Anschauliche analytische Geometrie

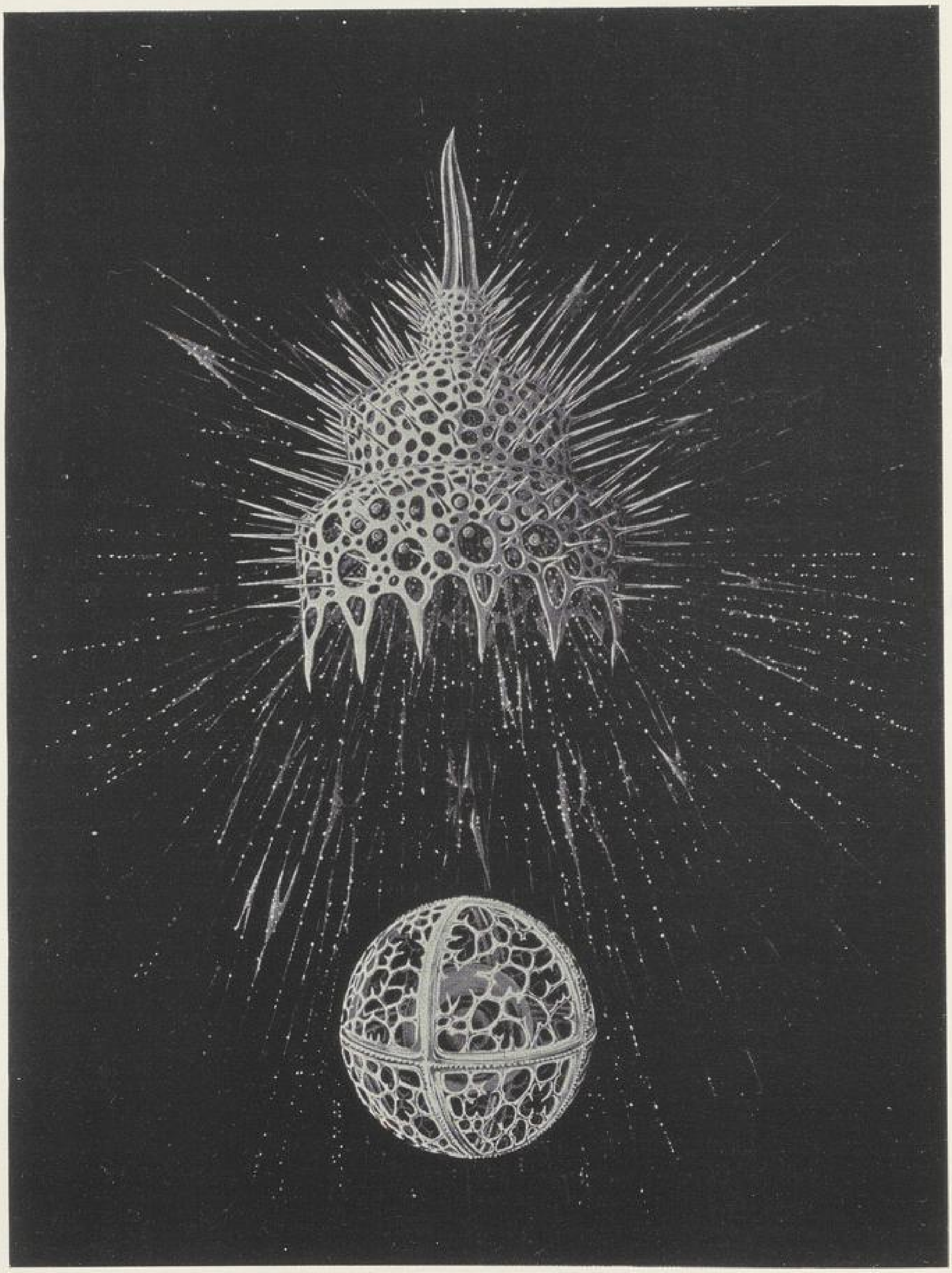
Barth, Elisabeth

München, 2000

V. Lineare Abhängigkeit

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

V. Lineare Abhängigkeit



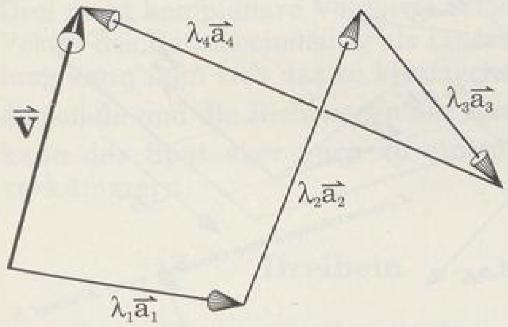
1. Definitionen

Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben, so lassen sich damit beliebig viele Vektoren $\vec{v}$ der Form

