Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

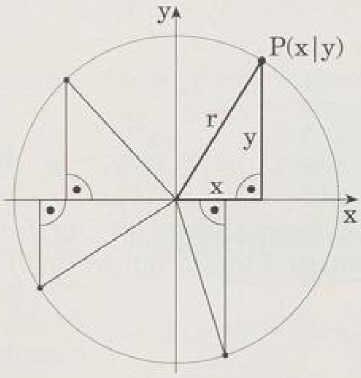
2. Die Mittelpunkt-Gleichung einer Ellipse Fläche und Umfang - Ellipsenzirkel - *Scheitel-Krümmungskreise

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

2. Die Mittelpunkt-Gleichung einer Ellipse

So wie man die Punkte einer Gerade durch die Gleichung $ay + bx + c = 0$ beschreiben kann, so lassen sich auch die Punkte einer Ellipse mit einer Gleichung festlegen. Beginnen wir mit der einfachsten Ellipse, dem Kreis. k sei ein Kreis um $M(0|0)$ mit Radius r. Nach Pythagoras gilt für jeden Kreispunkt $P(x|y)$:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



Damit ist die Gleichung schon gefunden. Nach y aufgelöst ergibt sich:

$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}$ das heißt $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ (oberer Halbkreis)

oder $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (unterer Halbkreis)

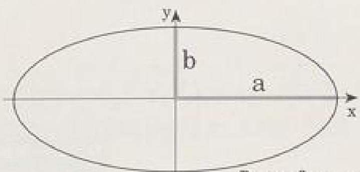
Die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen a und b und Mittelpunkt $M(0|0)$ ergibt sich, wenn man einen Kreis mit Radius $r = a$ in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ staucht.

Aus der Kreisgleichung $|y| = \sqrt{a^2 - x^2}$ bekommen wir die

Ellipsengleichung $|y| = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Quadrieren und Sortieren liefert die **Mittelpunkt-Gleichung** der Ellipse mit den Halbachsen a (in x-Richtung) und b (in y-Richtung).

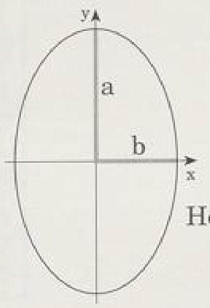
$$\boxed{\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}}$$



Querformat

Liegt die große Halbachse in y-Richtung, dann heißt die Gleichung:

$$\boxed{\mathbf{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}}$$



Hochformat

Ein anderer Weg von der Kreisgleichung zur Ellipsengleichung folgt aus den uns schon bekannten Koordinaten-Beziehungen zwischen einem Punkt $(x_k|y_k)$ des Hauptkreises mit Radius a und Ellipsenpunkt $(x_e|y_e)$:

$$x_e = x_k$$ (siehe Seite 210)

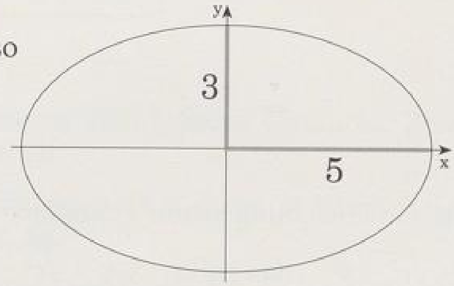
$$y_e = \frac{b}{a} y_k \quad \Rightarrow \quad y_k = \frac{a}{b} y_e$$

Kreisgleichung: $x_k^2 + y_k^2 = a^2$ eingesetzt ergibt

Ellipsengleichung: $x_e^2 + \frac{a^2}{b^2} y_e^2 = a^2$ in üblicher Form: $\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2} = 1$

Die Gleichung der Ellipse im Querformat mit den Halbachsen 3 und 5 um M (0|0) lautet also

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$



Diese Gleichung lässt sich umformen zu:

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

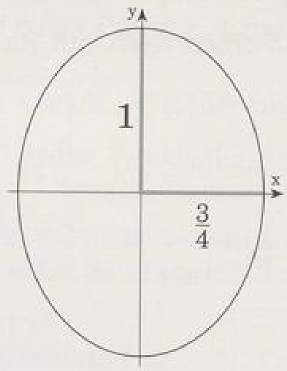
Allgemein beschreibt jede Gleichung der Form $px^2 + qy^2 - r = 0$ mit $p, q, r > 0$ eine Ellipse. Die Halbachsen finden wir durch geeignete Umformung:

