Anschauliche analytische Geometrie

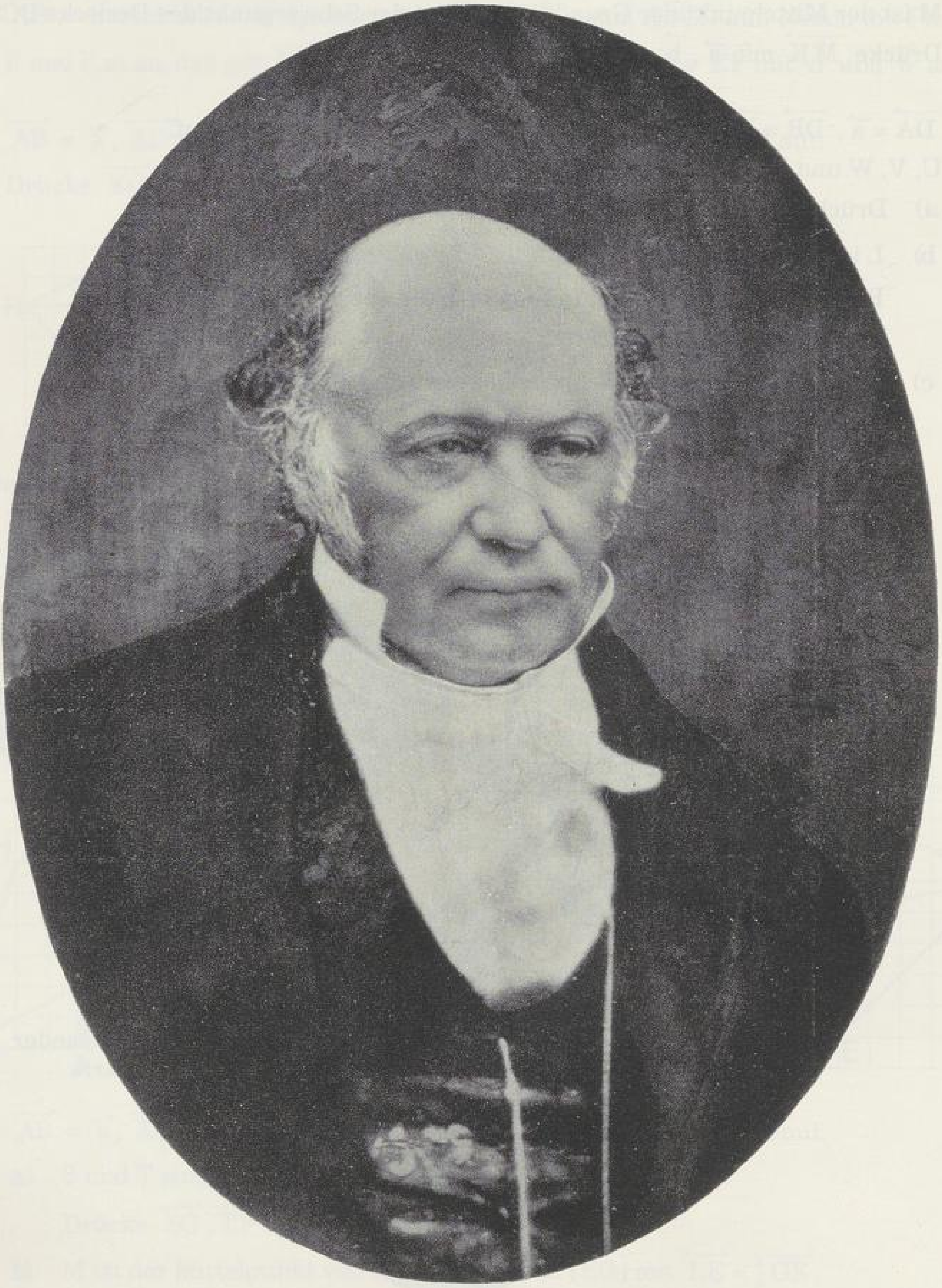
Barth, Elisabeth

München, 2000

IV. Elementare Vektorrechnung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

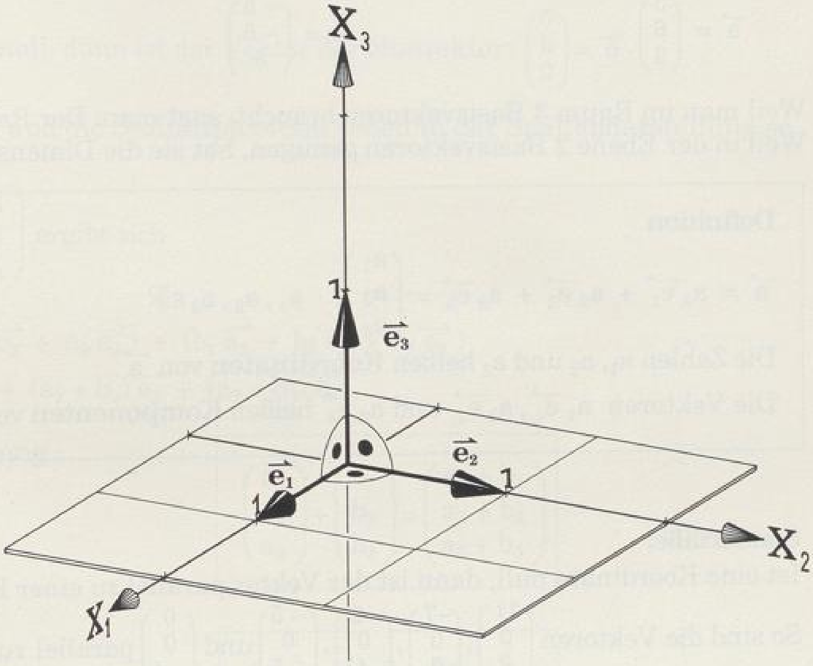
IV. Elementare Vektorrechnung



William Rowan Hamilton (1805 bis 1865)

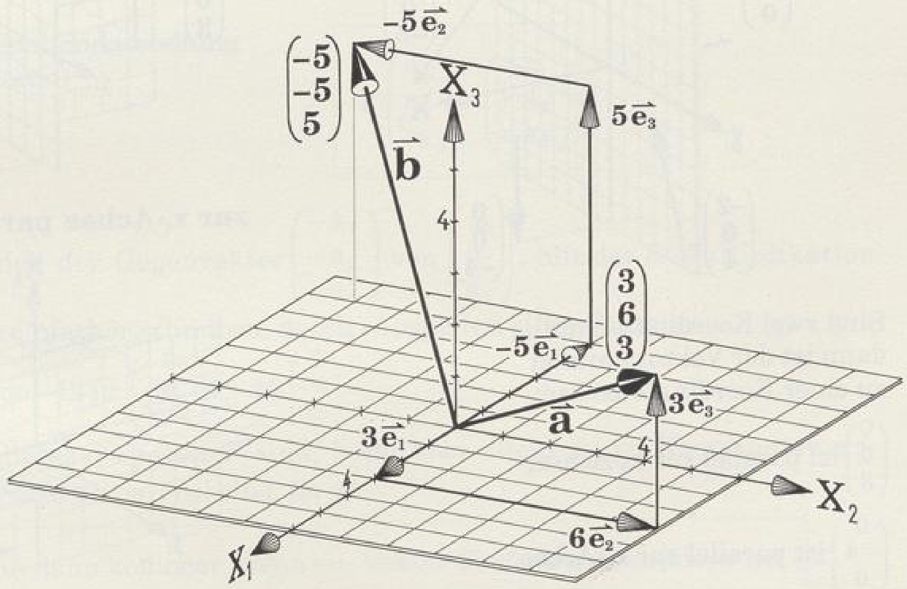
1. Vektorrechnung mit Koordinaten

Man zeichnet im Koordinatensystem drei Vektoren als **Basis** aus:



$\overrightarrow{e_1}$ ist der Vektor der Länge 1 in Richtung der x_1-Achse, entsprechend definiert man $\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{e_3}$. Die Vektoren $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{e_3}$ heißen **Basisvektoren**. Jeder Vektor des Raums läßt sich eindeutig darstellen als Summe von Vielfachen dieser Basisvektoren, zum Beispiel

$\vec{a} = 3\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$ $\qquad$ $\vec{b} = -5\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$



$\vec{a}$ ist also durch die Zahlen 3, 6 und 3 festgelegt, $\vec{b}$ durch – 5, – 5 und 5. Statt der Summendarstellung verwenden wir von jetzt an die praktischere Spaltendarstellung und schreiben kurz

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

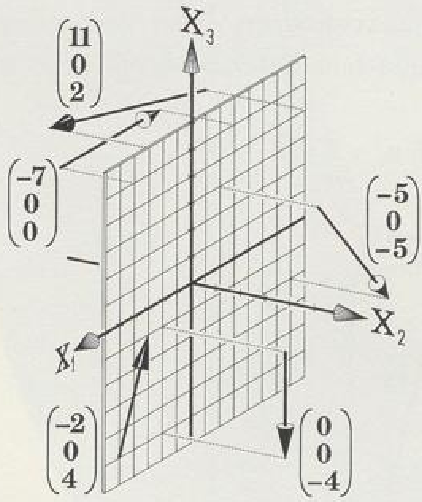
Weil man im Raum 3 Basisvektoren braucht, sagt man: Der Raum hat die **Dimension** 3. Weil in der Ebene 2 Basisvektoren genügen, hat sie die Dimension 2 .