$$\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \text{erzeugen.}$$

Man nennt jeden solchen Vektor $\vec{v}$ Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das führt zur

> **Definition**
> $\vec{v}$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$,
> wenn gilt $\vec{v} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \dots + \lambda_n\vec{a_n}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$

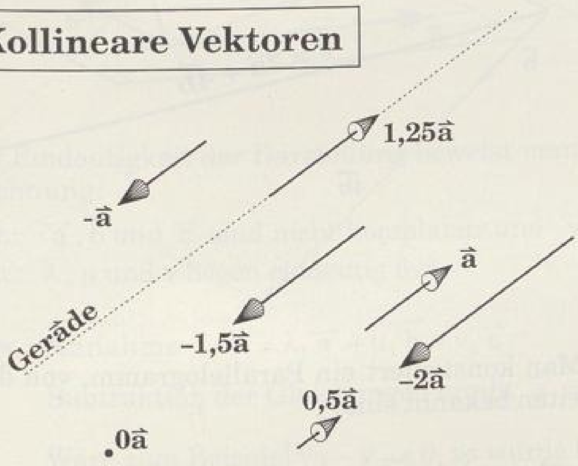


$\vec{v}$ ist Linearkombination von $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ und $\vec{a_4}$

Eine Linearkombination von Vektoren ist also eine Summe von Vielfachen dieser Vektoren.

Ein Vektor
Hat man nur einen einzigen Vektor $\vec{a} \neq \vec{o}$, dann sind seine Linearkombinationen alle seine Vielfachen, das heißt, alle zu ihm kollinearen Vektoren.

