestimmen. Wenn x_3 bekannt wäre, dann ließen sich die dazu passenden Werte für x_2 und x_1 berechnen. So findet man zum Beispiel für $x_3 = -1$ die Lösung $(3 \mid 0 \mid -1)$ und für $x_3 = 0$ die Lösung $(2 \mid 2 \mid 0)$. Weil x_3 frei wählbar ist, gibt es unendlich viele Lösungen (abhängig von x_3). Eine frei wählbare Größe heißt auch freier **Parameter**. Man bezeichnet Parameter mit einem kleinen griechischen, manchmal auch lateinischen Buchstaben. Setzt man $x_3 = \lambda$, dann bekommt man durch Einsetzen in die eingerahmten Gleichungen

$$x_2 = 2 + 2\lambda \text{ und } x_1 = 2 - \lambda \text{ oder } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Weil die Lösungsmenge genau **einen** freien Parameter enthält, sagt man, daß das System ∞^1 **Lösungen** hat (sprich: unendlich hoch eins). Zur besseren Übersicht trennt man in der Lösung den konstanten Teil vom parameterabhängigen Teil und schreibt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ 0 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{(zeilenweise Addition)}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Parameter abspalten)}$$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \boxed{1}$$

Die Darstellung der Lösungsmenge ist nicht eindeutig, sie hängt ab vom Lösungsweg. Das letzte Gleichungssystem jetzt anders gelöst:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 6 \\
\text{II} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 2 \quad \Rightarrow \boxed{x_2 = 2x_1 + 4x_3 - 2} \\
\text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 14 \\
\hline
\text{I'} & 5x_1 \qquad + 5x_3 & = & 10 \quad \Rightarrow \boxed{x_3 = 2 - x_1} \\
\text{III'} & 10x_1 \qquad + 10x_3 & = & 20 \\
\hline
\text{III''} & 0 & = & 0
\end{array}$$

Nun ist x_1 die einzige Unbekannte, die nicht links vorkommt; deshalb ernennen wir sie zum freien Parameter μ. Wir setzen $x_1 = \mu$ und bekommen durch Einsetzen in die eingerahmten Gleichungen

$$x_3 = 2 - \mu \text{ und } x_2 = 6 - 2\mu \text{ oder } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 6-2\mu \\ 2-\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \qquad \boxed{2}$$

Bei Wahl von x_2 als freien Parameter hätte sich ergeben

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \ \sigma \in \mathbb{R} \qquad \boxed{3}$$

Ein Vergleich von $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ und $\boxed{3}$ zeigt, daß sich die Anteile beim Parameter nur in einem Faktor unterscheiden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1/2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die konstanten Anteile – das sind die Lösungen, die jeweils zum Parameterwert 0 gehören – zeigen keinerlei Ähnlichkeit. Trotzdem sind die drei Darstellungen gleichwertig, denn jedes Lösungstripel ist in jeder Darstellung enthalten: In $\boxed{3}$ liefert $\sigma = 4$ das Tripel $(1|4|1)$, dasselbe Tripel ergibt sich für $\mu = 1$ in $\boxed{2}$ beziehungsweise für $\lambda = 1$ in $\boxed{1}$.

Es gibt auch Gleichungssysteme, deren Lösungsmengen mehr als einen Parameter enthalten. Dazu ein Beispiel:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{I} & 0{,}5x_1 - 4x_2 + 0{,}5x_3 & = & 3 \\
\text{II} & -x_1 + 8x_2 - x_3 & = & -6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 8x_2 - x_3 + 6} \\
\text{III} & 0{,}25x_1 - 2x_2 + 0{,}25x_3 & = & 1{,}5 \\
\hline
\text{I'} & 0 & = & 0 \\
\text{III'} & 0 & = & 0
\end{array}$$

x_2 und x_3 sind frei wählbar und werden deshalb zu Parametern ernannt:

$$\begin{array}{ll}
 & x_2 = \lambda \text{ und } x_3 = \mu \\
\text{in II} & x_1 = 6 + 8\lambda - \mu
\end{array}$$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Weil hier **zwei** freie Parameter vorkommen, spricht man von ∞^2 **Lösungen**. Auch hier sind andere Darstellungen der Lösungsmenge möglich. Hätte man zum Beispiel Gleichung II nach x_3 aufgelöst, dann wären x_1 und x_2 die freien Parameter:

$$\text{II} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_3 = 6 - x_1 + 8x_2}$$

$$\begin{array}{rl} \text{I}' & 0 = 0 \\ \text{III}' & 0 = 0 \end{array}$$

$x_1 = \sigma$ und $x_2 = \tau$

in II $\quad x_3 = 6 - \sigma + 8\tau$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \sigma, \tau \in \mathbb{R}$$

Homogene Gleichungssysteme

Wie verändern sich die Lösungen, wenn man die rechten Seiten der Gleichungen null setzt, das heißt, zu homogenen Systemen übergeht ? Wir rollen die Sache von hinten auf und untersuchen zuerst inhomogene Systeme mit unendlich vielen Lösungen. Das homogene System, das zum inhomogenen System mit ∞^1 Lösungen (Seite 17) gehört, lautet:

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -2x_2 + 3x_3} \\ \text{II} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ \hline \text{II}' & -5x_2 + 10x_3 & = & 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2x_3} \\ \text{III}' & -5x_2 + 10x_3 & = & 0 \\ \hline \text{III}'' & 0 & = & 0 \end{array}$$

$x_3 = \lambda$ (freier Parameter, es gibt ∞^1 Lösungen) $\Rightarrow x_2 = 2\lambda$ und $x_1 = -\lambda$,

zusammengefaßt zur **Lösung:** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$ oder

(andrer Lösungsweg): **Lösung:** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$

Auch das homogene System hat ∞^1 Lösungen.

Nun zum System mit den ∞^2 Lösungen. Das zugehörige homogene System ist:

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 0{,}5x_1 - 4x_2 + 0{,}5x_3 & = & 0 \\ \text{II} & -x_1 + 8x_2 - x_3 & = & 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 8x_2 - x_3} \\ \text{III} & 0{,}25x_1 - 2x_2 + 0{,}25x_3 & = & 0 \\ \hline \text{I}' & 0 & = & 0 \\ \text{III}' & 0 & = & 0 \end{array}$$

$x_2 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ (zwei freie Parameter, also ∞^2 Lösungen)

in II $\quad x_1 = 8\lambda - \mu$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Es fällt auf:

– der konstante Anteil ist $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (wird deshalb meistens weggelassen)

– die Lösung des homogenen Systems ist gerade der parameterabhängige Anteil der Lösung des inhomogenen Systems.

Diese Übereinstimmung verwundert nicht: An der Variablenrechnung hat sich nichts geändert, und die Konstanten der rechten Seite sind alle gleich null. Der Parameteranteil wird allein von der Variablenrechnung festgelegt.