> **Definition**
>
> $$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} =: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$
>
> Die Zahlen a_1, a_2 und a_3 heißen **Koordinaten** von $\vec{a}$.
>
> Die Vektoren $a_1\vec{e_1}$, $a_2\vec{e_2}$ und $a_3\vec{e_3}$ heißen **Komponenten** von $\vec{a}$.

Sonderfälle:

Ist eine Koordinate null, dann ist der Vektor parallel zu einer Koordinatenebene.

So sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ parallel zur x_1x_3-Ebene.

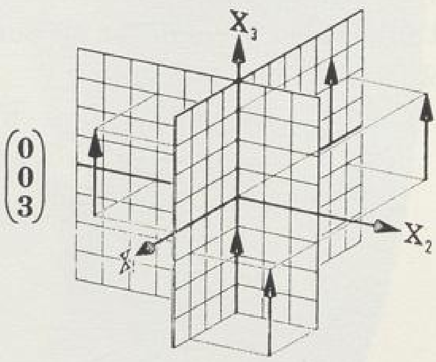


Sind zwei Koordinaten null, dann ist der Vektor parallel zu einer Koordinatenachse:

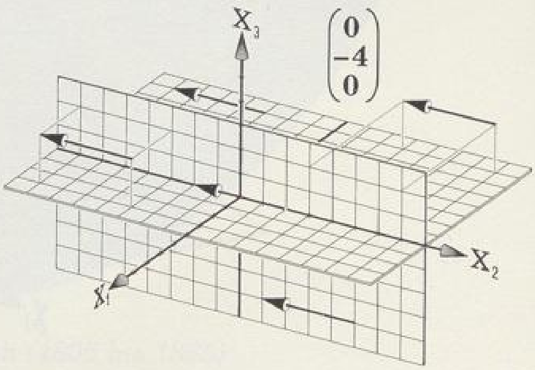
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_3-Achse,

$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_2-Achse.

zur x_3-Achse paralleler Vektor



zur x_2-Achse paralleler Vektor



Diese Vektoren sind auch parallel zu zwei Koordinatenebenen:

$\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ ist parallel zur x_1x_3- und x_2x_3-Ebene, $\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ ist parallel zur x_1x_2- und x_2x_3-Ebene.

Sind alle drei Koordinaten null, dann ist der Vektor der Nullvektor: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{o}$

Die Addition von Vektoren und die S-Multiplikation sehen in der Spaltendarstellung so aus:

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) + (b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3})\\ &= (a_1+b_1)\vec{e_1} + (a_2+b_2)\vec{e_2} + (a_3+b_3)\vec{e_3}\end{aligned}$$

Addition in Spaltendarstellung
(zeilenweise addieren)

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}}$$

Auch die Subtraktion geht zeilenweise:

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}}$$

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $r \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$r \cdot \vec{a} = r(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) = (ra_1)\vec{e_1} + (ra_2)\vec{e_2} + (ra_3)\vec{e_3}$$

S-Multiplikation in Spaltendarstellung
(jede Zeile multiplizieren)

$$\boxed{r \cdot \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cdot a_1\\r\cdot a_2\\r\cdot a_3\end{pmatrix}}$$

Für $r = -1$ ergibt sich der Gegenvektor $\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$. Mit der S-Multiplikation lassen sich Vektoren einfacher schreiben, durch »Abspalten eines Faktors«.

Beispiel: Abspalten von -12 in $\begin{pmatrix}-36\\24\\-144\end{pmatrix} = -12\begin{pmatrix}3\\-2\\12\end{pmatrix}$

Weil $\vec{a}$ und $r\vec{a}$ kollinear (=parallel) sind, kann man allein durch Koordinatenvergleich erkennen, ob Vektoren parallel sind. Es gilt:

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann kollinear, wenn ein Vektor Vielfaches des andern ist.

$$\left.\begin{array}{ll}\vec{a} = \mu\,\vec{b}, & \mu\in\mathbb{R} \quad \text{oder} \\ \vec{b} = \lambda\,\vec{a}, & \lambda\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind kollinear.}$$

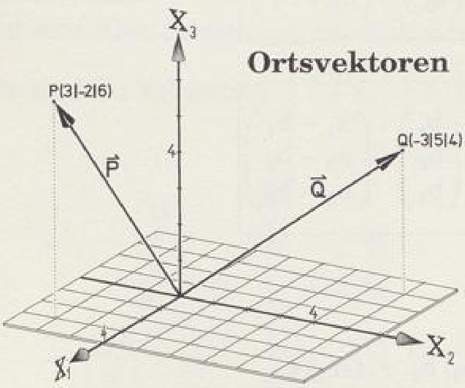
Nach dieser Festlegung ist übrigens der Nullvektor kollinear zu jedem Vektor!

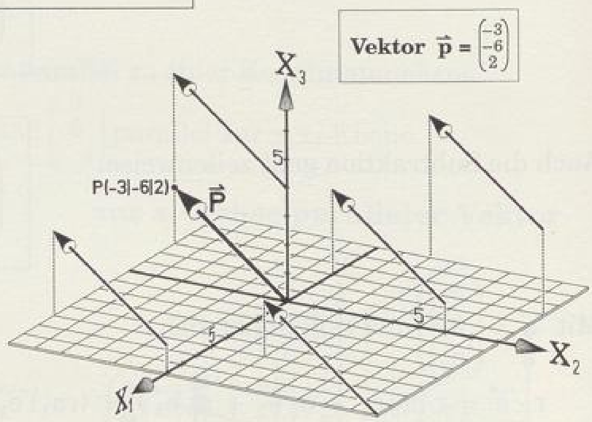
Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1{,}5\\7\\-3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-6\\-28\\12\end{pmatrix}$ sind kollinear, denn $\vec{b} = -4\,\vec{a}$.

Ortsvektoren

Zu jedem Punkt gibt es einen Pfeil, der im Ursprung beginnt und in P endet. Dieser Pfeil legt eindeutig einen Vektor $\overrightarrow{OP}$ fest. Wir nennen ihn **Ortsvektor** des Punkts P und bezeichnen ihn kurz mit $\vec{P}$. Die Vektorkoordinaten von $\vec{P}$ stimmen mit den Punktkoordinaten von P überein.

Zu $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ gehört $\vec{P} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$ und umgekehrt.



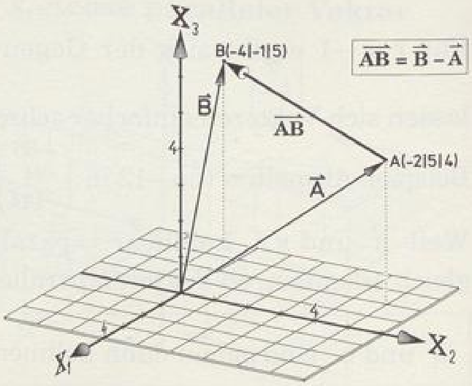


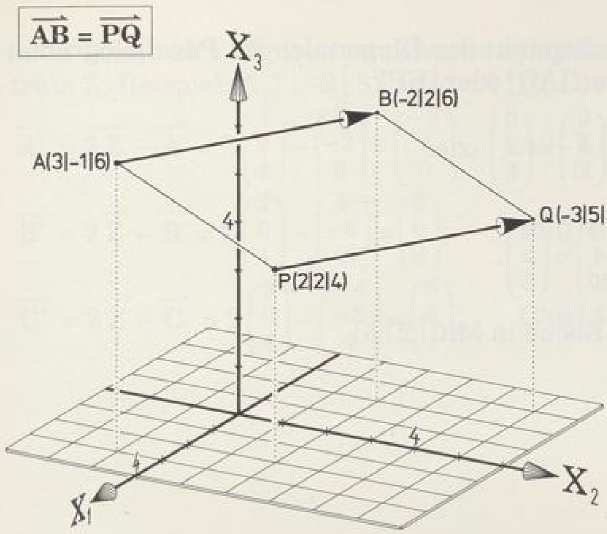
Jeder Vektor kann auch die Rolle eines Ortsvektors spielen und einen Punkt festlegen: Dieser Punkt ist der Endpunkt desjenigen Repräsentanten, der im Ursprung ansetzt.

Jeder Vektor ist durch zwei Punkte festgelegt. Deshalb müssen sich seine Koordinaten aus den Koordinaten der Punkte berechnen lassen.

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = -\vec{A} + \vec{B}$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix}b_1 - a_1\\b_2 - a_2\\b_3 - a_3\end{pmatrix}$$





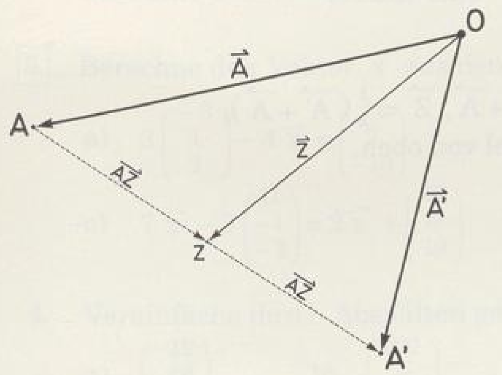
In einem Beispiel berechnen wir Verbindungsvektoren der Punkte A(3 | –1 | 6), B(–2 | 2 | 6) , P(2 | 2 | 4) und Q(– 3 | 5 | 4) und beschreiben damit die Lage dieser Punkte.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BP} = \vec{P} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{AB} \neq \mu \overrightarrow{BP}$ ($\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BP}$ sind nicht parallel) ist PQBA ein Parallelogramm. Weil die dritten Koordinaten von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ}$ null sind, liegen die Seiten [PQ] und [AB] parallel zur x_1x_2-Ebene. Weil die zweite Koordinate von $\overrightarrow{BP}$ null ist, liegt die Diagonale [BP] parallel zur x_1x_3-Ebene.