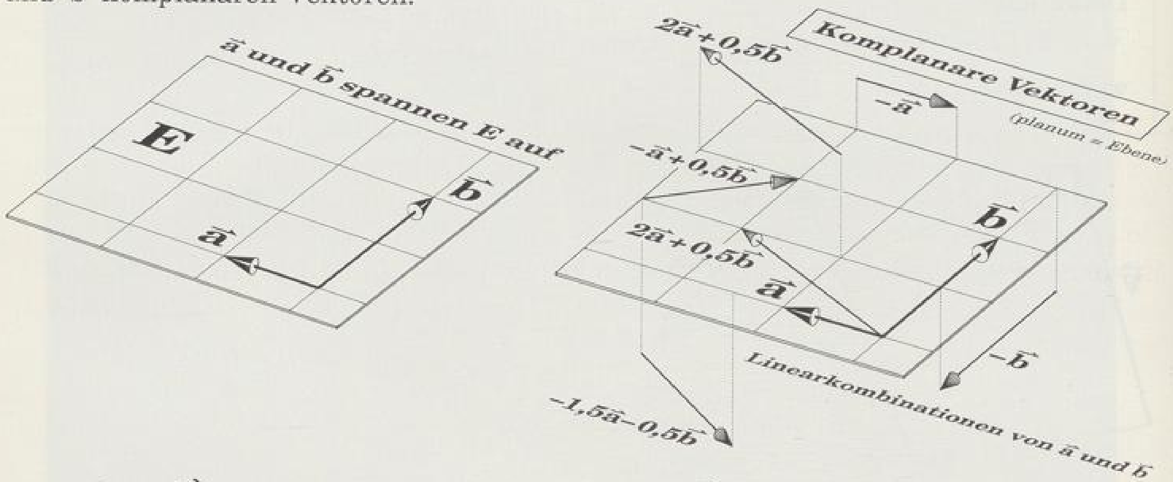
Kollineare Vektoren



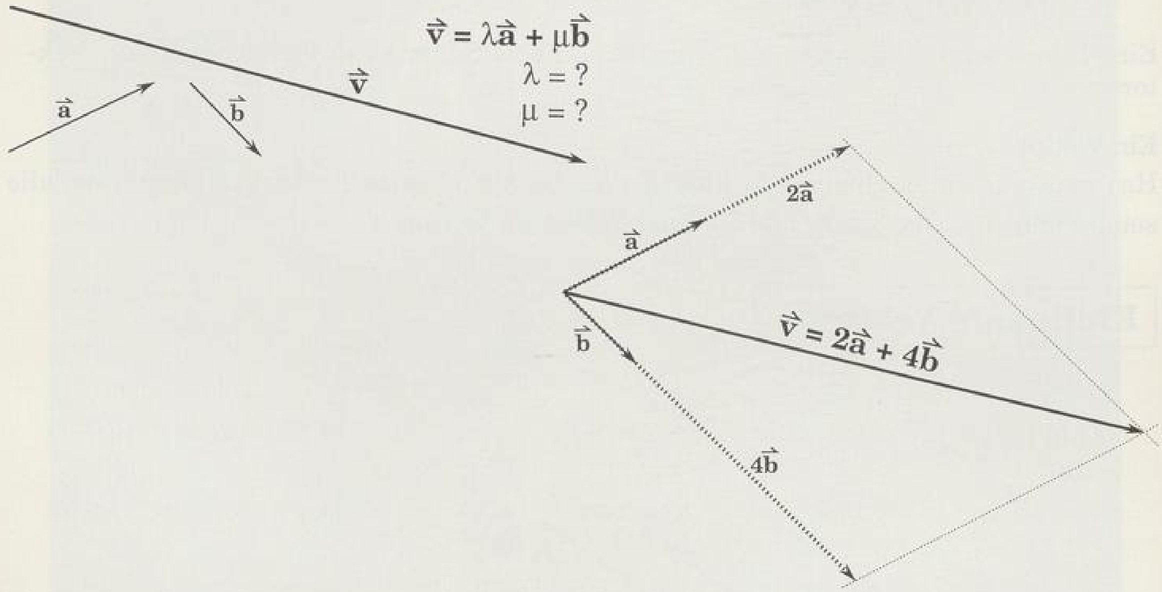
Linearkombinationen von $\vec{a}$

Zwei Vektoren

Zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ legen im Raum (bis auf Parallelverschiebung) eine Ebene fest. Jede Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist parallel zu dieser Ebene. Vektoren, die alle parallel zu einer Ebene sind, heißen **komplanar** (planum(lat.) = Ebene).
Also ist die Menge der Linearkombinationen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich der Menge der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ komplanaren Vektoren.



Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear, so ist jeder zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ komplanare Vektor $\vec{v}$ **eindeutig** als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellbar.



Geometrisch ist das leicht einzusehen: Man konstruiert ein Parallelogramm, von dem eine Diagonale und die Richtungen der Seiten bekannt sind.
Algebraisch ists nicht viel schwieriger:

Vor.: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht kollinear und $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$
Beh.: λ und μ liegen eindeutig fest

Bew.: Annahme $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b}$

$\vec{v} = \lambda_2 \vec{a} + \mu_2 \vec{b}$

Subtraktion der Gleichungen ergibt $\vec{o} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{a} + (\mu_1 - \mu_2)\vec{b}$

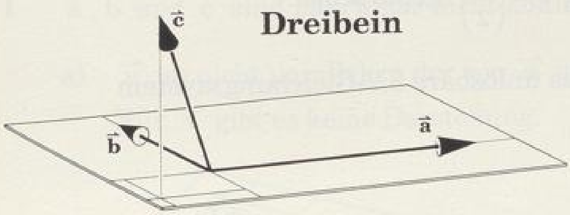
Wäre zum Beispiel $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, so würde folgen $\vec{a} = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\vec{b}$,

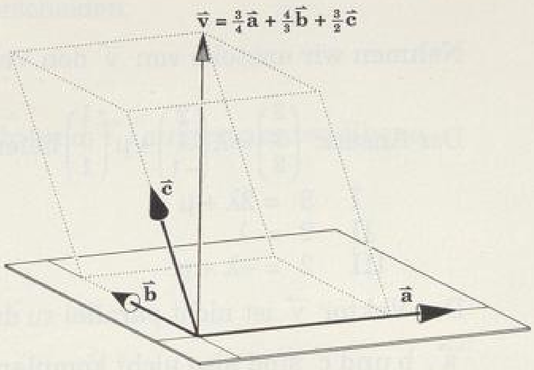
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ wären somit kollinear, im Widerspruch zur Voraussetzung.