Jetzt behandeln wir das Beispiel, das im inhomogenen Fall keine Lösung hat.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 0 \\
\text{II} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -2x_2 - 3x_3} \\
\text{III} & 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 & = & 0 \\
\hline
\text{I'} & -7x_2 - 7x_3 & = & 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -x_3} \\
\text{III'} & -14x_2 - 14x_3 & = & 0 \\
\hline
\text{III''} & 0 & = & 0
\end{array}$$

$x_3 = \lambda\,,\ x_2 = -\lambda\,,\ x_1 = -\lambda$ **Lösung:** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$

Obwohl das inhomogene System keine Lösung hat, gibt es beim homogenen System Lösungen (sogar unendlich viele!). Das sollte uns eigentlich nicht überraschen, denn jedes homogene System hat zumindest die Lösung, bei der alle Unbekannten gleich null sind. Diese Lösung heißt auch **triviale Lösung***. Ein homogenes System kann also nie unlösbar sein, die triviale Lösung gibts garantiert.

Zum Schluß rechnen wir das Beispiel, das im inhomogenen Fall genau eine Lösung hat.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 3x_2 - 2x_1} \\
\text{II} & x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 0 \\
\text{III} & -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\
\hline
\text{II'} & -9x_1 + 16x_2 & = & 0 \\
\text{III'} & x_1 - x_2 & = & 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = x_1} \\
\hline
\text{II'} & 7x_1 & = & 0
\end{array}$$

$\mathbf{x_1 = 0}$

in III' $\mathbf{x_2 = 0}$ **Lösung:** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (triviale Lösung)

in I $\mathbf{x_3 = 0}$

Auch das homogene System hat genau eine Lösung, und die muß dann die triviale sein.

* trivial = selbstverständlich
Als Trivium (=Dreiweg) bezeichnete man die ersten drei Fächer der sieben *Artes Liberales*, die in den Klosterschulen des Mittelalters als elementare Vorstufe des Studiums gelehrt wurden: Grammatik, Dialektik und Rhetorik. Danach folgte das anspruchsvollere Quadrivium (=Vierweg) mit: Arithmetik, Geometrie Astronomie und Musik. Deswegen nennt man besonders einfache Dinge auch trivial.

Das Einsetzverfahren funktioniert freilich auch bei 4,4-Systemen, 5,5-Systemen usw. Auch hier sind genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen möglich. Die Anzahl der freien Parameter kann entsprechend der Anzahl der Unbekannten steigen. Das Einsetzverfahren führt auch dann zum Ziel, wenn die Anzahl der Gleichungen nicht übereinstimmt mit der Anzahl der Unbekannten. Dazu zwei Beispiele:

4,2-System

$$
\begin{array}{lrcl l}
\text{I} & 2x_1 - x_2 & = & 5 & \boxed{x_2 = 2x_1 - 5} \\
\text{II} & -3x_1 + 2x_2 & = & -8 & \\
\text{III} & x_1 + 3x_2 & = & -1 & \\
\text{IV} & 4x_1 + 3x_2 & = & 4 & \\
\hline
\text{II'} & x_1 & = & 2 & \boxed{x_1 = 2} \\
\text{III'} & 7x_1 & = & 14 & \\
\text{IV'} & 10x_1 & = & 19 & \\
\hline
\text{III''} & 14 & = & 14 & \\
\text{IV''} & 20 & = & 19 & \lightning \ \text{Das System hat keine Lösung.}
\end{array}
$$

Wie das Beispiel zeigt, genügt es nicht, aus dem System einige Gleichungen herauszupicken und daraus »Lösungen« zu produzieren (die ersten beiden Gleichungen würden zur »Lösung« $(2\,|\,-1)$ führen). Weil **alle** Gleichungen erfüllt sein müssen, muß man die »Lösung« an den restlichen Gleichungen überprüfen ($(2\,|\,-1)$ löst zwar noch die dritte, aber nicht mehr die vierte Gleichung).

2,4-System

$$
\begin{array}{lrcl l}
\text{I} & x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 & \\
\text{II} & x_1 + x_3 - 2x_4 & = & -5 & \boxed{x_1 = 2x_4 - x_3 - 5} \\
\hline
\text{I'} & 3x_2 + 3x_4 & = & 9 & \boxed{x_4 = -x_2 + 3}
\end{array}
$$

Weil x_2 und x_3 nicht links vorkommen, wählen wir sie als freie Parameter $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$. Einsetzen in die eingerahmten Gleichungen liefert $x_4 = 3 - \lambda$ und $x_1 = 1 - 2\lambda - \mu$.

$$
\textbf{Lösung:}\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}
$$

Systeme mit mehr Gleichungen als Unbekannten heißen auch **überbestimmte Systeme**. Normalerweise haben sie keine Lösung.
Systeme mit weniger Gleichungen als Unbekannten heißen **unterbestimmte Systeme**. Normalerweise haben sie unendlich viele Lösungen.

Man kann zeigen: Enthält das System keinen Widerspruch, dann gilt:

$$
\boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der}\\ \text{Unbekannten}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der}\\ \text{Gleichungen}\end{array}} \leq \boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der}\\ \text{freien Parameter}\end{array}}
$$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Löse die Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -19x_1 - x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{2}{5}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. Löse die Gleichungssysteme und die zugehörigen homogenen Systeme:

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 &= 16 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 17x_3 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 8 \\ -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= -12 \end{aligned}$$

• 3. Einfach – aber nicht leicht (jedes System ist ein 3,3-System!)

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= -2 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ 8x_3 &= 4 \\ 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 6x_3 &= 8 \\ -6x_1 - 9x_3 &= -12 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + 8x_3 &= 7 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= x_1 \end{aligned}$$

4. Kleine Ursache – große Wirkung

a) $$\begin{aligned} 2{,}01x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 1{,}99x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2{,}01x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 1{,}99x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

• **5.** Bestimme die Parameter so, daß das System die angegebene Lösung hat:

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + x_3 &= -4 \\ bx_1 - 3x_2 + x_3 &= -5 \\ 6x_1 - x_2 + cx_3 &= 3a \end{aligned}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 6x_1 + ax_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Das System hat ∞^1 Lösungen.