Sehr oft braucht man den Mittelpunkt einer Strecke:



$$\vec{M} = \vec{A} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{A} + \tfrac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A}) = \tfrac{1}{2}\vec{A} + \tfrac{1}{2}\vec{B}$$

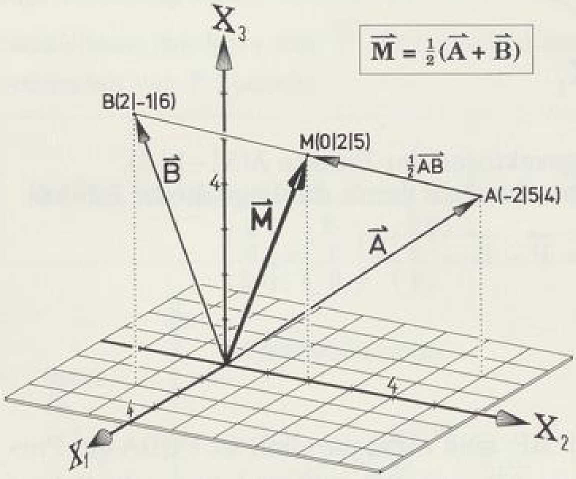
Mittelpunkt M der Strecke [AB]: $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$

Mit dieser Formel berechnen wir den Schnittpunkt der Diagonalen im Parallelogramm PQBA (oben) als Mittelpunkt der Diagonalen [AQ] oder [BP]:

$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}(\vec{A} + \vec{Q}) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}(\vec{B} + \vec{P}) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

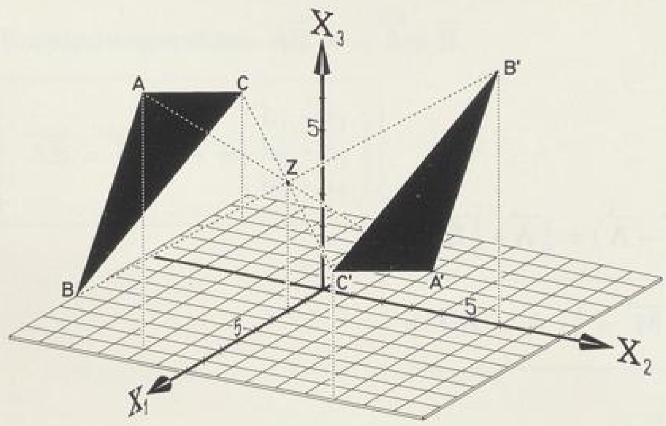
Die Diagonalen schneiden sich in der x_2x_3-Ebene in M(0 | 2 | 5) .



Die Spiegelung eines Punkts an einem Punkt ist mit Ortsvektoren rechnerisch schnell erledigt. Der Punkt A soll am Zentrum Z gespiegelt werden. Gesucht ist der Spiegelpunkt A'. Weil man mit Punkten nicht rechnen kann, verwenden wir ihre Ortsvektoren: $\vec{A'} = \vec{A} + 2\,\vec{AZ} = \vec{A} + 2(\vec{Z} - \vec{A}) = \mathbf{2\,\vec{Z} - \vec{A}}$ oder kürzer

$\vec{A'} = \vec{Z} + \vec{AZ} = \vec{Z} + \vec{Z} - \vec{A} = \mathbf{2\vec{Z} - \vec{A}}$.

Übrigens: Nach $\vec{Z}$ aufgelöst ergibt sich $2\,\vec{Z} = \vec{A'} + \vec{A}$, $\vec{Z} = \frac{1}{2}(\vec{A'} + \vec{A})$, das ist die Strecken-Mittelpunkt-Formel von oben.



Jetzt lassen sich Figuren punktweise spiegeln, zum Beispiel das Dreieck ABC am Zentrum Z. Beispiel: A(7 | −2 | 8), B(4 | − 6 | 0), C(− 4 | − 5 | 4) und Z(2 | 0 | 4).

$\overrightarrow{A'} = 2\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{A} = 2\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$; **A'(−3 | 2 | 0)**

$\overrightarrow{B'} = 2\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{B} = 2\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix}$; **B'(0 | 6 | 8)**

$\overrightarrow{C'} = 2\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{C} = 2\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\-5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\5\\4\end{pmatrix}$; **C'(8 | 5 | 4)**

Aufgaben

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix}10\\0\\-2\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix}4\\-6\\4\end{pmatrix}$. Berechne

a) $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b) $2\vec{u} - 3\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{u} + (\vec{v} - 2\vec{w})$, $\frac{1}{3}[(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}) - 3\vec{v}]$

2. $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix}6\\-1\\-3\end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Berechne den Vektor $\vec{r}$, der $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ zur geschlossenen Vektorkette ergänzt.

3. Berechne den Vektor $\vec{x}$ aus den Vektorgleichungen:

a) $3\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} - 4\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\7\\-10\end{pmatrix}$ **b)** $2\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} + 5\vec{x}$

c) $7\vec{x} - 3\begin{pmatrix}11\\-1\\-3\end{pmatrix} = 2\vec{x} + \begin{pmatrix}17\\18\\19\end{pmatrix}$

4. Vereinfache durch Abspalten geeigneter Faktoren:

a) $\begin{pmatrix}-12\\-18\\-42\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}300\\75\\-225\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-9/4\\3/4\\-3\end{pmatrix}$

5. Gegeben: **a)** A(2 | 2 | 1) , B(3 | 2 | −1) , C(1 | 2 | 3)
b) A(0 | 2 | 4) , B(1 | 8 | 0) , C(2 | 1 | 4)
c) A(0 | 24) , B(18 | 0) , C(21 | 4)

Berechne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $2\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$

6. $A(3\,|\,0\,|\,0)$, $B(-1\,|\,4\,|\,0)$, $C(0\,|\,-2\,|\,0)$ und $D(0\,|\,0\,|\,3{,}5)$ sind die Ecken eines Tetraeders.

a) Berechne die Mittelpunkte U von [AC], V von [BC], W von [BD] und X von [AD].

b) Zeige, daß UVWX ein Parallelogramm ist und berechne den Mittelpunkt M des Parallelogramms.

c) Fertige eine saubere Zeichnung an.

10
5 0 10
4

7. Ein Repräsentant $\overrightarrow{AB}$ eines Vektors wird senkrecht in zwei Koordinatenebenen projiziert. Rekonstruiere $\overrightarrow{AB}$ aus den Projektionen $\overrightarrow{A_iB_i}$ und gib die Projektion in die dritte Koordinatenebene an.

a) $\overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A_3B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

8. Die Strecke [AB] mit $A(1\,|\,2\,|\,3)$, $B(3\,|\,2\,|\,1)$ wird über B hinaus um sich selber verlängert. Berechne den Endpunkt C.

9. $R(4\,|\,5\,|\,6)$ und $S(7\,|\,8\,|\,9)$ teilen die Strecke [AB] in drei gleiche Teile. Berechne A und B.

10. $Ä(0\,|\,4\,|\,5)$, $Ö(3\,|\,0\,|\,5)$ und $Ü(3\,|\,4\,|\,0)$ sind die Ecken eines Parallelogramms. Bestimme die vierte Ecke E (drei Lösungen!).

11. Vom Parallelogramm ABCD kennt man $B(2\,|\,4\,|\,3)$ und $C(3\,|\,0\,|\,-5)$ und den Schnittpunkt der Diagonalen $M(-2\,|\,4\,|\,15)$. Berechne A und D.

12. Berechne vom Spat ABCDEFGH mit $A(9\,|\,7\,|\,5)$, $B(-1\,|\,-1\,|\,-1)$, $F(0\,|\,2\,|\,3)$ und $G(1\,|\,3\,|\,5)$ die restlichen Ecken.

13. $A(1\,|\,-3\,|\,5)$, $B(-7\,|\,9\,|\,-11)$, $C(13\,|\,-15\,|\,17)$
M_1, M_2 und M_3 sind die Mitten der Seiten a, b und c des Dreiecks ABC.
Berechne $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$ und $\overrightarrow{CM_3}$.

14. Berechne $\vec{X}$ in Abhängigkeit von $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ so, daß gilt:
$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{CX} = \vec{o}$.

15. $A(2\,|\,0\,|\,0)$, $Z_1(1\,|\,2\,|\,1)$, $Z_2(1\,|\,3\,|\,3)$. A' ist das Bild von A bei Spiegelung an Z_1, A'' ist das Bild von A' bei Spiegelung an Z_2.

a) Bestimme A'' und ein Zentrum Z, so daß A an Z gespiegelt A'' ergibt.

b) Zeige: $\overrightarrow{Z_1Z_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA''}$

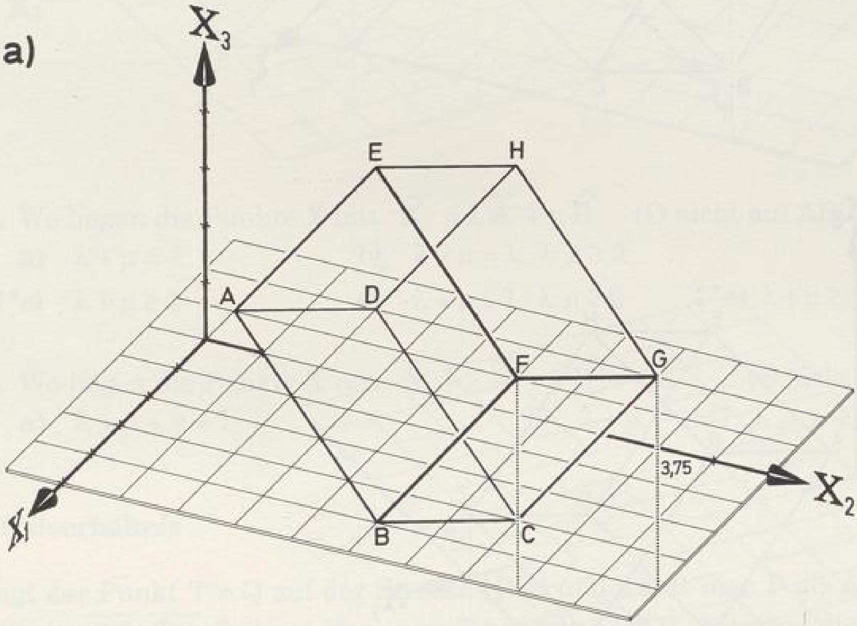
16. A(2 | 0 | 0) , B(4 | 2 | 0) , C(2 | 3 | 0) , D(3 | 2 | 2) , A'(0 | 6 | 2)
Das Tetraeder A'B'C'D' entsteht beim Spiegeln von ABCD am Zentrum Z.

a) Bestimme Z und die restlichen Ecken des Spiegelbilds.