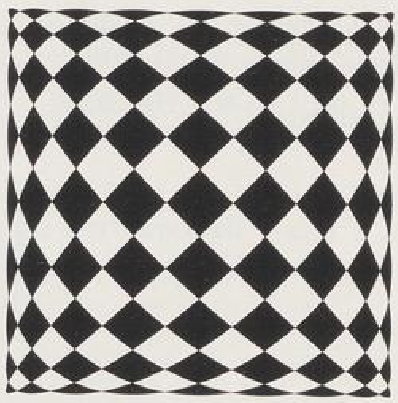
$$16x^2 + 9y^2 - 9 = 0$$

$$16x^2 + 9y^2 = 9$$

$$\frac{16x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$\frac{x^2}{(3/4)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1, \quad b = 3/4$$

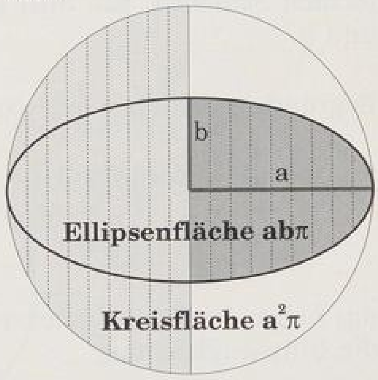




***Fläche und Umfang der Ellipse**

Die Idee von der Ellipse als gestauchtem Kreis führt auch zu einer einfachen Formel für die Fläche einer Ellipse. Man denkt sich den Kreis in sehr schmale, annähernd rechteckige Streifen zerlegt. Beim Stauchen bleibt jeder Streifen gleich breit, seine Höhe und damit seine Fläche nehmen ab aufs $\frac{b}{a}$-fache. Also gilt $A_{\text{Ellipse}} = \frac{b}{a} A_{\text{Kreis}}$.

$$\boxed{A_{\text{Ellipse}} = ab\pi}$$



Wer nun nach dieser einfachen Flächenformel erwartet, dass es auch für den Umfang der Ellipse eine einfache Formel gibt, der irrt. Nur mit Hilfe höherer Mathematik findet man Ausdrücke, mit denen man den Umfang näherungsweise berechnen kann. Eine kleine Auswahl:

① $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]$

② $U_{\text{Ellipse}} \approx \frac{\pi}{2} \left[a + b + \sqrt{2(a^2+b^2)}\right]$

③ $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \left(a + b + \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}\right)$

Für $a = b = r$ wird aus diesen drei Formeln erwartungsgemäß der Term $\pi \cdot 2r$. Wer's exakt haben will, muss eine Summe mit unendlich vielen Summanden »berechnen«, zum Beispiel

④ $U_{\text{Ellipse}} = 2a\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \ldots\right]$

mit $e^2 = a^2 - b^2$.

Für eine Ellipse mit $a = 1$ und $b = 0{,}5$ ergibt sich $F = ab\pi = 0{,}5\pi$. Das ist die halbe Fläche des großen Halbkreises mit $r = 1$. Dieser Kreis hat den Umfang 2π. Die Näherungsformeln für den Ellipsenumfang liefern (10 gültige Dezimalen)

① $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right] = \pi \cdot 1{,}542\,893\,218\,8\ldots$

② $U_{\text{Ellipse}} \approx \frac{\pi}{2} \left[\frac{3}{2} + \sqrt{2 \cdot \frac{5}{4}}\right] = \pi \cdot 1{,}540\,569\,415\,0\ldots$

③ $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \left[\frac{3}{2} + \frac{1/4}{4 \cdot 3/2}\right] = \pi \cdot 1{,}541\,666\,666\,6\ldots$

④ $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \cdot 1{,}541\,964\,425\,1\ldots$