6. Parabeln durch gegebene Punkte
Bestimme die Koeffizienten von $y = ax^2 + bx + c$ so, daß die zugehörige Parabel durch die angegebenen Punkte geht.

a) $P(1 \mid 1)$ $Q(-2 \mid -2)$ $R(3 \mid -7)$ b) $S(0 \mid -3)$ $T(1 \mid -1)$ $U(2 \mid 3)$
c) $I(1 \mid 1)$ $J(-1 \mid -1)$ $K(2 \mid 14)$ d) $E(1 \mid 1)$ $F(2 \mid 3)$ $G(-1 \mid -3)$
e) $U(1 \mid 0)$ $V(0 \mid 1)$ f) $W(1 \mid 2)$

7. Bestimme die Lösungen der 4,4-Systeme

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -4 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 9 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_2 + 5x_3 &= 21 \\ 3x_1 - 4x_4 &= -13 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

8. Überbestimmte Systeme

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -5 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 11 \\ 4x_1 - x_2 &= -13 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 3 \end{aligned}$

• e) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 \qquad &= -2 \end{aligned}$

9. Unterbestimmte Systeme

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -2x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

d) $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

e) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 \qquad - x_4 &= 3 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$

** 3 . Mathematischer Hintergrund

Zwischen den Lösungen eines inhomogenen und des zugehörigen homogenen Systems besteht ein einfacher Zusammenhang. Sind $(u_1 | u_2 | \ldots | u_n)$ und $(v_1 | v_2 | \ldots | v_n)$ zwei Lösungen eines inhomogenen m,n-Systems, dann ist $(u_1 - v_1 | u_2 - v_2 | \ldots | u_n - v_n)$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Das sieht man sofort ein, wenn man die i–ten Gleichungen des inhomogenen Systems nach dem Einsetzen voneinander subtrahiert

$$\begin{aligned} & a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + \ldots + a_{in} u_n = b_i \\ & a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \ldots + a_{in} v_n = b_i \\ \Rightarrow \quad & a_{i1}(u_1 - v_1) + a_{i2}(u_2 - v_2) + \ldots + a_{in}(u_n - v_n) = 0 \end{aligned}$$

Das ist die i-te Gleichung des zugehörigen homogenen Systems. Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems ist also eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Folglich ist **jede** Lösung des inhomogenen Systems darstellbar als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und einer Lösung des homogenen Systems. Es kommen sogar **alle** Lösungen des homogenen Systems vor, es gilt nämlich:

Alle Lösungen des homogenen Systems ergeben sich als Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems.

Begründung: Ist $(h_1 | h_2 | \ldots | h_n)$ irgendeine Lösung des homogenen Systems und $(v_1 | v_2 | \ldots | v_n)$ irgendeine Lösung des inhomogenen Systems, dann ist $(h_1 + v_1 | h_2 + v_2 | \ldots | h_n + v_n)$ eine Lösung des inhomogenen Systems: Setzt man $(h_1 + v_1 | h_2 + v_2 | \ldots | h_n + v_n)$ in die linke Seite der i-ten Gleichung des inhomogenen Systems ein, dann ergibt sich:

$$a_{i1}(h_1 + v_1) + a_{i2}(h_2 + v_2) + \ldots + a_{in}(h_n + v_n) =$$

$$\underbrace{(a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + \ldots + a_{in}h_n)}_{\mathbf{0}} + \underbrace{(a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \ldots + a_{in}v_n)}_{\mathbf{b}_i} = b_i$$

qed.

Das alles faßt man zusammen in dem Satz:

Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems läßt sich darstellen als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems.

Unter allgemeiner Lösung versteht man eine Lösung, die mindestens einen Parameter enthält. Eine allgemeine Lösung beschreibt eine Lösungsmenge. Ersetzt man in einer allgemeinen Lösung alle Parameter durch Zahlen, dann bekommt man eine spezielle Lösung. Genau das haben unsere Beispiele ergeben:

inhomogenes System

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

allgemeine Lösung :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zugehöriges homogenes System

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

allgemeine Lösung :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad + \quad \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\textbf{Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems}}$$

spezielle Lösung des inhomogenen Systems — allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

Jedes homogene System hat mindestens eine Lösung, nämlich die triviale. Gibt es eine weitere Lösung, dann gibt es gleich unendlich viele. (Nr. 4 der folgenden Aufgaben)

**Ein homogenes System kann nur genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.
Ein inhomogenes System kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.**

Ferner gilt: **Wenn ein homogenes System genau eine, also nur die triviale Lösung hat, dann hat auch jedes zugehörige inhomogene System genau eine Lösung.**

Den Beweis bringen wir später.

Übersicht über die Anzahlen von Lösungen

das inhomogene System hat	das zugehörige homogene System hat
keine Lösung	∞^1 oder ∞^2 oder ... Lösungen
genau eine Lösung	genau eine Lösung (die triviale)
∞^1 Lösungen	∞^1 Lösungen
∞^2 Lösungen	∞^2 Lösungen
usw.	usw.

das homogene System hat	jedes zugehörige inhomogene System hat
genau eine Lösung	genau eine Lösung
∞^1 Lösungen	keine oder ∞^1 Lösungen
∞^2 Lösungen	keine oder ∞^2 Lösungen
usw.	usw.

Aufgaben

1. a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Jemand behauptet, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ liefere Lösungen des Gleichungssystems.
Wie ist eine Probe möglich?

b) Begründe den Satz:

Sind $\begin{pmatrix} \dots \\ x_i \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ r_i \\ \dots \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \dots \\ u_i \\ \dots \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \dots \\ v_i \\ \dots \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Lösungen des Gleichungssystems mit der i-ten Zeile $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$, dann erfüllt $\begin{pmatrix} \dots \\ r_i \\ \dots \end{pmatrix}$ das Gleichungssystem und $\begin{pmatrix} \dots \\ u_i \\ \dots \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} \dots \\ v_i \\ \dots \end{pmatrix}$ das zugehörige homogene Gleichungssystem.

2.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a) Löse das Gleichungssystem.

Zeige: **b)** Ist $\begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$ eine Lösung, dann ist es auch $k \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$.

c) Sind $\begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \dots \\ b_i \\ \dots \end{pmatrix}$ Lösungen, dann ist es auch $\begin{pmatrix} \dots \\ a_i + b_i \\ \dots \end{pmatrix}$.

• **3.** Zeige allgemein:

a) Hat man eine Lösung eines homogenen Systems, dann ist auch jedes Vielfache eine Lösung.

b) Hat man zwei Lösungen eines homogenen Systems, dann ist auch ihre Summe eine Lösung.

c) **a)** und **b)** sind falsch für echte inhomogene Systeme.

4. Zeige: Hat ein homogenes System mehr als eine Lösung, dann hat es gleich unendlich viele.

5. **Unendlich viel oder nichts**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 \quad\; - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a) Bestimme die Lösung.

b) Gib ein zugehöriges inhomogenes System an, das keine Lösung hat.

c) Gib ein zugehöriges inhomogenes System an, das ∞^1 Lösungen hat.

d) Warum gibt es kein zugehöriges inhomogenes System, das genau eine Lösung oder ∞^2 Lösungen hat?

• **6.** Zeige: Kommt eine Unbekannte x_i, $1 \le i \le n$, in einem homogenen System nicht vor, dann gibt es unendlich viele Lösungen.
Dieser Satz ist falsch für inhomogene Systeme!
Zeige dies durch ein Gegenbeispiel.

• **7.** Zeige: Ein homogenes System mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.
Dieser Satz ist falsch für inhomogene Systeme!
Zeige dies durch ein Gegenbeispiel.