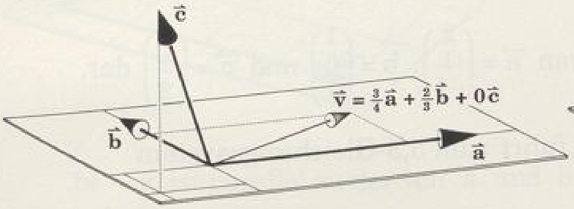
Deshalb gilt $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\mu_1 = \mu_2$, es gibt also nur eine Darstellung für $\vec{v}$.

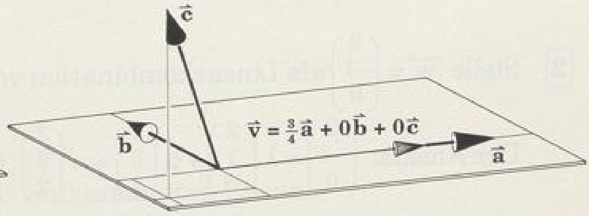
Drei Vektoren

Zwei Vektoren des Raums sind immer komplanar, drei Vektoren im allgemeinen nicht. Drei nicht komplanare Vektoren heißen **Dreibein.** Mit einem Dreibein läßt sich jeder Vektor des Raums eindeutig als Linearkombination darstellen. Mit etwas Raumvorstellung kann man sich das so klarmachen: Man zeichnet ein Spat, von dem eine Raumdiagonale und die Richtungen der Kanten bekannt sind. Je nach Lage des Vektors $\vec{v}$ kann das Spat aber auch zu einem Parallelogramm oder sogar zu einer Strecke verkümmern.









Die Eindeutigkeit der Darstellung beweist man wie bei **Zwei Vektoren** durch einfache Rechnung:

Vor.: $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind nicht komplanar und $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$, $\quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

Beh.: λ, μ und ν liegen eindeutig fest

Bew.: Annahme $\vec{v} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \nu_1\vec{c}$ $\qquad \vec{v} = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} + \nu_2\vec{c}$

Subtraktion der Gleichungen ergibt $\vec{o} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{a} + (\mu_1 - \mu_2)\vec{b} + (\nu_1 - \nu_2)\vec{c}$

Wäre zum Beispiel $\nu_1 - \nu_2 \neq 0$, so würde folgen $\vec{c} = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\nu_1 - \nu_2}\vec{a} + \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\nu_1 - \nu_2}\vec{b}$

Damit wäre $\vec{c}$ komplanar zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die eindeutige Darstellung eines Vektors durch ein Dreibein verwenden wir ständig bei der Koordinaten-Schreibweise von Vektoren:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist ja nur die Abkürzung für $\vec{v} = 3\,\vec{e_1} + 2\,\vec{e_2} - 3\,\vec{e_3}$

$\vec{v}$ ist eine eindeutige Linearkombination des Basis-Dreibeins $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$.

Beispiele zur Berechnung von Koeffizienten in Linearkombinationen:

$\boxed{1}$ Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

Der Ansatz: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert das 3,2-Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 3 & = 2\lambda + \mu \\ \text{II} & 2 & = \lambda \\ \text{III} & -3 & = -\lambda + \mu \end{array}$$

mit der Lösung $\lambda = 2$ und $\mu = -1$, also $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

Nehmen wir anstelle von $\vec{v}$ den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, gehts schief.

Der Ansatz: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert das unlösbare 3,2-Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 3 & = 2\lambda + \mu \\ \text{II} & 2 & = \lambda \\ \text{III} & 2 & = -\lambda + \mu \end{array}$$

Der Vektor $\vec{v}$ ist nicht parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene,

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind also nicht komplanar.

$\boxed{2}$ Stelle $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dar.