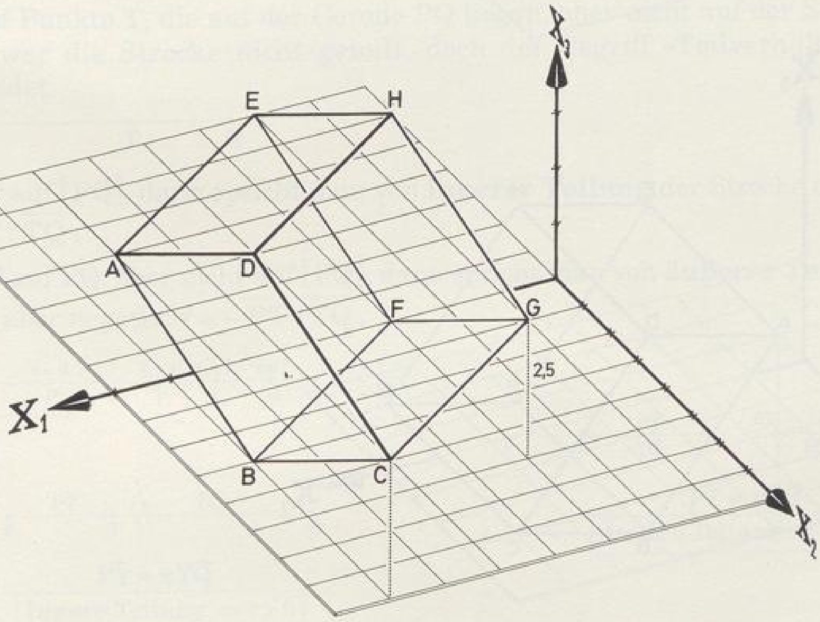
b) Fertige eine saubere Zeichnung an. 5 / 3 0 13 / 6

17. Alle sechs Bilder zeigen verschiedene Spate mit jeweils demselben Umriß. Jedes Spat steht mit einer Seitenfläche auf der x_1x_2-Ebene. Benachbarte Gitterlinien der x_1x_2-Ebene haben den Abstand 1. Die punktierte Strecke kennzeichnet die dritte Koordinate. Bestimme die Spatecken und die von A ausgehenden Kantenvektoren.

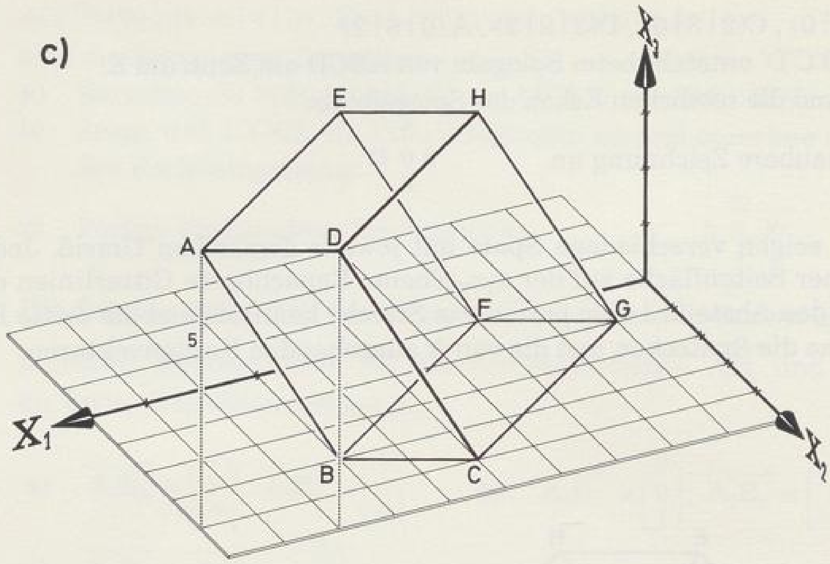
a)



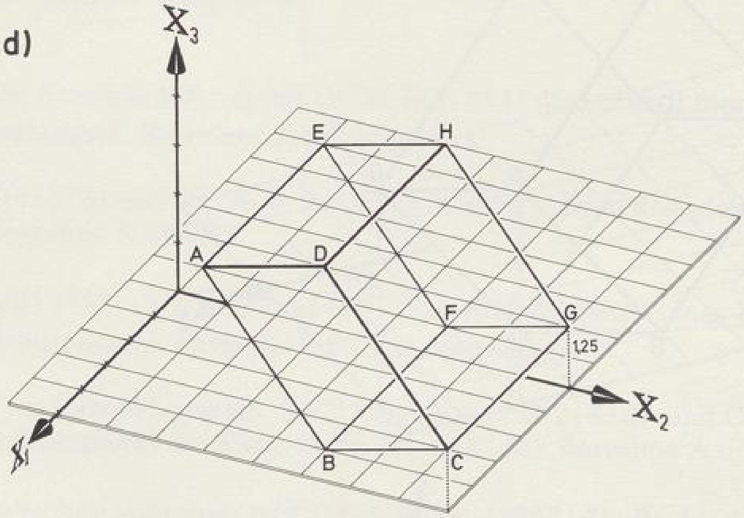
b)



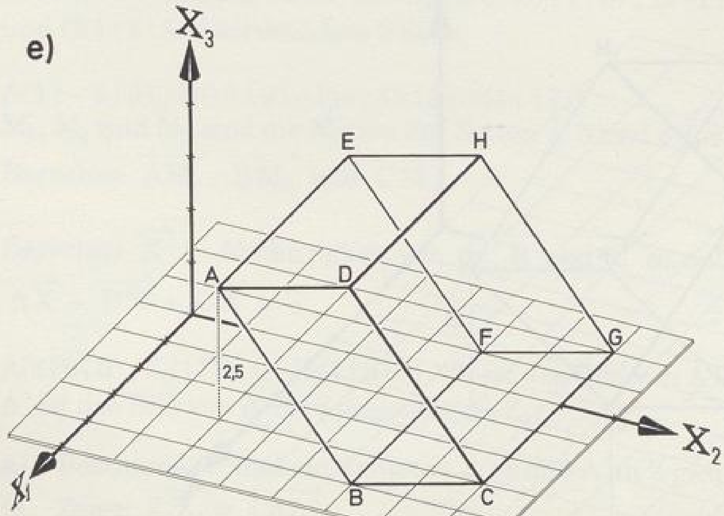
c)



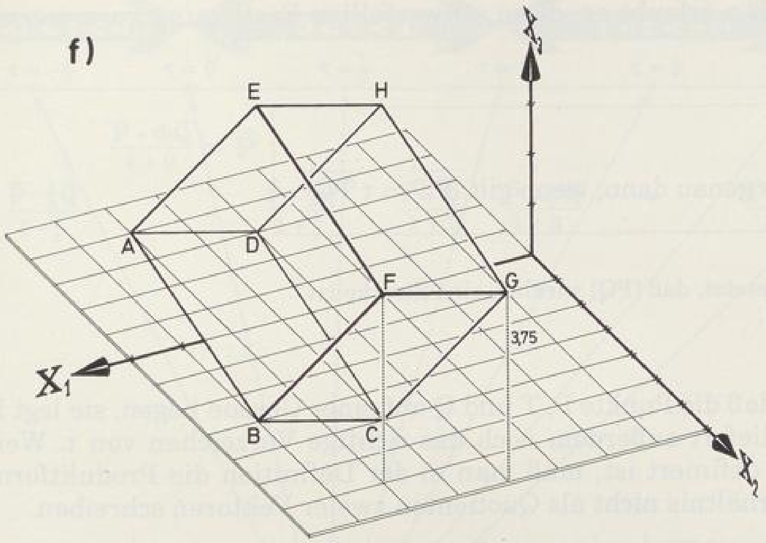
d)



e)



f)



• **18.** Wo liegen die Punkte X mit $\vec{X} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B}$ (O nicht auf AB!)

a) $\lambda + \mu = 1$ **b)** $\lambda + \mu = 1,\ \lambda, \mu \geq 0$

:•c) $\lambda + \mu \geq 1$ **d)** $\lambda + \mu \leq 1,\ \lambda, \mu \geq 0$ **:•e)** $\lambda + \mu \geq 1,\ \lambda, \mu \geq 0$

: 19. Wo liegen die Punkte X mit $\vec{X} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B} + \nu\vec{C}$ (C nicht auf AB!)

a) $\lambda + \mu + \nu = 1$ **b)** $\lambda + \mu + \nu = 1,\ \lambda, \mu, \nu \geq 0$

2. Teilverhältnis

Liegt der Punkt $T \neq Q$ auf der Strecke $[PQ]$ und wählt man P als Anfangspunkt, dann heißt $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$ Teilverhältnis von T bezüglich $[PQ]$. Man hat diese Definition erweitert auf Punkte T, die auf der Gerade PQ liegen, aber nicht auf der Strecke $[PQ]$. Hier wird zwar die Strecke nicht geteilt, doch der Begriff »Teilverhältnis« wird weiter verwendet.

