Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

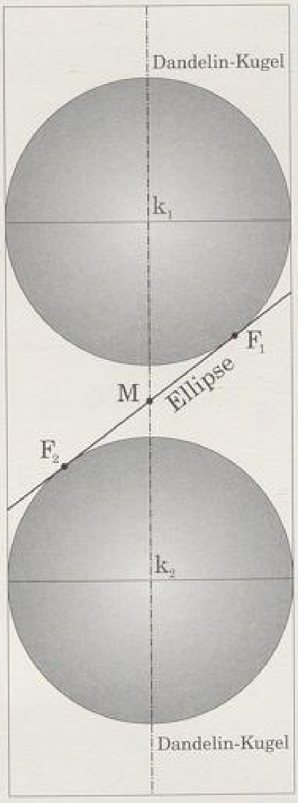
München, 1997

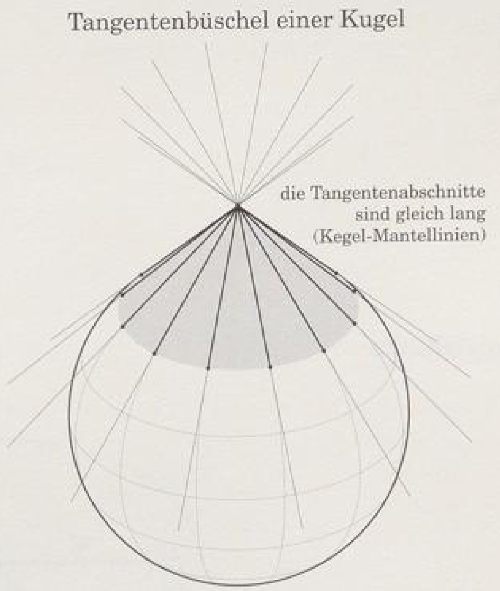
3. Die Brennpunkte der Ellipsee Dabdelin-Kugeln - Astronomie - Gärtner - Konstruktion - Brennpunkt und Tangente

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

3. Die Brennpunkte der Ellipse

Der belgische Mathematiker und Baumeister Pierre Germinal DANDELIN (1794 bis 1847) hatte bei der Untersuchung von Kegelschnitten eine schöne Idee aus der Raumgeometrie, die uns eine sehr wichtige Eigenschaft der Ellipse vor Augen führt. Dazu betrachten wir die Ellipse wieder als Schnitt einer Ebene E und eines Zylinders. Auf beiden Seiten der Ebene schiebt man eine genau passende Kugel (Kugelradius = Zylinderradius) in den Zylinder, bis sie die Ebene berührt. Die beiden Kugeln berühren außerdem den Zylinder in den Kreisen k_1 und k_2. Aus Symmetriegründen liegen die beiden Berührpunkte F_1 und F_2 auf der Hauptachse gleich weit vom Mittelpunkt M der Ellipse weg. F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte** der Ellipse. Zu Ehren von DANDELIN nennt man die beiden Kugeln **Dandelin-Kugeln.**





P sei ein beliebiger Punkt der Schnittellipse. Weil die Schnittebene auch Tangentialebene der beiden Dandelin-Kugeln ist, sind PF_1 und PF_2 Tangenten dieser Kugeln. Die Mantellinie durch P schneidet die beiden Berührkreise k_1 und k_2 in Q_1 und Q_2. PQ_1 und PQ_2 sind also auch Tangenten der Dandelin-Kugeln. Alle Kugel-Tangentenabschnitte durch einen Punkt sind gleich lang. Deshalb gilt:

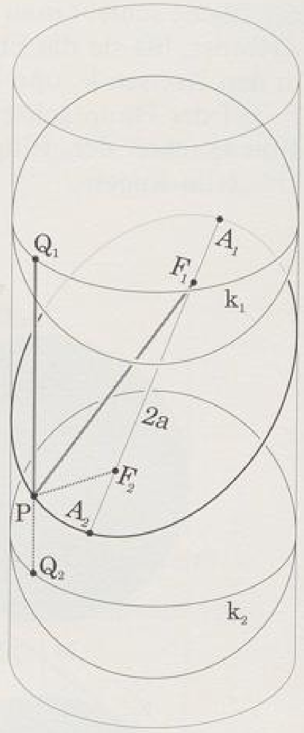
$$\overline{PQ_1} = \overline{PF_1} \quad \text{und} \quad \overline{PQ_2} = \overline{PF_2} \quad \text{also} \quad \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} = \overline{Q_1Q_2} = \text{const.}$$