Der Ansatz: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ führt zum 3,3-Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2 & = 2\lambda + \mu + 3\nu \\ \text{II} & -1 & = \lambda \quad + 2\nu \\ \text{III} & 0 & = -\lambda + \mu + 2\nu \end{array}$$

mit der Lösung $\lambda = 1$, $\mu = 3$ und $\nu = -1$, also $\vec{w} = \vec{a} + 3\,\vec{b} - \vec{c}$.

Versucht man, $\vec{w}$ als Linearkombination der komplanaren Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{v}$ (aus $\boxed{1}$) darzustellen, so stößt man auf das unlösbare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2 & = 2\lambda + \mu + 3\nu \\ \text{II} & -1 & = \lambda \quad + 2\nu \\ \text{III} & 0 & = -\lambda + \mu - 3\nu \end{array}$$

Dagegen läßt sich $\vec{z} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der komplanaren Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{v}$ darstellen, allerdings nicht eindeutig.

Das Gleichungssystem
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & -4 & = & 2\lambda + \mu + 3\nu \\ \text{II} & -3 & = & \lambda \quad\; + 2\nu \\ \text{III} & 5 & = & -\lambda + \mu - 3\nu \end{array}$$
hat die ∞^1 Lösungen $\lambda = -3 - 2t$, $\mu = 2 + t$, $\nu = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Mögliche Linearkombinationen:
$t = 0 \Rightarrow \vec{z} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + 0\vec{v}$ oder $t = -1 \Rightarrow \vec{z} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{v}$

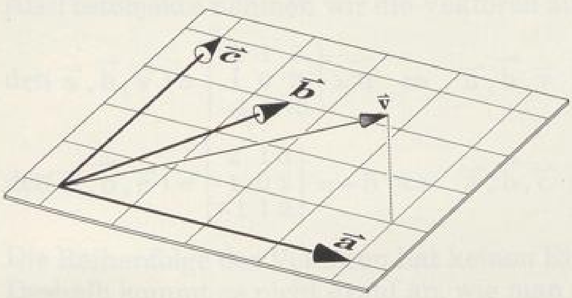
Komplanaritäts-Kriterium

Wir haben gesehen, daß man mit einem Dreibein $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ jeden Vektor $\vec{v}$ des Raums eindeutig als Linearkombination darstellen kann. Sind $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aber komplanar, so ist eine solche Darstellung entweder gar nicht oder nur mehrdeutig möglich. Um das zu sehen, müssen wir einige Fälle unterscheiden.

I $\quad \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind paarweise nicht kollinear.

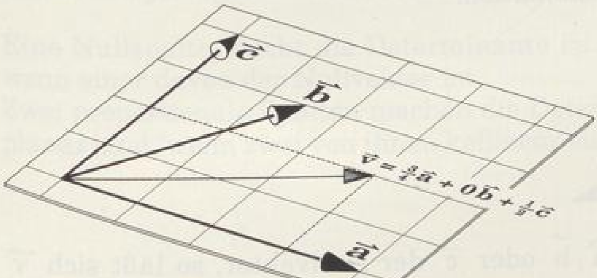
a) $\vec{v}$ ist nicht parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (und $\vec{c}$) aufgespannten Ebene.

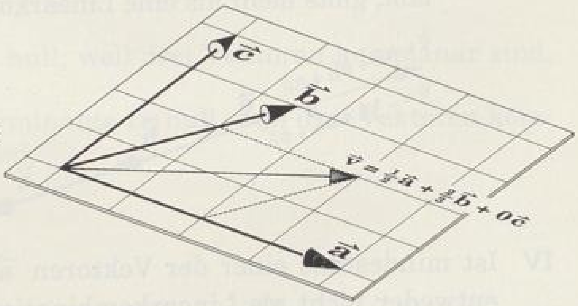
Für $\vec{v}$ gibt es keine Darstellung.



b) $\vec{v}$ ist parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

Da sich $\vec{v}$ zum Beispiel durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$, aber auch mit $\vec{a}$ und $\vec{c}$ darstellen läßt, gibts mehr als eine Linearkombination.

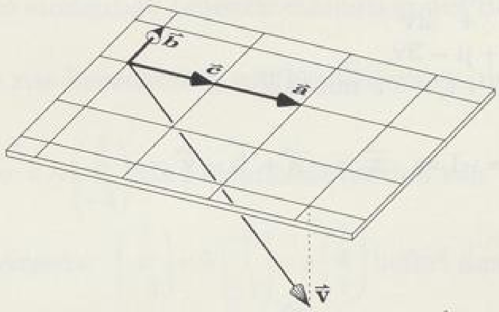




II $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind kollinear, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht.