Liegt T auf $[PQ]$, dann spricht man von **innerer Teilung** der Strecke und zählt τ positiv: $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$.

Liegt T auf PQ, aber nicht auf $[PQ]$, dann spricht man von **äußerer Teilung** der Strecke, zählt τ aber negativ: $\tau = -\overline{PT} : \overline{TQ}$.

$$\vec{PT} = \tau\vec{TQ}$$

$\boxed{\textbf{Innere Teilung} \Leftrightarrow \tau > 0}$

$$\vec{PT} = \tau\vec{TQ}$$

$\boxed{\textbf{Äußere Teilung} \Leftrightarrow \tau < 0}$

Die Verwendung von Vektoren erlaubt es, diese schwerfällige Festlegung zu ersetzen durch eine kurze, elegante

Definition

T teilt [PQ] im Verhältnis τ genau dann, wenn gilt $\overrightarrow{PT} = \tau\,\overrightarrow{TQ}$.

Selbstverständlich ist vorausgesetzt, daß [PQ] wirklich eine Strecke ist, P und Q also verschieden sind.

Diese Definition garantiert, daß die Punkte P, T und Q auf einer Gerade liegen, sie legt P als Anfangspunkt fest und liefert außerdem noch das richtige Vorzeichen von τ. Weil für Vektoren kein Quotient definiert ist, muß man in der Definition die Produktform wählen und kann das Teilverhältnis nicht als Quotienten zweier Vektoren schreiben.

Aus $P(1\,|\,0\,|\,3)$, $Q(1\,|-4\,|-1)$ und $T(1\,|-1\,|\,2)$ errechnet sich τ so:

$\overrightarrow{PT} = \tau\,\overrightarrow{TQ}$ in Spaltendarstellung $\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix}$, das ist ein 3,1-Gleichungssystem für τ

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 0 &=& 0\tau \\ \text{II} & -1 &=& -3\tau \\ \text{III} & -1 &=& -3\tau \end{array}$$

$\tau = \frac{1}{3}$ löst alle drei Gleichungen, T teilt [PQ] im Verhältnis 1:3.

Was wäre gewesen, wenn Q die Koordinaten $(1\,|-4\,|\,1)$ gehabt hätte ? Das Gleichungssystem in $\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$ hätte dann so ausgesehen:

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 0 &=& 0\tau \\ \text{II} & -1 &=& -3\tau \\ \text{III} & -1 &=& -\tau \end{array}$$

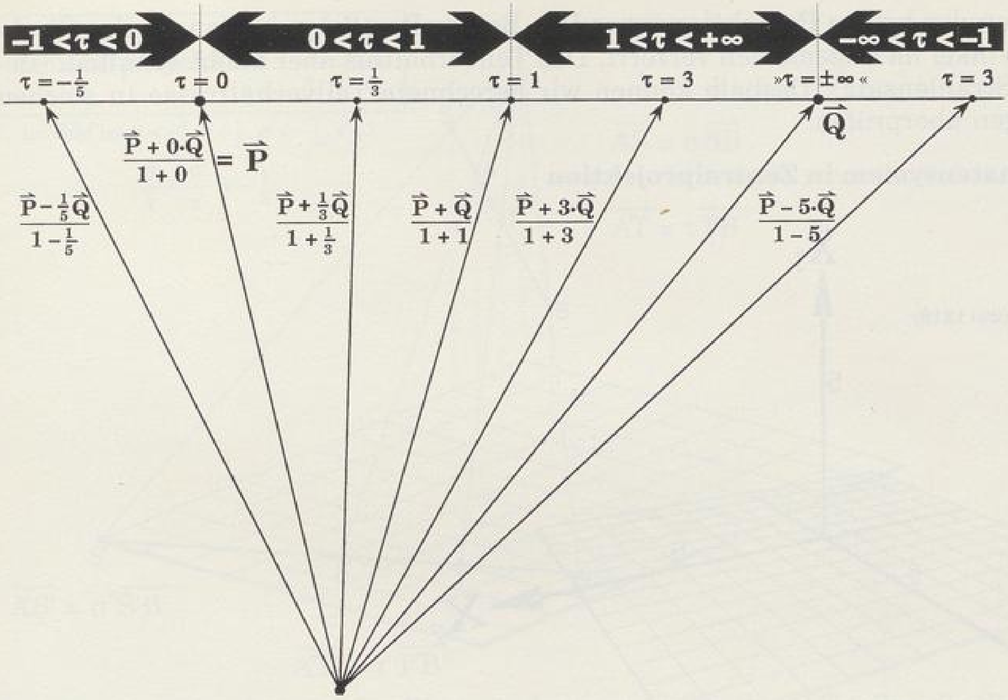
und zu einem Widerspruch geführt. Das heißt, $\overrightarrow{PT}$ und $\overrightarrow{TQ}$ wären nicht kollinear gewesen, P, T und Q also nicht auf einer Gerade gelegen. Es gibt zwar ein Streckenverhältnis ums Eck, aber kein Teilverhältnis ums Eck!

Sind der Anfangspunkt P, der Endpunkt Q und das Teilverhältnis τ gegeben, dann führt eine kurze Rechnung mit Ortsvektoren zum Teilpunkt T:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} &= \tau\,\overrightarrow{TQ} \\ \vec{T} - \vec{P} &= \tau\vec{Q} - \tau\vec{T} \\ (1+\tau)\vec{T} &= \vec{P} + \tau\vec{Q} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{T}} = \frac{\vec{\mathbf{P}} + \tau\vec{\mathbf{Q}}}{1+\tau} \quad \text{mit } \tau \neq -1}$$

Für jedes $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ gibt es einen Teilpunkt. $\tau = -1$ würde bedeuten, daß T auf PQ außerhalb [PQ], aber gleich weit weg von P und Q liegen müßte. Das ist zuviel verlangt!



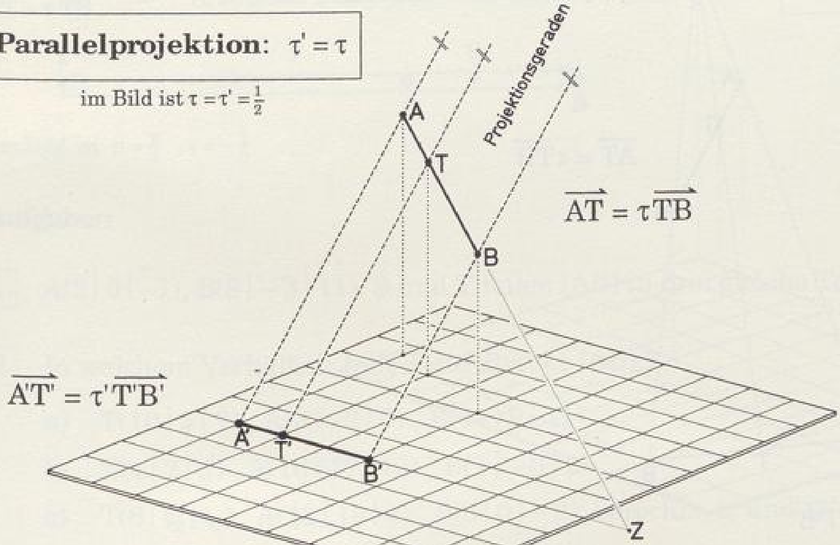
Beispiel: $P(-2\,|\,1\,|\,0)$, $Q(2\,|\,-1\,|\,4)$, $\tau=-\frac{1}{3}$

$$\vec{T}=\frac{\vec{P}+\tau\vec{Q}}{1+\tau}=\frac{\vec{P}-\frac{1}{3}\vec{Q}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3\vec{P}-\vec{Q}}{2}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$T(-4\,|\,2\,|\,-2)$ teilt $[PQ]$ im Verhältnis $-1{:}3$ (äußere Teilung).

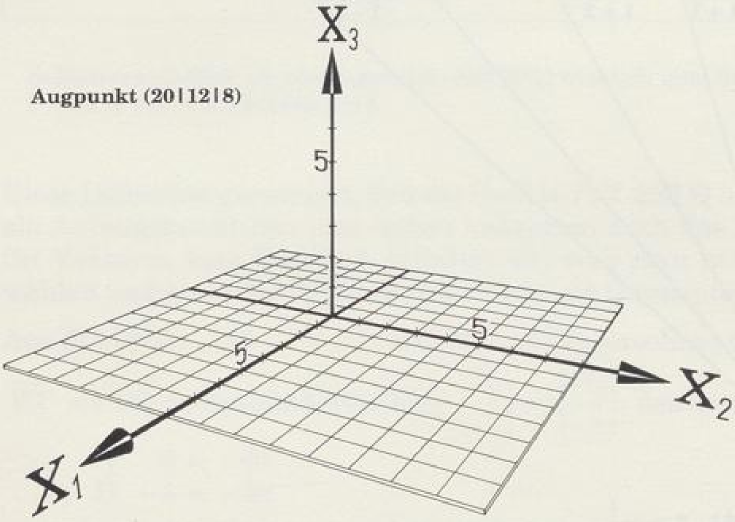
Parallelprojektion: $\tau'=\tau$

im Bild ist $\tau=\tau'=\frac{1}{2}$



Fast alle Zeichnungen in diesem Buch, die räumliche Ansichten zeigen, sind Normalbilder in Parallelprojektion. Eine Abbildung eines Körpers in eine Ebene heißt **Parallelprojektion**, wenn die Geraden, die Urbild- und Bildpunkt verbinden, parallel sind. Die Verbindungsgeraden heißen **Projektionsgeraden**. Bei der Parallelprojektion werden Strecken und Winkel im allgemeinen verzerrt. Das Teilverhältnis aber bleibt erhalten. (Beweis mit Strahlensatz). Deshalb können wir berechnete Teilverhältnisse in solchen Zeichnungen überprüfen.