***Ellipsenzirkel**

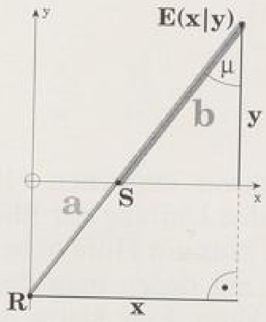
Zum Zeichnen von Kreisen hat man als Werkzeug den Zirkel erfunden. Verblüffenderweise gibt es auch ein mechanisches Gerät zum Zeichnen von Ellipsen, den Ellipsenzirkel. Seine Funktionsweise beruht auf der Papierstreifen-Konstruktion.
Zwei feste Punkte R und S eines Stabs mit $\overline{ER} = a$ und $\overline{ES} = b$ gleiten in zueinander senkrechten Schienen. Ein Stift im Endpunkt E zeichnet eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.

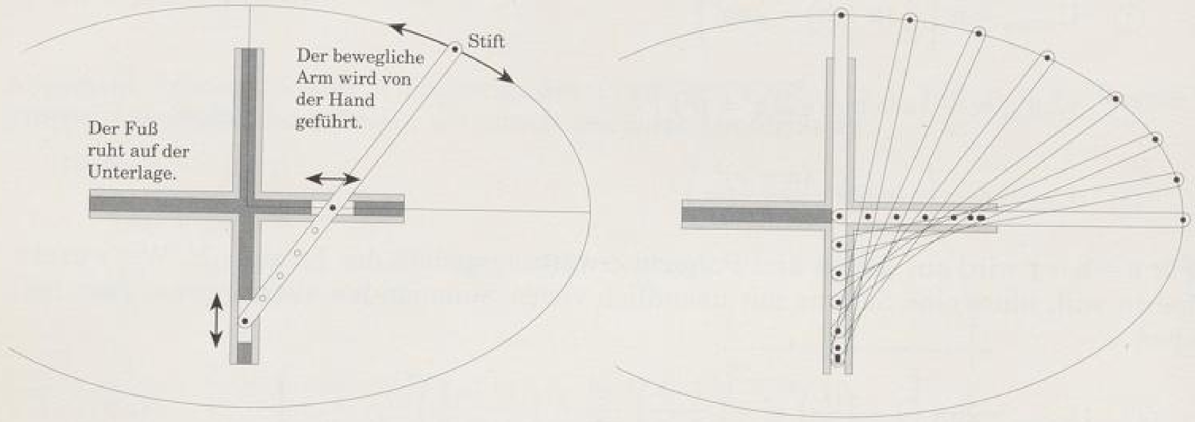
Begründung: $\sin\mu = \frac{x}{a}$, $\cos\mu = \frac{y}{b}$

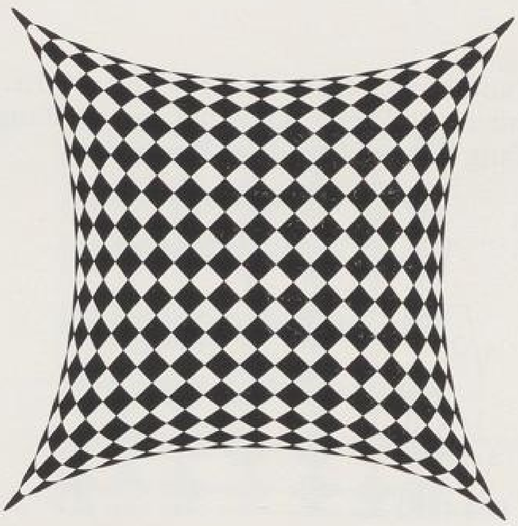
$$(\sin\mu)^2 + (\cos\mu)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

das heißt, die Koordinaten von E erfüllen die Ellipsengleichung.