Für jeden Ellipsenpunkt ist die Summe seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten die Konstante $\overline{Q_1Q_2}$, der Abstand der beiden Berührkreise. Der Wert dieser Konstante ergibt sich, wenn wir P in einen Hauptscheitel, zum Beispiel A_2, legen, wenn also $P = A_2$ ist:

$$\overline{Q_1Q_2} = \overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} = \overline{A_2F_1} + \overline{F_1A_1} = 2a$$

Zusammenfassung
Für jeden Ellipsenpunkt P gilt

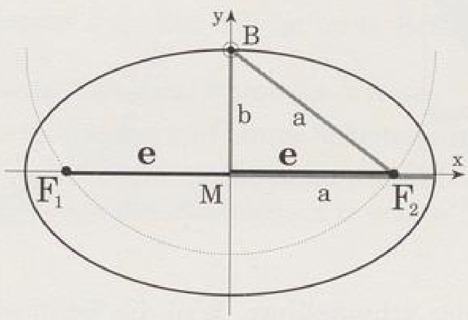
$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a}$$



Die beiden Brennstrecken $[PF_1]$ und $[PF_2]$ sind zusammen so lang wie die Hauptachse 2a.

Legt man P in einen Nebenscheitel B, dann gilt aus Symmetriegründen $\overline{F_1B} = \overline{F_2B} = a$. Mit dieser Beziehung lassen sich die Brennpunkte einfach konstruieren.

***Exzentrizitäten**



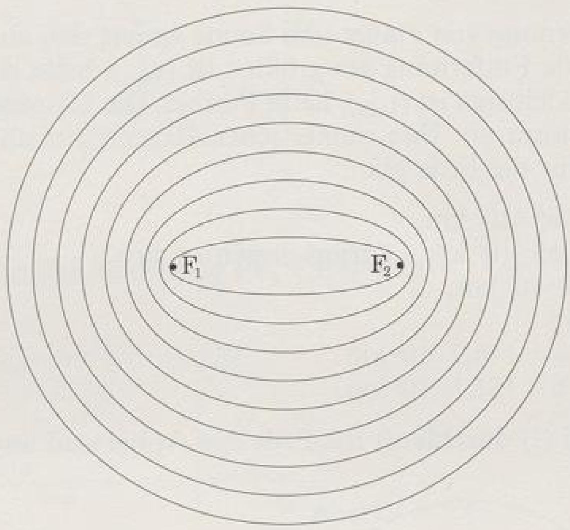
Die Entfernung **e** der Brennpunkte vom Mittelpunkt heißt **lineare Exzentrizität**. Die Zeichnung (Pythagoras!) zeigt:

$$\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$$

Für einen Kreis gilt $a = b$, also $e = 0$. e ist aber noch kein Maß dafür, wie die Ellipse vom Kreis abweicht. Denn bei einer Ähnlichkeitsabbildung, zum Beispiel zentrische Streckung, ändert sich zwar e, nicht aber die Form. Umgekehrt gibt es zu ein und demselben Wert für e verschieden geformte Ellipsen. Bezieht man jedoch e auf die große Halbachse, dann entsteht eine Zahl, in der die Gestalt der Ellipse zum Ausdruck kommt, sie heißt **numerische Exzentrizität** ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$$