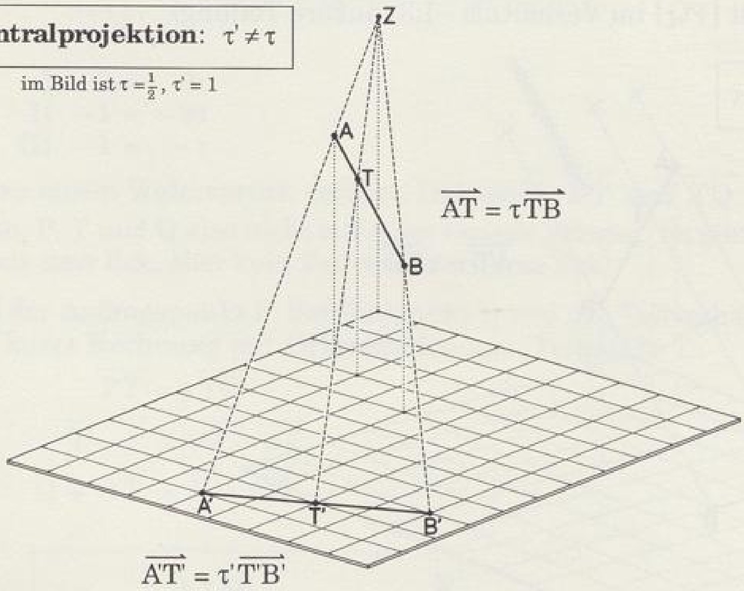
Koordinatensystem in Zentralprojektion



Bilder, die der Wirklichkeit noch näher kommen, liefert die **Zentralprojektion**. Fotografien sind Bilder in Zentralprojektion. Zeichnungen in Zentralprojektion setzen eine anspruchsvollere Konstruktionstechnik voraus. Bei der Zentralprojektion werden nicht nur Strecken und Winkel verzerrt, auch das Teilverhältnis ändert sich im allgemeinen.

Zentralprojektion: $\tau' \neq \tau$

im Bild ist $\tau = \frac{1}{2}$, $\tau' = 1$

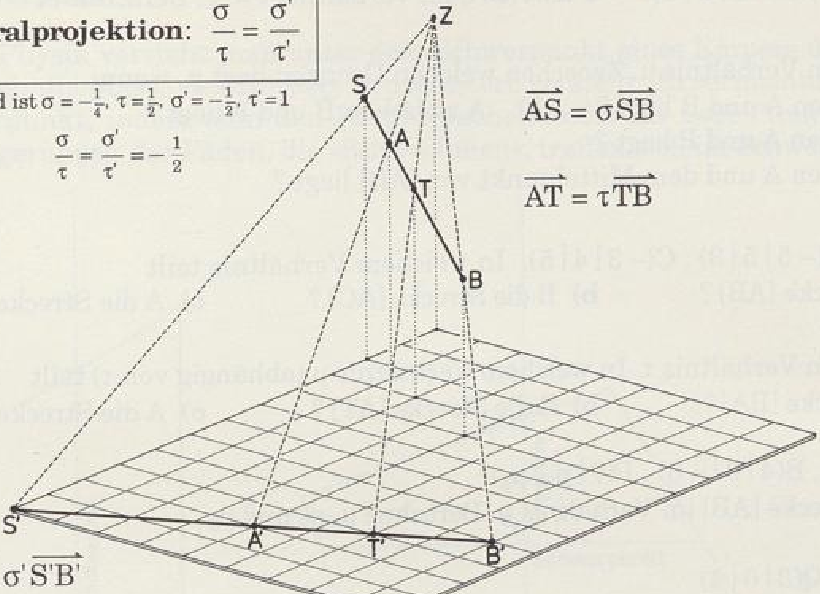


Man kann aber beweisen, daß wenigstens das Verhältnis zweier Teilverhältnisse erhalten bleibt, wenn eine Strecke [AB] von zwei Punkten S und T im Verhältnis σ und τ geteilt wird. Das Verhältnisverhältnis $\frac{\sigma}{\tau}$ heißt auch das **Doppelverhältnis**, in dem die Punkte S und T die Strecke [AB] teilen.

Zentralprojektion: $\dfrac{\sigma}{\tau} = \dfrac{\sigma'}{\tau'}$

im Bild ist $\sigma = -\frac{1}{4}$, $\tau = \frac{1}{2}$, $\sigma' = -\frac{1}{2}$, $\tau' = 1$

$\dfrac{\sigma}{\tau} = \dfrac{\sigma'}{\tau'} = -\dfrac{1}{2}$



$\overrightarrow{AS} = \sigma\overrightarrow{SB}$

$\overrightarrow{AT} = \tau\overrightarrow{TB}$

$\overrightarrow{A'S'} = \sigma'\overrightarrow{S'B'}$

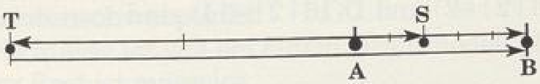
$\overrightarrow{A'T'} = \tau'\overrightarrow{T'B'}$

Hat das Doppelverhältnis den Wert –1, dann sagt man: S und T teilen die Strecke [AB] **harmonisch**. Dann gilt $\frac{\sigma}{\tau} = -1$, also $\tau = -\sigma$, das heißt, der eine Teilpunkt teilt [AB] außen im selben Verhältnis wie der andere innen. In der Mittelstufe haben wir bewiesen, daß auch umgekehrt A und B die Strecke [ST] harmonisch teilen. Deshalb nennt man die vier Punkte A, B, S und T **harmonische Punkte**.

$\overrightarrow{AS} = \sigma\overrightarrow{SB}$
$\overrightarrow{AT} = \tau\overrightarrow{TB}$

Harmonische Teilung $\tau = -\sigma$

A, B, S und T sind harmonische Punkte



im Bild ist $\sigma = \frac{2}{3}$, $\tau = -\frac{2}{3}$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ A(2 | 0 | –1), B(8 | – 3 | 11). S und T teilen [AB] in drei gleiche Teile. Berechne S und T.

$\boxed{2.}$ In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AB] ?

a) T(10 | 5 | 7) , A(3 | –2 | 0) , B(14 | 9 | 11)

b) T(4 | 2 | 3) , A(16 | 17 | 12) , B(1 | – 3 | 2)

c) T(6 | t_2 | t_3) , A(13 | 10 | 4) , B(3 | 0 | – 6); berechne t_2 und t_3

d) T(8 | –12 | –8) , A(–1 | 3 | 4) , B(2 | –2 | 0)

$\boxed{3.}$ A(0 | 5 | 3) , B(2 | – 5 | 8). Berechne die Teilpunkte T_i , die [AB] im Verhältnis τ_i teilen:

$\tau_1 = \frac{1}{2}$; $\tau_2 = 1$; $\tau_3 = -2$; $\tau_4 = -\frac{1}{3}$.

4. $T(3\,|\,-1\,|\,-6)$, $B(-6\,|\,2\,|\,0)$. T teilt [BA] im Verhältnis $\tau = \frac{3}{4}$. Berechne A.

5. P teilt [AB] im Verhältnis μ. Zwischen welchen Grenzen liegt μ, wenn

a) P zwischen A und B liegt ? **b)** A zwischen B und P liegt ?

c) B zwischen A und P liegt ?

d) P zwischen A und dem Mittelpunkt von [AB] liegt ?

6. $A(1\,|\,2\,|\,9)$, $B(-5\,|\,5\,|\,3)$, $C(-3\,|\,4\,|\,5)$. In welchem Verhältnis teilt

a) C die Strecke [AB] ? **b)** B die Strecke [AC] ? **c)** A die Strecke [BC] ?

• **7.** T teilt [AB] im Verhältnis τ. In welchem Verhältnis μ (abhängig von τ) teilt

a) T die Strecke [BA] ? **b)** B die Strecke [AT] ? **c)** A die Strecke [BT] ?

8. $A(13\,|\,9\,|\,-3)$, $B(4\,|\,0\,|\,-6)$, $P(7\,|\,p_2\,|\,p_3)$

P teilt die Strecke [AB] im Verhältnis μ. Berechne μ, p_2 und p_3.

9. $P(0\,|\,1{,}5\,|\,4)$, $Q(3\,|\,0\,|\,4)$

Berechne die Punkte S und T, die [PQ] harmonisch im Verhältnis $|\sigma| = 2$ teilen.

10. $A(2\,|\,10\,|\,5)$, $B(23\,|\,-4\,|\,33)$, $S(11\,|\,4\,|\,17)$

a) S und T teilen [AB] harmonisch. Berechne T .

b) A und B teilen [ST] im Verhältnis α und β. Berechne α und β.

11. $A(-4\,|\,12\,|\,-9)$, $B(14\,|\,3\,|\,6)$. $C(c_1\,|\,6\,|\,c_3)$ liegt auf der Gerade AB.