4. Der Gauß-Algorithmus

Besonders schnell lassen sich lineare Gleichungssysteme lösen, wenn sie in »Dreieckform« vorliegen:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \qquad & \boxed{x_1 = 5 - 3x_2 - x_3} \\ x_2 - 2x_3 &= 6 \qquad & \boxed{x_2 = 6 + 2x_3} \\ x_3 &= -2 \qquad & \boxed{x_3 = -2} \end{aligned}$$

Jede Gleichung kann man unabhängig von den andern nach einer Unbekannten auflösen (hier sogar ohne lästige Divisionen): Man setzt wieder von unten nach oben in die eingerahmten Gleichungen ein

$$x_3 = -2, \; x_2 = 2, \quad x_1 = 1 \qquad \textbf{Lösung:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Für Gleichungssysteme in dieser praktischen Form hat man eigene Bezeichnungen eingeführt. Ein System hat **Dreieckform**, wenn jede Gleichung **genau** eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende. Noch ein Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Die Dreieckform ist ein Sonderfall der Stufenform. Ein System hat **Stufenform**, wenn jede Gleichung **mindestens** eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende. Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Der bedeutendste deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUß (Braunschweig 1777 bis 1855 Göttingen) hat 1810 ein Verfahren angegeben, mit dem sich lineare Gleichungssysteme auf Stufenform bringen und dann bequem lösen lassen. Es war ein Nebenprodukt seiner mathematischen Untersuchungen des Planetoiden Pallas. Das Verfahren verallgemeinert das von den 2,2-Systemen her bekannte Additionsverfahren. GAUß zu Ehren bezeichnet man es als Gauß-Verfahren oder Gauß-Algorithmus.

Der Gauß-Algorithmus beruht auf zwei elementaren Umformungen, die die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändern (Äquivalenzumformungen):

- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ($\neq 0$)
- Ersetzen einer Gleichung durch die Summe aus ihr und dem Vielfachen einer andern

Man überlegt sich leicht, daß dies Äquivalenzumformungen sind:
Wir bringen die Konstanten auf die linken Seiten und kürzen die Gleichungen ab mit $T = 0$ beziehungsweise $S = 0$. Mit X als Abkürzung für ein Lösungstupel gilt dann

$$T(X) = 0 \;\Leftrightarrow\; k \cdot T(X) = 0 \qquad \text{falls } k \neq 0$$

und
$$\left.\begin{array}{l} T(X) = 0 \\ S(X) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} T(X) = 0 \\ S(X) + k \cdot T(X) = 0 \end{array}\right.$$

Wir führen das Gauß-Verfahren an Beispielen vor.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &=& -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &=& 4 \end{array}$$

Die 1.Gleichung schreiben wir ab. In der 2. und 3. Gleichung beseitigen wir x_1, indem wir geeignete Vielfache der 1. Gleichung addieren:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &=& -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &=& 4 \end{array}\right\| \quad \cdot(-3)\ +\quad \cdot(-2)\ +$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 7 \\ -10x_2 + x_3 &=& -22 \\ -3x_2 + 2x_3 &=& -10 \end{array}$$

Jetzt beseitigen wir x_2 in der 3.Gleichung. Wir addieren ein geeignetes Vielfaches der 2.Gleichung zur dritten, die 1. und 2. Gleichung schreiben wir ab:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 7 \\ -10x_2 + x_3 &=& -22 \\ -3x_2 + 2x_3 &=& -10 \end{array}\right\| \quad \cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)\ +$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 7 \\ -10x_2 + x_3 &=& -22 \\ \frac{17}{10}x_3 &=& -\frac{17}{5} \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat jetzt Dreieckform.
Wir besorgen uns die üblichen Rahmengleichungen und setzen von unten nach oben ein:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 7 \\ -10x_2 + x_3 &=& -22 \\ \frac{17}{10}x_3 &=& -\frac{17}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boxed{x_1 = 7 - 4x_2 - x_3} \\ \boxed{x_2 = \frac{22}{10} + \frac{1}{10}x_3} \\ \boxed{x_3 = -2} \end{array}$$

$$\textbf{Lösung:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bei der praktischen Durchführung läßt man der Einfachheit halber die Variablen weg und schreibt nur die Koeffizienten und die rechten Seiten hin. Zur besseren Übersicht trennt ein senkrechter Strich rechte und linke Seiten:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right\| \quad \cdot(-3)\ +\quad \cdot(-2)\ +$$

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array}\right\| \quad \cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)\ +$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & \frac{17}{10} & -\frac{17}{5} \end{array}$$

Das ist die Dreieckform. Jetzt schreibt man die Variablen am besten wieder hin und löst das System wie oben:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 7 \\ -10x_2 + x_3 &=& -22 \\ \frac{17}{10}x_3 &=& -\frac{17}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boxed{x_1 = 7 - 4x_2 - x_3} \\ \boxed{x_2 = \frac{22}{10} + \frac{1}{10}x_3} \\ \boxed{x_3 = -2} \end{array} \qquad \textbf{Lösung:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Manchmal gehts sogar noch schneller, wenn man nicht stur die Unbekannten von links nach rechts beseitigt. Das Beispiel zeigt, was gemeint ist:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right\| \quad \cdot(-3) \quad + \quad \cdot(-2) \quad + \quad \text{(wie gehabt)}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array}\right\| \quad \cdot(-2) \quad + \quad \text{(in der 3. Gleichung } x_3 \text{ beseitigen)}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 17 & 0 & 34 \end{array} \quad \text{Dreieckform (leicht vernebelt)}$$

Das Ganze wieder mit Variablen:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \qquad \boxed{x_1 = 7 - 4x_2 - x_3} \\ -10x_2 + x_3 &= -22 \qquad \boxed{x_3 = -22 + 10x_2} \\ 17x_2 &= 34 \qquad \boxed{x_2 = 2} \end{aligned}$$

$$\textbf{Lösung:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Räumt man auch noch nach oben aus (Gauß-Jordan-Algorithmus), dann ergibt sich die **Diagonalform**: in jeder Gleichung gibt es eine Unbekannte, die nur in dieser Gleichung vorkommt. Aus der Diagonalform liest man die Lösung unmittelbar ab. Wieder unser Beispiel:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right\| \quad \cdot(-3) \quad + \quad \cdot(-2) \quad + \quad \text{(wie gehabt)}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array}\right\| \quad \cdot(-2) \quad + \quad \cdot(-1) \quad +$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 0 & 29 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 17 & 0 & 34 \end{array}\right\| \quad \cdot\tfrac{10}{17} \quad + \quad \cdot\left(-\tfrac{14}{17}\right) \quad + \quad \cdot\tfrac{1}{17}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \quad \text{Diagonalform (leicht vernebelt)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_3 &= -2 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Nach Vertauschung der 2. und 3. Zeile (Gleichungen) ist die Diagonalform deutlicher und die Lösung augenfällig (rechte Spalte!):

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Das Gauß-Verfahren funktioniert auch bei Gleichungssystemen, die keine oder unendlich viele Lösungen haben. Wir greifen die Beispiele von Seite 16 auf:

Keine Lösung

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Aus naheliegenden Gründen vertauschen wir die ersten beiden Zeilen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}\right) \quad \cdot(-2)\,+ \quad \cdot(-3)\,+$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & -14 & -14 & 2 \end{array}\right) \quad \cdot(-2)\,+$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

↯ Widerspruch in $0 = -2$, keine Lösung!