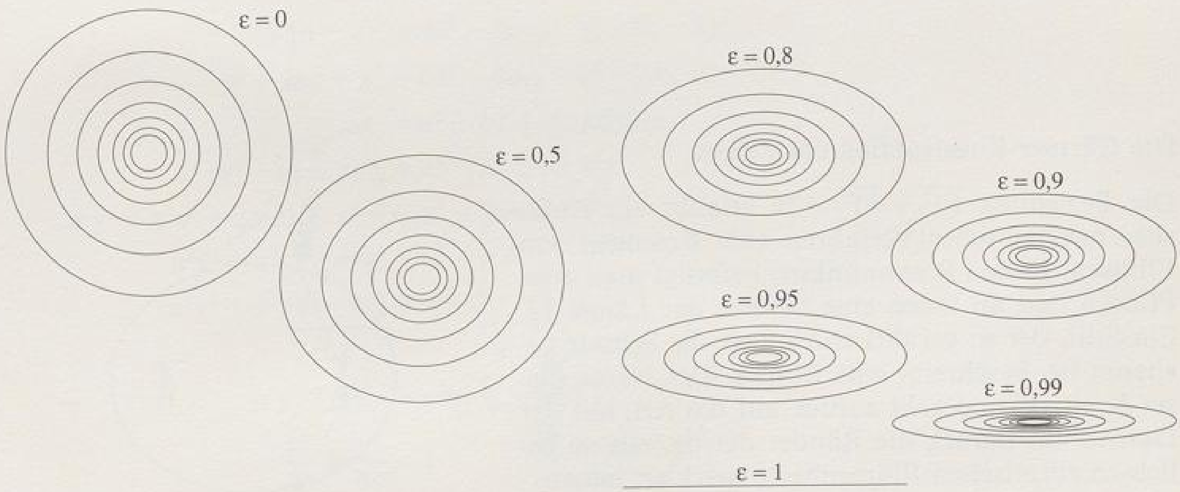
Konfokale Ellipsen mit $\overline{F_1F_2} = 2e = \text{const.}$



Wegen $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$ ist $0 \leq \varepsilon \leq 1$

Für die Grenzfälle gilt
$\varepsilon = 0$, das heißt $a = b$: Kreis
$\varepsilon = 1$, das heißt $b = 0$: Strecke

Konfokale Ellipsen mit $\overline{F_1F_2} = 2e = \text{const.}$



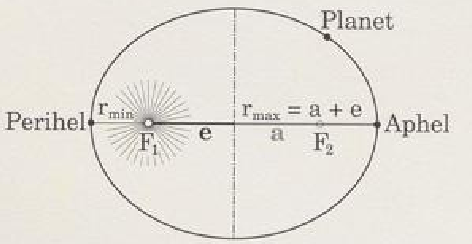
Die Ellipse in der Astronomie

Bis ins 16. Jahrhundert glaubte man, dass sich alle Gestirne auf Kreisbahnen oder auf Überlagerungen von Kreisbahnen bewegen. Als Johannes KEPLER (Weil der Stadt 1571 bis 1630 Regensburg) auf der Grundlage der Beobachtungen von Tycho BRAHE die Planetenbewegung mathematisch beschreiben wollte, musste er dieses Ideal der Kreisbahn aufgeben. Er stellte fest, dass die Planeten auf Ellipsenbahnen laufen, bei denen die Sonne in einem Brennpunkt steht.

Die Entfernung von Planet und Sonne ändert sich also während des Umlaufs. Der Punkt, bei dem die Entfernung am größten ist (r_{max}), heißt **Aphel**; der Punkt, bei dem die Entfernung am kleinsten ist (r_{min}), heißt **Perihel**. Die Ellipsenbahnen weichen nur sehr wenig von der Kreisform ab. Ihre numerischen Exzentrizitäten reichen von 0,007 (Venus) bis 0,25 (Pluto). Für die Erde gilt

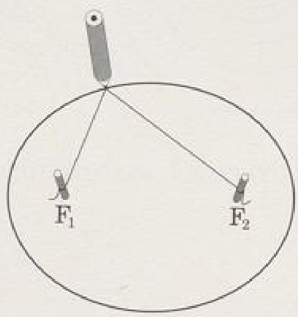
$a = 148{,}65 \cdot 10^6\,\text{km}$,
$b = 148{,}63 \cdot 10^6\,\text{km}$, daraus errechnet sich
$e = 2{,}44 \cdot 10^6\,\text{km}$,
$\varepsilon = 0{,}016$
$r_{min} = a - e = 146{,}2 \cdot 10^6\,\text{km}$
$r_{max} = a + e = 151{,}1 \cdot 10^6\,\text{km}$.

Am 3. Juli (!) durchläuft die Erde das Aphel und am 2. Januar das Periphel.