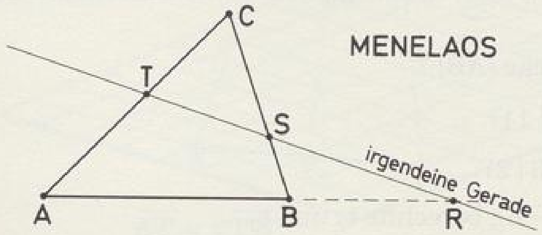
Bestimme das Teilverhältnis γ, in dem C die Strecke [AB] teilt.

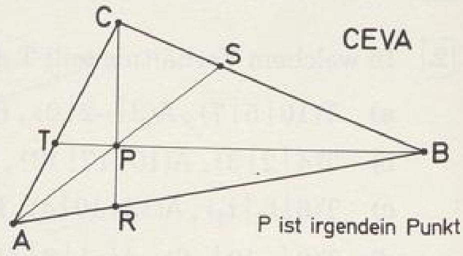
Berechne den vierten harmonischen Punkt D von A, B und C.

12. Zeige: $A(1\,|\,2\,|\,1)$, $B(6\,|\,2\,|\,-4)$, $C(4\,|\,2\,|\,-2)$ und $D(16\,|\,2\,|\,-14)$ sind harmonische Punkte.

• **13. Satz von MENELAOS**

Teilt R die Strecke [AB] im Verhältnis ρ und S die Strecke [BC] im Verhältnis σ und T die Strecke [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\boxed{\rho\cdot\sigma\cdot\tau = -1}$.Überprüfe den Satz am Beispiel $A(0\,|\,0)$, $B(12\,|\,0)$, $C(9\,|\,9)$, $R(20\,|\,0)$, $S(11\,|\,3)$, $T(5\,|\,5)$.



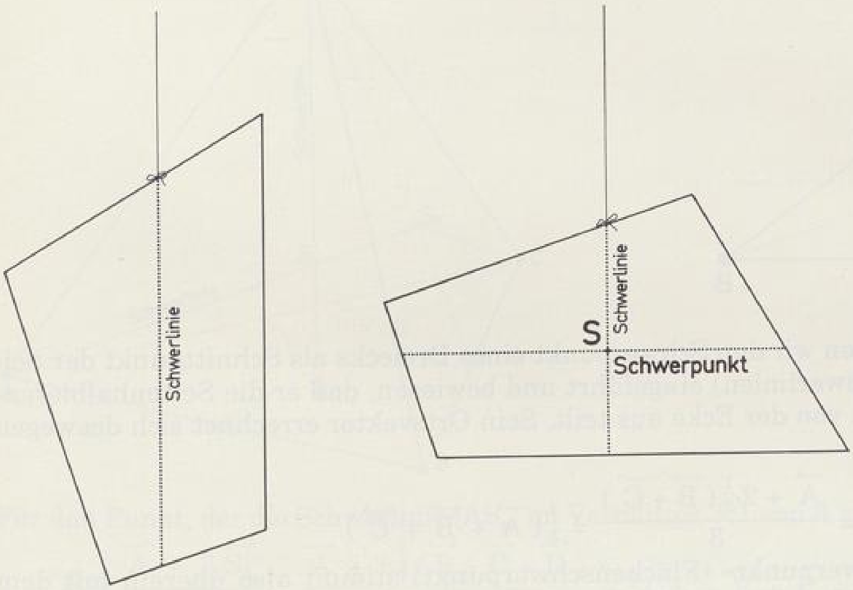


• **14. Satz von CEVA**

Teilt R die Strecke [AB] im Verhältnis ρ und S die Strecke [BC] im Verhältnis σ und T die Strecke [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\boxed{\rho\cdot\sigma\cdot\tau = 1}$.Überprüfe den Satz am Beispiel $A(0\,|\,0)$, $B(20\,|\,4)$, $C(5\,|\,10)$, $R(5\,|\,1)$, $S(10\,|\,8)$, $T(2\,|\,4)$.

3. Schwerpunkt

In der Physik versteht man unter dem Schwerpunkt eines Körpers den Punkt, in dem man sich die Masse des Körpers konzentriert vorstellt. Experimentell findet man den Schwerpunkt, indem man den Körper nacheinander an zwei Punkten aufhängt; die Verlängerungen der Fäden, die »Schwerlinien«, treffen sich im Schwerpunkt S.



Bei mathematischen Körpern (Polyedern) unterscheiden wir

- **Eckenschwerpunkt**
  In jeder Ecke ist gleichviel Masse konzentriert, der Rest ist masselos.
- **Kantenschwerpunkt**
  Die Masse ist wie bei einem Drahtmodell gleichmäßig auf die Kanten verteilt, der Rest ist masselos.
- **Flächenschwerpunkt**
  Die Masse ist wie bei einem Modell aus Pappe gleichmäßig auf die Flächen verteilt, der Rest ist masselos.
- **Raumschwerpunkt**
  Die Masse ist gleichmäßig aufs Volumen verteilt.

Wir kümmern uns nur um den Eckenschwerpunkt, wir bezeichnen ihn kurz mit Schwerpunkt. Er ist am leichtesten zu berechnen. Sein Ortsvektor ist das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der n Ecken $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

$$\boxed{\vec{S} = \tfrac{1}{n}(\vec{E_1} + \vec{E_2} + \ldots + \vec{E_n})}$$

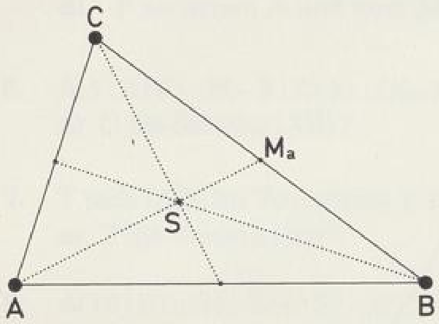
Man kann zeigen: Der so definierte Eckenschwerpunkt fällt

- bei einer Strecke mit dem Kantenschwerpunkt zusammen
- bei einem Dreieck mit dem Flächenschwerpunkt zusammen
- bei einem Tetraeder mit dem Raumschwerpunkt zusammen.

Bei der Strecke [AB] gilt $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})}$

S ist der Mittelpunkt, er teilt [AB] im Verhältnis $\tau = 1$.

Beim Dreieck ABC gilt $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})}$



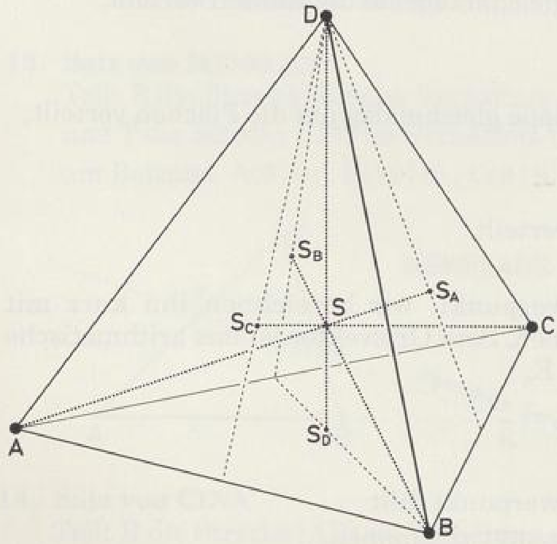
In der Mittelstufe haben wir den Schwerpunkt eines Dreiecks als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (=Schwerlinien) eingeführt und bewiesen, daß er die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 :1 von der Ecke aus teilt. Sein Ortsvektor errechnet sich deswegen so:

$$\vec{S} = \frac{\vec{A} + 2\,\vec{M_a}}{1+2} = \frac{\vec{A} + 2\cdot\frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{C})}{3} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

Der »Mittelstufenschwerpunkt« (Flächenschwerpunkt) stimmt also überein mit dem »Oberstufenschwerpunkt« (Eckenschwerpunkt).

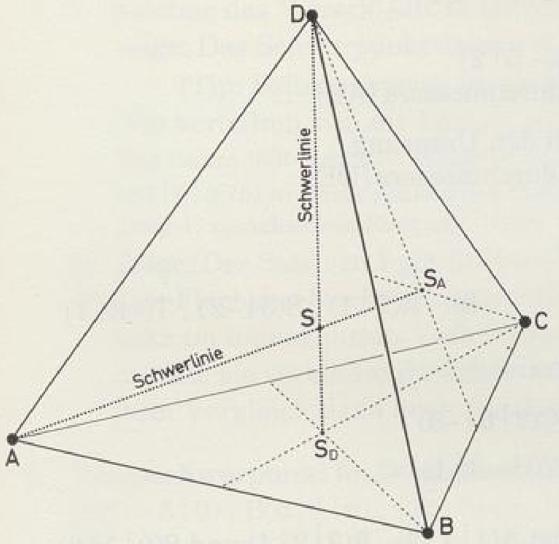
Beim Tetraeder ABCD gilt $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})}$

Verallgemeinert man den Begriff Schwerlinie aufs Tetraeder, so bekommt man die Verbindungsstrecke von Ecke und Schwerpunkt der Gegenfläche.



Eine Strecke wird vom Schwerpunkt im Verhältnis 1:1 geteilt (man kann sie als ihre eigene Schwerlinie auffassen).