Allgemein gilt: Hat eine Zeile links vom Strich lauter Nullen und rechts keine, dann hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Unendlich viele Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Variablen weg:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right) \quad \cdot(-2)\,+ \quad \cdot(-4)\,+$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right) \quad \cdot(-1)\,+$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \cdot(-\tfrac{1}{5}) \\ \text{»Nullzeile«, läßt man weg} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

jetzt müssen die Variablen wieder her:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \qquad & \boxed{x_1 = 6 - 2x_2 + 3x_3} \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \qquad & \boxed{x_2 = 2 + 2x_3} \end{aligned}$$

freier Parameter $x_3 = \mu,\ x_2 = 2 + 2\mu,\ x_1 = 2 - \mu$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$

Zum Schluß ein homogenes 4,6-System, das nicht auf eine Dreieckform führt:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 &= 0\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 3x_6 &= 0\\
2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 16x_4 + 10x_5 + 10x_6 &= 0\\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= 0
\end{aligned}$$

Variablen weg!

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
1 & 1 & 3 & 5 & 5 & 3 & 0\\
2 & 2 & 6 & 16 & 10 & 10 & 0\\
1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 0
\end{array}\right\| \quad \cdot(-1)\,+ \quad \cdot(-2)\,+ \quad \cdot(-1)\,+$$

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0\\
0 & 0 & 2 & 14 & 4 & 8 & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0
\end{array}\right\| \quad \cdot(-2)\,+$$

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0
\end{array}\right\| \quad \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+$$

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\| \quad \cdot{}^1/_6$$

Nullzeile weglassen

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & {}^2/_3 & 0
\end{array}$$

Variablen her!

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 &= 0\\
x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 &= 0\\
x_4 + {}^2/_3x_6 &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{x_4 = -{}^2/_3x_6}$$

$$\boxed{x_3 = -4x_4 - 2x_5 - 2x_6}$$

$$\boxed{x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 - x_6}$$

Die drei Variablen x_2, x_5 und x_6 kommen links nicht vor, sind also freie Parameter. Das System hat ∞^3-Lösungen. Um Brüche zu vermeiden, setzen wir: $x_6 = 3\lambda$, $x_5 = \mu$ und $x_2 = \nu$ und bekommen $x_4 = -2\lambda$, $x_3 = 2\lambda - 2\mu$ und $x_1 = -5\lambda + \mu - \nu$,

Lösung: $$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -5\\ 0\\ 2\\ -2\\ 0\\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Wegen des ständigen Abschreibens der Zahlentafeln braucht man beim Gauß-Algorithmus viel Zeit und Platz. Weil er so schematisch abläuft, läßt er sich gut im Computer programmieren und steht deshalb heute hoch im Kurs. Für den Handbetrieb aber eignet sich das Einsetzverfahren besser.

Das Additionsverfahren, auf dem der Gauß-Algorithmus beruht, wird gefährlich, wenn man sich nicht an die erlaubten Umformungen hält und kreuz und quer drauf losaddiert. Dazu ein **Warnungsbeispiel**:

I	$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$	Durch I+II beseitigen wir x_1:	$2x_2 = 2$
II	$x_1 + x_2 - x_3 = 1$	durch 2I+2II+III beseitigen wir x_2:	$5x_3 = 5$
III	$-4x_2 + 5x_3 = 1$	III schreiben wir ab:	$-4x_2 + 5x_3 = 1$

Das neue System hat die Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$.

Von diesen ∞^1 Lösungen ist nur eine einzige, nämlich die für $\mu = 1$ auch Lösung des gegebenen Systems. Die verwegenen Umformungen haben uns ein System beschert, das zum ursprünglichen nicht äquivalent ist.

Aufgaben

1. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a) $\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -19x_1 - x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} -\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{2}{5}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 &= 0 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

2. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 12x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 15x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 11x_2 + 30x_3 &= 0 \end{aligned}$

3. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 &= 12 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 &= -11 \\ x_2 - 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

4. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 3 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 15 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 35 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 3 \end{aligned}$$

• 5. Seltsame Gleichungssysteme fürs Gauß-Verfahren (jedes System hat die vier Unbekannten x_1 bis x_4):

a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -3 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ -x_4 &= 1 \end{aligned}$$

• 6. Seltsame Gleichungssysteme fürs Gauß-Verfahren (jedes System hat die vier Unbekannten x_1 bis x_4):

a) $x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 1$

b) $x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = 1$

• 7. Entscheide mit dem Gauß-Verfahren, für welche Werte von a, b und c es keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen gibt.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= a \\ x_1 - 2x_2 &= b \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= b \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= c \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= a \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + ax_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ ax_1 + x_2 &= 3 - a \end{aligned}$$

5. Das Determinantenverfahren

Für quadratische Gleichungen haben wir eine Formel, mit der wir entscheiden, wieviel Lösungen es gibt, und mit der wir die Lösungen gegebenenfalls auch bestimmen. Wenn bei einem linearen Gleichungssystem die Anzahl der Gleichungen übereinstimmt mit der Anzahl der Unbekannten (n,n-System), dann gibts auch hier eine Formel, die fast dasselbe kann.

Fangen wir mit einem 2,2-System an. Um die Formel zu finden, lösen wir das Gleichungssystem allgemein mit dem Additionsverfahren:

$$
\begin{array}{l||l||l}
ax_1 + bx_2 = u & \cdot d & \cdot(-c) \\
cx_1 + dx_2 = v & \cdot(-b) & \cdot a \\
\hline
(ad-cb)x_1 = ud - vb & & (ad-cb)x_2 = av - cu \qquad (**)
\end{array}
$$

Es fällt auf, daß lauter Terme der Form »Produkt minus Produkt« auftreten. Seit GAUß nennt man solche Ausdrücke **Determinanten**. Für die Determinante hat der britische Mathematiker Arthur CAYLEY (Richmond 1821 bis 1895 Cambridge) eine einfache Schreibweise eingeführt, die sich gut einprägen läßt, weil sie an die Form des Gleichungssystems erinnert:

> **Definition:** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - cb$ heißt zweireihige Determinante.

Grafische Eselsbrücke

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \mathbf{ad - cb}$$

Mit den Determinanten $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

$D_1 = \begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix} = ud - vb$ [die 1. Spalte von D ist ersetzt worden durch die rechte Seite des Gleichungssystems.]