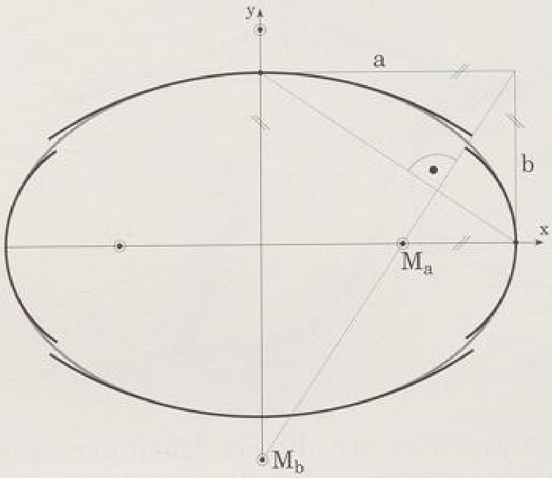






* Die Scheitel-Krümmungskreise

Normalerweise hat man keinen Ellipsenzirkel zur Hand. Aber auch ein Kreiszirkel eignet sich zum näherungsweisen Zeichnen von Ellipsen. Dazu dienen vier Kreisbögen, die die Ellipse in der Umgebung der Scheitel am besten annähern. Sie heißen **Scheitel-Krümmungskreise**. Ihre Mittelpunkte liegen aus Symmetriegründen auf den Achsen. Das Bild erklärt die Konstruktion dieser Mittelpunkte M_a und M_b.



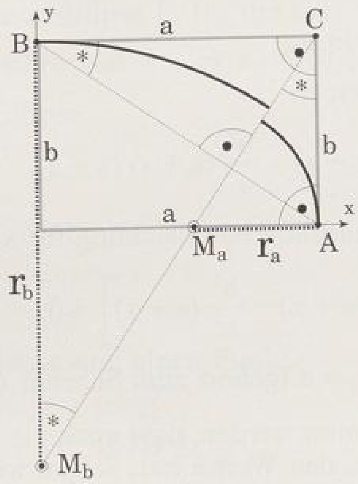
Zeichnet man die vier Kreisbögen (die sich nicht schneiden!), dann hat man schon einen verblüffend guten Eindruck von Ellipse. Diese lässt sich jetzt gut skizzieren – aber Obacht: immer innerhalb der großen und außerhalb der kleinen Näherungskreise bleiben, denn nur die vier Scheitel sind Ellipsenpunkte! Die Kreisradien liest man aus der Konstruktionsfigur ab:

Aus $\Delta CAM_a \sim \Delta BCA$ folgt

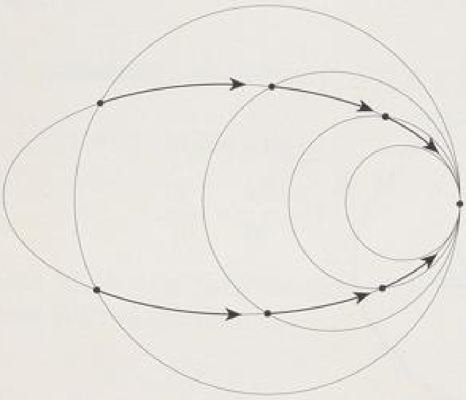
$$\frac{r_a}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{also} \quad \boxed{r_a = \frac{b^2}{a}}$$

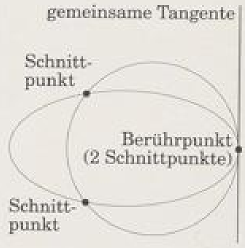
Aus $\Delta BCM_b \sim \Delta CAB$ folgt

$$\frac{r_b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{also} \quad \boxed{r_b = \frac{a^2}{b}}$$



Wer's genauer wissen will, erfährt jetzt den mathematischen Hintergrund.
Im Allgemeinen schneiden sich Kreis und Ellipse in vier Punkten.
Haben sie eine gemeinsame Tangente, dann berühren sie sich: Zwei Schnittpunkte fallen in einem Berührpunkt zusammen. Als Berührpunkt wählen wir den rechten Hauptscheitel, halten ihn fest und verkleinern den Radius. Dabei wandern die beiden andern Schnittpunkte auf der Ellipse in Richtung Berührpunkt.