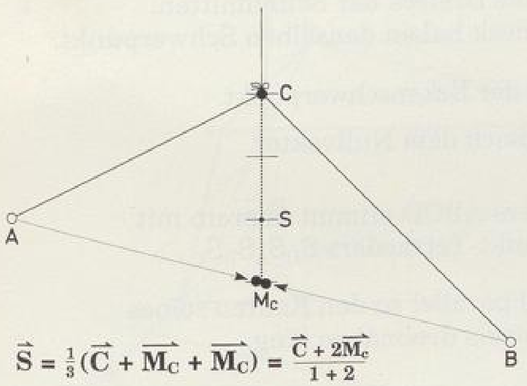
Eine Schwerlinie im Dreieck wird vom Schwerpunkt im Verhältnis 2 :1 von der Ecke aus geteilt.
Der Schwerpunkt im Tetraeder folgt dieser Tendenz konsequent: er teilt eine Schwerlinie im Verhältnis 3 :1 von der Ecke aus, wie die Rechnung zeigt:



Für den Punkt, der die Schwerlinie [AS_a] im Verhältnis 3 :1 von A aus teilt, gilt

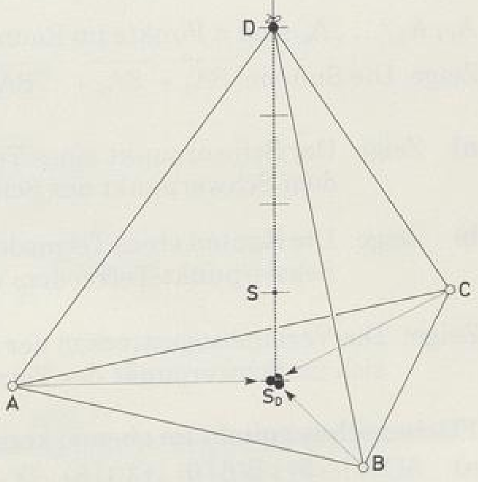
$$\vec{S} = \frac{\vec{A} + 3\,\vec{S_A}}{1+3} = \frac{\vec{A} + 3\cdot\frac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D})}{4} = \tfrac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}).$$

Das ist genau die Bedingung für den Eckenschwerpunkt. Weil in der Formel die vier Ecken gleichberechtigt auftreten, ist damit auch gezeigt, daß S auf jeder Schwerlinie liegt, daß diese sich also in S schneiden.
Man kann sich die Teilverhältnisse 2 :1 und 3 :1 auch in den beiden Bildern klarmachen:



$\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{C} + \vec{M_C} + \vec{M_C}) = \frac{\vec{C} + 2\vec{M_c}}{1+2}$

$\tau = 2$



$\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{D} + \vec{S_D} + \vec{S_D} + \vec{S_D}) = \frac{\vec{D} + 3\vec{S_D}}{1+3}$

$\tau = 3$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Berechne den Mittelpunkt der Strecken

a) $A(1|7|2)$, $B(3|5|0)$ b) $R(2|1)$, $S(1|-5)$

2. a) Ein Kreis um $M(-2|5)$ geht durch $A(-5|2)$.
Berechne den Endpunkt E des Kreisdurchmessers [AE].

b) Eine Kugel um $M(1|2|3)$ geht durch den Ursprung.
Berechne den Endpunkt E des Kugeldurchmessers [OE].

$\boxed{3.}$ Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks

a) $A(2|1|3)$, $B(3|5|0)$, $C(4|-4|9)$ b) $R(2|1)$, $S(3|-2)$, $T(-2|4)$

4. Berechne den Schwerpunkt des Tetraeders

a) $O(0|0|0)$, $A(2|1|1)$, $B(-12|1|3)$, $C(2|6|-8)$

b) $R(2|1|1)$, $S(-9|3|2)$, $T(1|0|8)$, $U(0|-4|1)$

$\boxed{5.}$ a) Im Dreieck ABC mit Schwerpunkt S ist $A(1|1|2)$, $B(3|2|4)$ und $S(0|1|3)$.
Berechne C.

b) Im Tetrader ABCD mit Schwerpunkt S ist $A(2|1|1)$, $B(3|0|1)$, $C(2|-1|0)$ und $S(2|2|1)$. Berechne D.

• 6. Die Schwerpunkte der Dreiecke, die ein Tetraeder begrenzen, sind:
$S_D(3|3|0)$, $S_A(3|3|6)$, $S_B(-1|3|6)$ und $S_C(4|0|6)$.
Berechne die Ecken A, B, C und D.

7. Das Mittendreieck eines Dreiecks ABC ist das Dreieck der Seitenmitten.
Zeige: Ein Dreieck ABC und sein Mittendreieck haben denselben Schwerpunkt.

8. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind n Punkte im Raum, S ist der Eckenschwerpunkt.
Zeige: Die Summe $\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \ldots \overrightarrow{SA_n}$ ist gleich dem Nullvektor.

• 9. a) Zeige: Der Schwerpunkt eines Tetraeders ABCD stimmt überein mit dem Schwerpunkt des Schwerpunkt-Tetraeders $S_DS_AS_BS_C$.

b) Zeige: Die Kanten eines Tetraeders sind parallel zu den Kanten seines Schwerpunkt-Tetraeders und jeweils dreimal so lang.

• 10. Zeige: Die Verbindungsstrecken der Mitten von je zwei Gegenkanten treffen sich im Schwerpunkt des Tetraeders.

• 11. **Flächenschwerpunkt im ebenen konvexen Viereck**

a) $A(1{,}5|-3)$, $B(6|0)$, $C(3|6)$, $D(-4{,}5|0)$

b) $A(-1|-2{,}5)$, $B(6{,}5|-1)$, $C(-1|3{,}5)$, $D(-5{,}5|-1)$

c) $A(3|-4{,}5)$, $B(9|-6)$, $C(12|4{,}5)$, $D(0|7{,}5)$

Die Diagonale AC zerlegt das Viereck in die Teildreiecke ABC mit Schwerpunkt S_1 und ACD mit Schwerpunkt S_2 .
Die Diagonale BD zerlegt das Viereck in die Teildreiecke BCD mit Schwerpunkt T_1 und ABD mit Schwerpunkt T_2 .

I Zeichne das Viereck ABCD, berechne die Schwerpunkte S_1 , T_1 , S_2 und T_2 und zeige: Das Schwerpunktviereck $S_1T_1S_2T_2$ ist dem Viereck ABCD ähnlich.
(Tip: Seitenvektoren vergleichen!)
Wie verhalten sich die Längen entsprechender Seiten ?
Das Ganze läßt sich auch räumlich deuten: Zeichne A(3 | 3 | 0) , B(3 | 6 | 0) , C(– 6 | 3 | 0) und D(0 | 0 | 3,75) in unser räumliches Standard-KOSY in Normalprojektion: x_1-Achse mit Steigung 1, x_2-Achse mit Steigung – 0,25. Welcher Zusammenhang besteht mit Aufgabe **9.b** ?

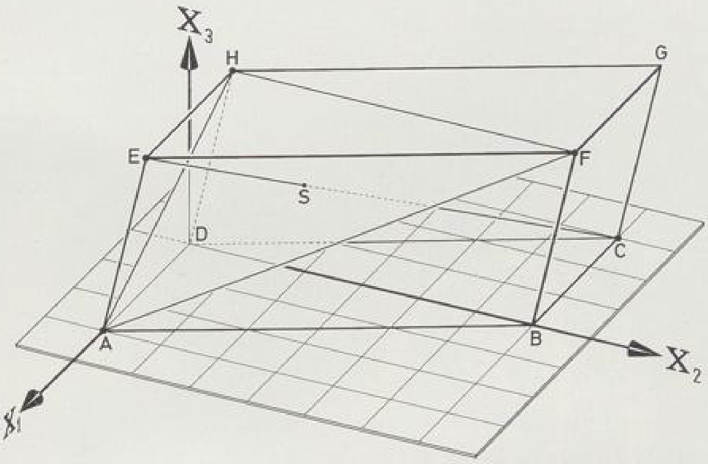
II Zeige: Der Satz von **I** gilt für jedes konvexe Viereck.

III Der Flächenschwerpunkt von ABCD teilt eine Diagonale des Schwerpunktvierecks im umgekehrten Verhältnis der Inhalte der Teildreiecke, deren Schwerpunkte sie verbindet (Hebelgesetz!). Berechne den Flächenschwerpunkt S und zum Vergleich dazu auch den Eckenschwerpunkt U.

∴ **12. Raumschwerpunkt im Doppeltetraeder**
A(0 | – 3 | 0) , B(0 | 4 | 0) , C(0 | 0 | 4) , D(4 | –1 | 0) , E(– 8 | – 1 | 0)

Zeichne das Doppeltetraeder, die Teiltetraeder sind ABCD und ABCE.
Berechne den Schwerpunkt S von ABCD und T von ABCE.
Der Raumschwerpunkt R von ABCDE teilt die Strecke [ST] im umgekehrten Verhältnis der Inhalte der entsprechenden Teiltetraeder.
Berechne R und zum Vergleich dazu auch den Eckenschwerpunkt U.

13. A(3 | 0 | 0) , B(0 | 6 | 0) , C(– 3 | 6 | 0) und G(– 4,5 | 6 | 2,25) sind Ecken eines Spats, ABCD ist eine Seitenfläche.



a) Bestimme die restlichen Ecken D, E, F und H.
Zeichne das Spat, das Dreieck AFH mit Schwerpunkt S und die Raumdiagonale [CE]. (Ursprung 3,5 cm vom linken Rand entfernt)

b) Zeige: CE schneidet das Dreieck AFH im Schwerpunkt S des Dreiecks.
(Tip: entweder mit Ansatz $\overrightarrow{CS} = \sigma\,\overrightarrow{SE}$ oder $\overrightarrow{ES} = \lambda\,\overrightarrow{EC}$)