$D_2 = \begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix} = av - cu$ [die 2. Spalte von D ist ersetzt worden durch die rechte Seite des Gleichungssystems.]

lauten die beiden Gleichungen (**): $Dx_1 = D_1$ und $Dx_2 = D_2$. Sie haben für $D \neq 0$ die eindeutigen Lösungen $x_1 = \frac{D_1}{D}$ und $x_2 = \frac{D_2}{D}$. Wie man sich (durch Einsetzen) leicht überzeugt, ist $(\frac{D_1}{D} \mid \frac{D_2}{D})$ auch Lösung des ursprünglichen Systems.

Ist $D = 0$, aber $D_1 \neq 0$ oder $D_2 \neq 0$, dann liegt ein Widerspruch vor: Das System hat keine Lösung. Sind alle drei Determinanten gleich null, dann hat das System sicher keine eindeutige Lösung, also unendlich viele oder keine Lösung.

Für Gleichungssysteme mit genau einer Lösung haben wir die Formel gefunden. Sie heißt zu Ehren des schweizer Mathematikers Gabriel CRAMER (Genf 1704 bis 1752 Bagnole-sur-Cèze), weil er sie als erster veröffentlicht hat.

Cramer-Regel

Das Gleichungssystem $\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= u \\ cx_1 + dx_2 &= v \end{aligned}$

hat für $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ die eindeutige Lösung mit $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$,

dabei ist $D_1 = \begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}$ und $D_2 = \begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}$.

Auch für 3,3-Systeme gibt es eine Lösungsformel mit Determinanten.

$$\begin{array}{llr} \text{I} & ax_1 + bx_2 + cx_3 = r & \\ \text{II} & dx_1 + ex_2 + fx_3 = s & \qquad \text{Gleichungssystem } \boxed{1} \\ \text{III} & gx_1 + hx_2 + ix_3 = t & \end{array}$$

Wie bei 2,2-Systemen isolieren wir durch geschickte Multiplikation und Addition der Gleichungen die Variable x_1. Dabei verwenden wir die zweireihigen Determinanten:

$$\text{I}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - \text{II}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + \text{III}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \text{ ergibt}$$

$$\left(a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}\right)x_1 = r\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - s\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \qquad (\heartsuit)$$

Diese Formel kann sich kein Mensch merken! CAYLEY hat auch dafür eine prägnante Abkürzung eingeführt. Es ist die dreireihige Determinante:

Definition: $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} := a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$

Eine dreireihige Determinante berechnet man schematisch so: Man nimmt das 1. Element der 1. Spalte (in unserm Fall ist es a) und streicht die Zeile und Spalte, in der es steht $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. Die übrigen 4 Elemente bilden eine zweireihige Determinante, die zugehörige **Unterdeterminante** $\mathbf{U_a} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$. Genauso verfährt man mit den anderen Elementen der 1. Spalte:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow U_d = \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow U_g = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Nun bildet man die drei Produkte der Elemente und ihrer Unterdeterminanten und addiert beziehungsweise subtrahiert sie abwechselnd. Damit läßt sich die linke Seite der Gleichung ($\heartsuit$) abkürzen mit $D\cdot x_1$. Auch die rechte Seite entpuppt sich als dreireihige

Determinante, wir nennen sie D_1. Sie entsteht aus D, wenn man die 1. Spalte durch die rechte Seite $\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$ des ursprünglichen Gleichungssystems ersetzt:

$D_1 = \begin{vmatrix} r & b & c \\ s & e & f \\ t & h & i \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - s\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$. Jetzt heißt die Gleichung (♥) kurz $Dx_1 = D_1$.

Analoge Rechnung ergibt: $Dx_1 = D_1$, $Dx_2 = D_2$, $Dx_3 = D_3$ — Gleichungssystem $\boxed{2}$

Man bekommt D_i, indem man die i-te Spalte von D durch die rechte Seite des ursprünglichen Gleichungssystems ersetzt.

Wir haben das System $\boxed{2}$ aus dem System $\boxed{1}$ abgeleitet; also ist jede Lösung von $\boxed{1}$ auch Lösung von $\boxed{2}$. Weil wir aber nicht nur Äquivalenzumformungen verwendet haben, können Scheinlösungen dazugekommen sein. Die Anzahl der Lösungen von $\boxed{2}$ ist deshalb größer oder gleich der Anzahl der Lösungen von $\boxed{1}$. Ist $D \neq 0$, dann hat $\boxed{2}$ als einzige Lösung das Tripel $(x_1 | x_2 | x_3)$ mit $x_i = \frac{D_i}{D}$. Zum Glück ist es auch immer Lösung von $\boxed{1}$, wie man durch Einsetzen mühsam bestätigt. Das ist die Cramer-Regel für 3,3-Systeme.

Cramer-Regel

Das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= r \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 &= s \\ gx_1 + hx_2 + ix_3 &= t \end{aligned}$$
hat für $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$ die eindeutige Lösung $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$ und $x_3 = \frac{D_3}{D}$,

dabei ist $D_1 = \begin{vmatrix} r & b & c \\ s & e & f \\ t & h & i \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a & r & c \\ d & s & f \\ g & t & i \end{vmatrix}$ und $D_3 = \begin{vmatrix} a & b & r \\ d & e & s \\ g & h & t \end{vmatrix}$.

Ist $D = 0$ und mindestens ein $D_i \neq 0$ $(i=1,2,3)$, dann enthält $\boxed{2}$ einen Widerspruch und auch $\boxed{1}$ hat keine Lösung. Ist aber $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$, so hat das System $\boxed{2}$ ∞^3 Lösungen. Das System $\boxed{1}$ hat dann entweder auch unendlich viele Lösungen oder gar keine. Man kann beweisen – und wir werden das später auch tun –, daß $\boxed{1}$ in diesem Fall sicher keine eindeutige Lösung hat.

Zusammenfassung

$D \neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\boxed{1}$ hat genau eine Lösung.
$D = 0$, mindestens ein $D_i \neq 0$	$\Rightarrow$	$\boxed{1}$ hat keine Lösung.
$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$	$\Rightarrow$	$\boxed{1}$ hat unendlich viele oder keine Lösung.

Hier noch ein Beispiel für den letzten Fall:
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 &= 0 \\ 0 \cdot x_2 &= 0 \quad \boxed{2} \\ 0 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Das System $\boxed{2}$ hat ∞^3 Lösungen.
$(x_1 = \lambda\,,\ x_2 = \mu\,,\ x_3 = \nu)$
Das System $\boxed{1}$ ist dagegen unlösbar!