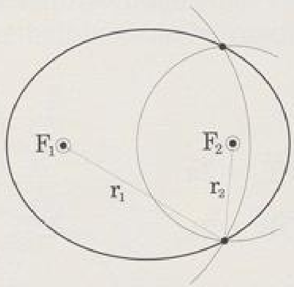


Die Gärtner-Konstruktion der Ellipse

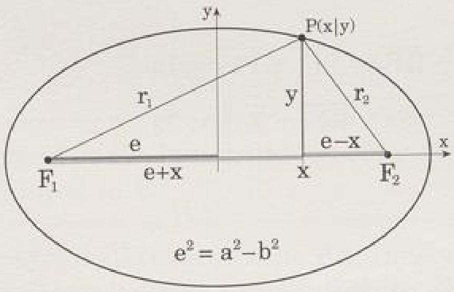
Die Beziehung $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ erlaubt ein einfaches mechanisches Verfahren zum Erzeugen von Ellipsen. In den Brennpunkten befestigt man zwei Pflöcke und an ihnen eine Schnur der Länge 2a. Ein Stift, der so geführt wird, dass die Schnur gespannt ist, beschreibt eine Ellipse. Der Name dieser Konstruktion geht zurück auf die Art, mit der Gärtner im Barock die Ränder der damals so beliebten elliptischen Blumenbeete markiert haben.



Die Ellipseneigenschaft, die der Gärtner-Konstruktion zugrunde liegt, führt auch zu einer Konstruktion einzelner Ellipsenpunkte: Man zeichnet um die Brennpunkte Kreise, deren Radien zusammen 2a ergeben; die Schnittpunkte sind Ellipsenpunkte.



Herleitung der Ellipsen-Gleichung aus der Beziehung $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

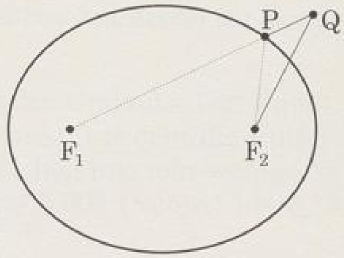


$r_1^2 = y^2 + (e + x)^2$ $\qquad\qquad$ $r_2^2 = y^2 + (e - x)^2$

$$r_1 + r_2 = 2a$$
$$r_1 = 2a - r_2 \quad \| \text{ quadrieren}$$
$$r_1^2 = 4a^2 - 4ar_2 + r_2^2$$
$$\cancel{y^2}(e + x)^2 = 4a^2 - 4ar_2 + \cancel{y^2} + (e - x)^2$$
$$\cancel{e^2} + 2ex + \cancel{x^2} = 4a^2 - 4ar_2 + \cancel{e^2} - 2ex + \cancel{x^2}$$
$$ar_2 = a^2 - ex \quad \| \text{ quadrieren}$$
$$a^2\,[y^2 + (e - x)^2\,] = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$
$$a^2y^2 + a^2e^2 - \cancel{2a^2ex} + a^2x^2 = a^4 - \cancel{2a^2ex} + e^2x^2$$
$$a^2y^2 + a^2x^2 - e^2x^2 = a^4 - a^2e^2$$
$$a^2y^2 + x^2\,\underbrace{(a^2 - e^2)}_{b^2} = a^2\,\underbrace{(a^2 - e^2)}_{b^2}$$
$$a^2y^2 + x^2b^2 = a^2b^2 \quad \| \;:(a^2b^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

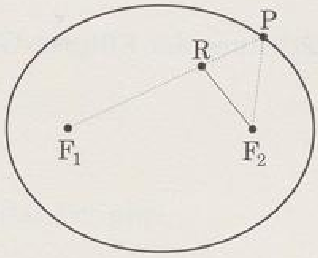
Ein Punkt P liegt also genau dann auf der Ellipse, wenn die Summe der beiden Brennstrecken r_1 und r_2 gleich der Hauptachse 2a ist. Für einen Punkt Q, der außerhalb der Ellipse liegt, ist die Summe der Brennstrecken größer als 2a; für einen Punkt R, der innerhalb liegt, ist sie kleiner als 2a. Zur Begründung verwenden wir die Dreieck-Ungleichung.