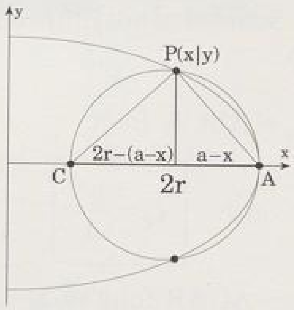




Bei einem bestimmten Radius treffen sich alle vier Schnittpunkte im Berührpunkt und bilden einen vierfachen Schnittpunkt. Grafisch äußert sich das darin, dass sich der Kreis jetzt besonders innig an die Ellipse anschmiegt.
Für die Koordinaten der beiden beweglichen Schnittpunkte gelten zwei Gleichungen

I $\quad y^2 = (2r - a + x)(a - x)$
(Höhensatz im Dreieck CAP)

II $\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$
(Ellipsengleichung)



Gleichsetzen liefert:

$$(2r - a + x)(a - x) = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x)$$

das ergibt eine quadratische Gleichung für x

$$(a - x)\left[(2r - a + x) - \frac{b^2}{a^2}(a + x)\right] = 0$$

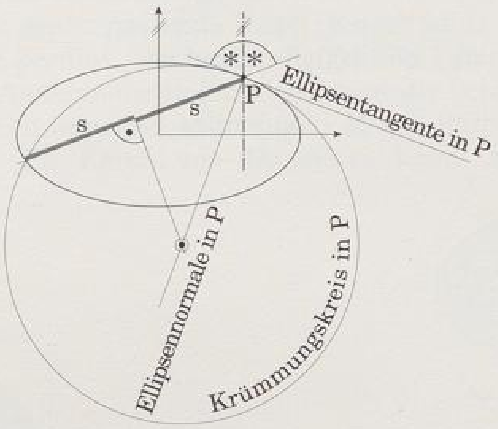
Eine Lösung ist $x_1 = a$ (gehört zum Scheitel A).

r soll nun so bestimmt werden, dass auch die zweite Lösung x_2, für die die zweite Klammer [...] gleich null ist, den Wert a hat. Setzen wir in [...] a für x ein, so ergibt sich für r

$$\left[(2r - a + a) - \frac{b^2}{a^2}(a + a)\right] = 0$$

$2r = 2\,\frac{b^2}{a} \;\Rightarrow\; r = \frac{b^2}{a}$, das ist der Radius r_a des kleinen Scheitel-Krümmungskreises.

Für den Radius r_b des großen Scheitel-Krümmungskreises gelten entsprechende Überlegungen. Die Scheitel-Krümmungskreise sind deshalb so besonders gute Schmiegekreise, weil in jedem Scheitel vier Schnittpunkte zusammenfallen. Dieselbe Überlegung für andere Ellipsenpunkte zeigt, dass nur drei Schnittpunkte zusammenfallen: Jetzt durchdringen die Schmiegekreise die Ellipse. Ihre Konstruktion ist schwieriger.



Aufgaben

Wenn nichts anderes vermerkt ist, liegt die Ellipse im Querformat. Ihr Mittelpunkt ist immer der Ursprung.

1. Wie lautet die Mittelpunkt-Gleichung einer Ellipse E, für die gilt

a) $a = 2,\ b = 1$ **b)** $a = 2,\ b = 1$, Hochformat **c)** $a = \sqrt{10}\ ,\ b = \sqrt{5}$

2. Bestimme die Halbachsen a und b der Ellipse.
Hat die Ellipse Quer- oder Hochformat?

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ **b)** $0{,}5x^2 + 2y^2 = 2$

c) $4x^2 + y^2 = 1$ **d)** $\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{25}y^2 = \frac{1}{4}$

3. Von einer Ellipse kennt man eine Halbachse und einen Punkt.
Bestimme die andere Halbachse.

a) $a = 5\sqrt{5}\ ,\ P(10|1)$ **b)** $b = 5\sqrt{2}\ ,\ P(-14|1)$

c) $a = 5\sqrt{10}\ ,\ P(15|-3)$ **d)** $b = 4\sqrt{13}\ ,\ P(-15|-8)$

4. Von einer Ellipse kennt man die Punkte P und Q.
Bestimme die Mittelpunkt-Gleichung. (Tip: Substitution von $1/a^2$ und $1/b^2$)

a) $P(9|-1),\ Q(-7|3)$ **b)** $P(-1|9),\ Q(-9|6)$
c) $P(17|4),\ Q(23|-1)$ **d)** $P(-19|4),\ Q(16|11)$