Man könnte meinen, die Cramer-Regel sei für Gleichungssysteme reserviert, die genausoviel Gleichungen wie Unbekannte haben. Mit einem kleinen Trick klappt die Cramer-Regel aber auch bei andern Systemen. Bei einem 2,3-System zum Beispiel geht das so:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ \text{II} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

Wir ernennen die »überzählige« Unbekannte x_3 zum freien Parameter λ und bringen alle Terme mit x_3 auf die rechte Seite

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 + x_2 = 2 + 3\lambda \\ \text{II} & 3x_1 + 4x_2 = \quad -\lambda \end{array}$$

Jetzt kann Cramer ran:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2+3\lambda & 1 \\ -\lambda & 4 \end{vmatrix} = 8 + 13\lambda, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2+3\lambda \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = -6 - 11\lambda,$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{8 + 13\lambda}{5} = 1{,}6 + 2{,}6\lambda \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-6 - 11\lambda}{5} = -1{,}2 - 2{,}2\lambda$$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -2{,}2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Cramer-Regel läßt sich auch auf n,n-Gleichungssysteme mit mehr als drei Unbekannten anwenden. Wie in den Fällen $n = 2$, $n = 3$ gibt es für $D \neq 0$ eine eindeutige Lösung in der Form $x_i = \frac{D_i}{D}$. Doch muß man wissen, wie man n-reihige Determinanten berechnet. Es geht ähnlich wie bei den 3-reihigen Determinanten. Man nimmt der Reihe nach die n Elemente der 1. Spalte, multipliziert sie mit den zugehörigen (n–1)-reihigen Unterdeterminanten und addiert beziehungsweise subtrahiert diese Produkte abwechselnd. Bei einer 4-reihigen Determinante sieht das so aus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

Jede Unterdeterminante muß nach demselben Schema reduziert werden, bis schießlich eine zweireihige (oder einreihige) Determinante übrig bleibt. Das Prinzip ist zwar recht einfach, aber die Rechnung geht schnell ins Uferlose: Bei einer 10-reihigen Determinante braucht man zehn 9reihige Determinanten, das heißt, man muß 10·9 8reihige, also 10·9·8 7reihige, also ..., also 10·9·8·7·6·5·4·3 = 1814400 zweireihige Determinanten berechnen! Will man ein 10,10-System mit der Cramer-Regel bewältigen, dann fallen bei den 11 10-reihigen Determinanten $D, D_1, D_2, \dots, D_{10}$ 11·1814400·2 = 39916800 Multiplikationen an. Mit der Abkürzung $n! := n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \dots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$ (lies n-Fakultät) sind somit zur Lösung eines n,n-Systems $(n+1)\cdot n! = (n+1)!$ Multiplikationen nötig. Der Gauß-Algorithmus dagegen kommt mit $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$ Multiplikationen aus, er ist für $n \geq 3$ dem Determinantenverfahren haushoch überlegen. Zum Vergleich sind in einer Tabelle die Anzahlen der Multiplikationen bei beiden Methoden aufgeführt.

n,n-Gleichungssystem n =		2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Multiplikationen	Cramer	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800	39916 800
	Gauß	5	14	30	55	91	140	204	285	385

Ein Personal-Computer, der heute (1989) 20µs für eine Multiplikation braucht, schafft in einer 10tel Sekunde die 4900 Multiplikationen für ein 24,24-System beim Gauß-Algorithmus. Dasselbe Gleichungssystem wird denselben Computer beim Determinantenverfahren ungefähr 10^{13} Jahre beschäftigen – das ist etwa 500mal so lang, wie unser Weltall besteht.

Man könnte nun meinen, daß Determinanten nur von theoretischem Belang, praktisch aber völlig nutzlos wären. Dem ist aber nicht so! In einigen Gebieten der Mathematik sind sie ein hilfreiches Werkzeug, und auch wir werden 2- und 3-reihige Determinanten vorteilhaft verwenden, zum Beispiel zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten.

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Berechne

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0{,}5 & -5 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$

2. Berechne

a) $\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} r & r \\ 4 & 2r \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$

$\boxed{3.}$ Für welche Werte von a wird die Determinante null ?

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & -a \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}$

$\boxed{4.}$ Löse mit der Cramer-Regel (falls möglich!)

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 8 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= -6 \\ 6x_1 - 3x_2 &= 9 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 &= 12 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 12 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{6}x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= -6 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 &= -9 \\ 2x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$

$\boxed{5.}$ Löse mit der Cramer-Regel (Fallunterscheidungen!)

a) $\begin{aligned} ax_1 + x_2 &= 1 \\ 2ax_1 - x_2 &= 8 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a \\ ax_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x_1 - ax_2 &= 0 \\ ax_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 4ax_1 - 5ax_2 &= -9 \\ ax_1 - ax_2 &= 3 \end{aligned}$ **e)** $\begin{aligned} ax_1 + x_2 &= b \\ bx_1 + x_2 &= a \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} 6ax_1 + 3bx_2 &= -9 \\ 2bx_1 - ax_2 &= -3 \end{aligned}$

$\boxed{6.}$ Berechne

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

7. Berechne und vereinfache

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 0 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha\tan\beta & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha\tan\beta & \sin\alpha \\ 0 & -1 & \tan\beta \end{vmatrix}$

$\boxed{8.}$ Für welche Werte von a ist die Determinante null ?

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & a & 1 \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & -2 & b \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a & 5 & -4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$

$\boxed{9.}$ Löse die Gleichungssysteme mit der Cramer-Regel

a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 \phantom{{}+3x_3} &= -2 \\ 4x_1 \phantom{{}-x_2} + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

10. Löse mit der Cramer-Regel (Fallunterscheidungen!)

a) $\begin{aligned} ax_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 &= 2a \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + bx_3 &= 0 \\ ax_1 + bx_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} cx_2 + bx_3 &= a \\ cx_1 \phantom{{}+cx_2} + ax_3 &= b \\ bx_1 + ax_2 \phantom{{}+ax_3} &= c \end{aligned}$

11. Nimm x_3 als freien Parameter λ und löse mit der Cramer-Regel

a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 21x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 21x_3 &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 11x_3 &= 0 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

12. Löse mit der Cramer-Regel $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$

und nimm **a)** x_3 als freien Parameter λ
b) x_2 als freien Parameter μ
c) x_1 als freien Parameter ν

13. Löse mit der Cramer-Regel

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 9x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 4 \end{aligned}$

**6. Eigenschaften von Determinanten

Von den Determinanten brauchen wir später hauptsächlich die 3-reihigen. Deshalb stellen wir einige Sätze für sie vor. Berechnet man die 3-reihige Determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ allgemein, so ergibt sich ein Aggregat von sechs Produkten: $D = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$. Der deutsche Philosoph und Mathematiker Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (Leipzig 1.7.1646 bis 14.11.1716 Hannover) hat n-reihige Determinanten als Aggregate von n-fachen Produkten definiert. Ihm zu Ehren nennen wir ein solches Aggregat die **Leibniz-Form** der Determinante. $aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$ ist also die Leibniz-Form der 3-reihigen Determinante.