Im Dreieck QPF_2 gilt: $\overline{PQ} + \overline{QF_2} > \overline{PF_2}$



$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{PF_1} + \overline{QP} + \overline{QF_2} > \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$
$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a$$

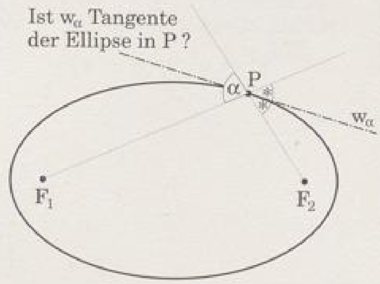
Im Dreieck RPF_2 gilt: $\overline{RP} + \overline{PF_2} > \overline{RF_2}$



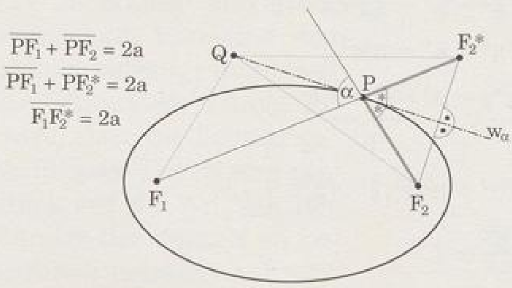
$$\overline{RF_1} + \overline{RF_2} < \overline{RF_1} + \overline{RP} + \overline{RF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$
$$\overline{RF_1} + \overline{RF_2} < 2a$$

***Brennpunkt und Tangente**

oder: Wie der Brennpunkt zu seinem Namen kommt.



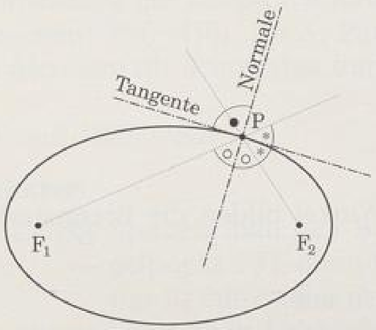
Das Bild zeigt einen Ellipsenpunkt P und eine Winkelhalbierende w_α der Brennstrahlen $[F_1P$ und $[F_2P$. Dem Augenschein nach ist w_α Tangente der Ellipse in P. Aber nicht nur dem Augenschein nach! Mit einem kleinen Trick lässt sich das beweisen: Man spiegelt einen der beiden Brennpunkte an w_α (Spiegelpunkt F_2^*). Wegen Achsensymmetrie ist $\overline{PF_2} = \overline{PF_2^*}$.

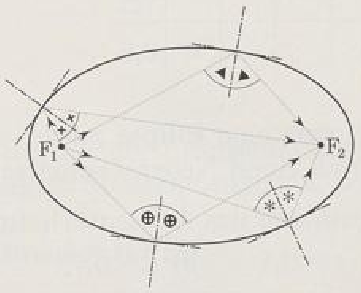


Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt dann (Dreieck-Ungleichung!):

$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QF_2^*} > \overline{F_1F_2^*} = 2a$$

Also gilt $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a \Rightarrow$ Q liegt außerhalb der Ellipse $\Rightarrow$ w_α ist Tangente im Punkt P. Weil die beiden Winkelhalbierenden einer Geradenkreuzung aufeinander senkrecht stehen, ist die andere Winkelhalbierende Normale der Ellipse im Punkt P.





Damit haben wir den **Satz**:

> Die beiden Winkelhalbierenden der Brennstrahlen eines Ellipsenpunkts P sind Tangente und Normale der Ellipse in P.

Wir haben so eine einfache Möglichkeit gefunden, die Tangenten in einem beliebigen Ellipsenpunkt zu konstruieren: Man halbiert den Winkel der Brennstrahlen, durch den die Ellipse geht.
Nach dem Reflexionsgesetz der Physik sind Einfalls- und Ausfallswinkel gleich groß. Alle von einem Brennpunkt ausgehenden (Licht-)Strahlen werden an der Ellipse so reflektiert, dass sie sich im andern Brennpunkt treffen. Weil die Wege aller Strahlen gleich lang (= 2a) sind, treffen sich die reflektierten Strahlen auch alle zum selben Zeitpunkt. (Anwendung dieses Effekts im Kapitel 9. II, 5)