Für 3-reihige Determinanten hat der französische Mathematiker Pierre F. SARRUS eine Merkregel formuliert, sie heißt **Sarrus-Regel** oder auch **Jägerzaunregel**. Mit ihr findet man schnell die sechs Produkte und ihre Vorzeichen: Man schreibt die ersten beiden Spalten als 4. und 5. Spalte nochmal und multipliziert längs der Pfeile. Die »Abwärtsprodukte« zählen positiv, die »Aufwärtsprodukte« negativ:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ & & \nearrow gec & \nearrow hfa & \nearrow idb \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} & \mathbf{g} & \mathbf{h} \\ & & \searrow aei & \searrow bfg & \searrow cdh \\ - & - & - & & \end{array} \mathbf{= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb}$$

Beispiel: $\begin{vmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \\ 3&1&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \\ 3&1&2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1&2 \\ 2&3 \\ 3&1 \end{matrix} = 1{\cdot}3{\cdot}2 + 2{\cdot}1{\cdot}3 + 3{\cdot}2{\cdot}1 - 3{\cdot}3{\cdot}3 - 1{\cdot}1{\cdot}1 - 2{\cdot}2{\cdot}2 = -18$

(Die Sarrus-Regel gilt **nur** für dreireihige Determinanten!)

Aus der Leibniz-Form kann man einige Determinantensätze leicht ableiten:

$\boxed{1}$ **Vertauscht man in einer Determinante die Zeilen mit den Spalten, so ändert die Determinante ihren Wert nicht.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} a&b&c \\ d&e&f \\ g&h&i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a&d&g \\ b&e&h \\ c&f&i \end{vmatrix}$

Zum Beweis berechnen wir die Leibniz-Form der rechten Determinante:
aei + dhc + gbf – ceg – fha – ibd.
Sie stimmt mit der Leibniz-Form der linken Determinante überein.
Nach diesem Satz sind in allen Determinanten Spalten und Zeilen gleichberechtigt.
Deshalb verwenden wir von jetzt an den Oberbegriff **Reihe**.

$\boxed{2}$ **Ersetzt man eine Reihe durch ihr k-faches, so ist der Wert der neuen Determinante k-mal so groß wie der Wert der alten Determinante.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} ka&kb&kc \\ d&e&f \\ g&h&i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a&b&c \\ d&e&f \\ g&h&i \end{vmatrix}$

Zum Beweis überlegt man sich mit der Sarrus-Regel, daß der Faktor k in jedem Produkt genau einmal vorkommt (und deswegen ausgeklammert werden kann).

$\boxed{3}$ **Eine Nullreihe macht die Determinante zu null.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} 0&0&0 \\ d&e&f \\ g&h&i \end{vmatrix} = 0$ Zum Beweis setze man in Satz $\boxed{2}$ $k = 0$.

$\boxed{4}$ **Vertauscht man zwei parallele Reihen, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} d&e&f \\ a&b&c \\ g&h&i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a&b&c \\ d&e&f \\ g&h&i \end{vmatrix}$

Zum Beweis berechnet man die linke Seite:
dbi + ecg + fah – gbf – hcd – iae = – (aei + bfg + cdh – gec – hfa – idb)

$\boxed{5}$ **Sind zwei parallele Reihen zueinander proportional, so hat die Determinante den Wert null.**

Beispiel: $D = \begin{vmatrix} a&b&c \\ ka&kb&kc \\ g&h&i \end{vmatrix} = 0$ Beweis: $D = k\begin{vmatrix} a&b&c \\ a&b&c \\ g&h&i \end{vmatrix} = -k\begin{vmatrix} a&b&c \\ a&b&c \\ g&h&i \end{vmatrix} = -D$

(Vertauschen von 1. und 2. Zeile)

Aus $D = -D$ folgt $D = 0$.

$\boxed{6}$ **Besteht eine Reihe aus Summen, so läßt sich die Determinante als Summe zweier Determinanten schreiben.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Zum Beweis überlegt man sich mit der Sarrus-Regel, daß in jedem Produkt genau eine Summe vorkommt. Das Distributivgesetz bestätigt die Behauptung.

$\boxed{7}$ **Addiert man zu einer Reihe ein Vielfaches einer andern parallelen Reihe, so ändert die Determinante ihren Wert nicht.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} a+kb & b & c \\ d+ke & e & f \\ g+kh & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Beweis: $\begin{vmatrix} a+kb & b & c \\ d+ke & e & f \\ g+kh & h & i \end{vmatrix} = (\text{Satz } \boxed{6}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb & b & c \\ ke & e & f \\ kh & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$,

denn nach Satz $\boxed{5}$ ist $\begin{vmatrix} kb & b & c \\ ke & e & f \\ kh & h & i \end{vmatrix} = 0.$

Mit Satz $\boxed{7}$ lassen sich Determinanten wesentlich einfacher berechnen als mit dem Unterdeterminanten-Verfahren. Wie beim Gauß-Algorithmus bringt man durch Addition geeigneter Reihen-Vielfacher die Determinante auf Dreieckform.

Beispiel: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -18$

Der Wert einer Determinante ergibt sich aus der Dreieckform, wenn man alle Zahlen der **Hauptdiagonale** (von links oben nach rechts unten) multipliziert. Das gilt auch für n-reihige Determinanten.

Beispiel: $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-4) = -24$

Auch die Sätze $\boxed{1}$ bis $\boxed{7}$ gelten für n-reihige Determinanten.
Wir verzichten auf die Beweise, weil wir die Sätze für $n > 3$ nicht brauchen.

Zum Abschluß verallgemeinern wir das Verfahren der Entwicklung einer Determinante. Wie man leicht nachrechnet, läßt sich eine Determinante nach jeder Reihe entwickeln, wenn man die Unterdeterminante nach dem Verfahren von Seite 36 durch Streichen der jeweiligen Zeilen und Spalten erzeugt und mit dem Vorzeichen versieht, das sich aus dem Schema (rechts) ergibt:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Beliebt sind Reihen mit möglichst vielen Nullen.
So wird man die folgende Determinante nach der 2. Zeile entwickeln:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +4 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4(5+21) = 104$$

Entwickeln nach der 3. Zeile dauert etwas länger:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} -3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} +5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-28) + 0 + 5 \cdot 4 = 104$$

Aufgaben

1. Berechne ohne zu „rechnen"

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 12 & 5 & -8 \end{vmatrix}$

2. Berechne ohne zu „rechnen"

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x^2 & x & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. Begründe mit den Determinantensätzen

a) $\begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ u & v & u+v+w \\ x & y & x+y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a+b & a-b & c \\ u+v & u-v & w \\ x+y & x-y & z \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+tb & ta+b & c \\ u+tv & tu+v & w \\ x+ty & tx+y & z \end{vmatrix} = (1-t^2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$

• **4.** Schreibe als Summe von Determinanten, die keine Summen enthalten

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1+a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a+b & b+c & 1 \\ a+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

•• **5.** Addiere ein Vielfaches einer Reihe zu einer andern parallelen Reihe und zeige (rechtzeitig ausklammern!):

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ [Vandermonde-Determinante, nach ALEXANDRE THÈOPHILE VANDERMONDE (1735 bis 1796)]