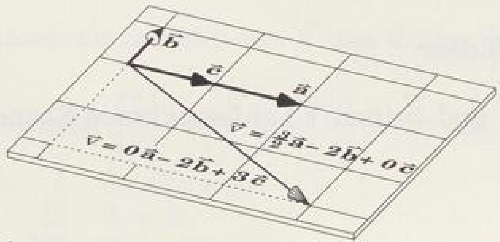
a) $\vec{v}$ ist nicht parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (und $\vec{c}$) aufgespannten Ebene.

Für $\vec{v}$ gibt es keine Darstellung.



b) $\vec{v}$ ist parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

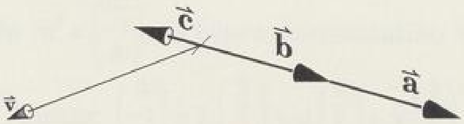
Da sich $\vec{v}$ zum Beispiel durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$, aber auch mit $\vec{a}$ und $\vec{c}$ darstellen läßt, gibts mehr als eine Linearkombination.



III $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind kollinear.

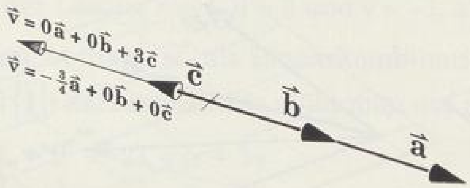
a) $\vec{v}$ ist nicht kollinear zu $\vec{a}$.

Für $\vec{v}$ gibt es keine Darstellung.



b) $\vec{v}$ ist kollinear zu $\vec{a}$.

Da sich $\vec{v}$ als Linearkombination (Vielfaches) von $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ oder $\vec{c}$ darstellen läßt, gibts mehr als eine Linearkombination.



IV Ist mindestens einer der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ oder $\vec{c}$ der Nullvektor, so läßt sich $\vec{v}$ entweder nicht als Linearkombination schreiben oder auf unendlich viele Arten, weil der Koeffizient des Nullvektors beliebig wählbar ist.

Zusammenfassung

$$\left.\begin{array}{r}\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ nicht komplanar,} \\ \vec{v} \text{ beliebig}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{für } \vec{v} \text{ gibt es eine eindeutige} \\ \text{Linearkombination von } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\end{array}\right.$$

Die Bestimmung der Koeffizienten λ, μ und ν der Linearkombination $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ führt auf ein 3,3- Gleichungssystem für λ, μ und ν:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & v_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 \\ \text{II} & v_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 \\ \text{III} & v_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 \end{array}$$

Es hat nach der Cramer-Regel genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ungleich 0 ist. Die Spalten von D sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Wir schreiben deshalb $D = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Komplanaritäts-Kriterium

$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht komplanar

$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar

Als Testobjekte nehmen wir die Vektoren aus unserem Beispiel:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{v} \text{ komplanar}$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ nicht komplanar}$$

Die Reihenfolge der Vektoren hat keinen Einfluß auf die Komplanarität.
Deshalb kommt es nicht drauf an, wie man die Spalten in der Determinante anordnet:

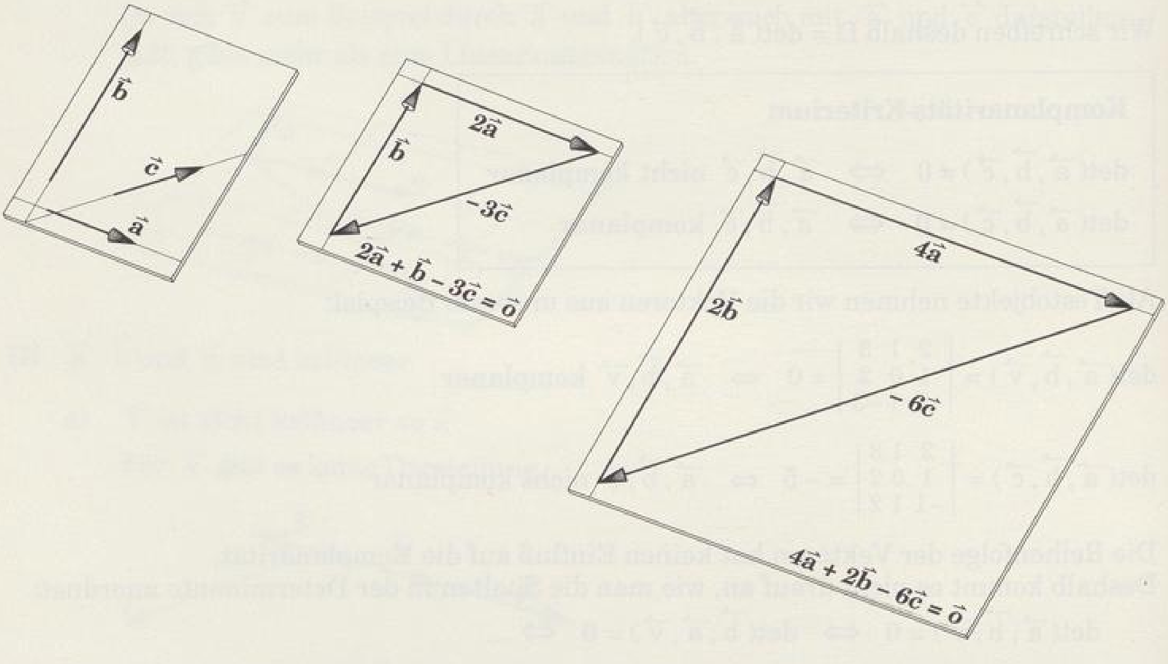
$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \dots$$

Ist die Determinante ungleich null, dann ändert das Vertauschen zweier Spalten nur das Vorzeichen, wie Satz $\boxed{4}$ in Kapitel II.6 lehrt. Auch die Nachbarsätze $\boxed{3}$ und $\boxed{5}$ lassen sich jetzt geometrisch deuten:

Eine Nullspalte macht die Determinante zu null, weil drei Vektoren komplanar sind, wenn einer davon der Nullvektor ist.
Zwei proportionale Spalten machen die Determinante zu null, weil drei Vektoren komplanar sind, wenn zwei von ihnen kollinear sind.

Lineare Abhängigkeit

Die Begriffe »kollinear« und »komplanar« sind Sonderfälle der »linearen Abhängigkeit«. Allerdings ist sie erst dann wichtig, wenn man die Vektorrechnung verallgemeinert. Die entscheidende Frage ist, ob der Nullvektor als Linearkombination der gegebenen Vektoren, zum Beispiel $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, darstellbar ist. **Eine** Darstellung ist natürlich immer möglich: $\vec{o} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$; man nennt sie triviale Nullsumme, bei ihr sind **alle** Koeffizienten 0. Manchmal gibt es aber auch Nullsummen, bei denen **mindestens ein** Koeffizient von 0 verschieden ist, sie heißen nichttriviale Nullsummen – Beispiel: $\vec{o} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$. Multipliziert man diese Gleichung mit einer Zahl, dann ergibt sich zum Beispiel: $\vec{o} = 4\vec{a} + 2\vec{b} - 6\vec{c}$. Hat man also eine nichttriviale Nullsumme, dann gibts unendlich viele. Geometrisch gesehen ist eine nichttriviale Nullsumme eine geschlossene Vektorkette. Die Multiplikation mit einer Zahl wirkt wie eine zentrische Streckung.



Definition

Eine **Nullsumme** von n Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ ist eine Linearkombination dieser Vektoren, die gleich dem Nullvektor ist:

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \dots + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{o} \qquad n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Sind alle Koeffizienten gleich 0,
dann heißt die Linearkombination **triviale Nullsumme.**
Ist mindestens ein Koeffizient ungleich 0,
dann heißt die Linearkombination **nichttriviale Nullsumme.**

Der Sonderfall n = 1 ist auch zugelassen,
obwohl man dann nicht mehr von Summe spricht.

Mit dem Begriff Nullsumme können wir jetzt endlich sagen, was man unter »linear abhängig« versteht:

Definition
Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt **linear abhängig,** wenn sich mit ihren Vektoren eine nichttriviale Nullsumme bilden läßt. Andernfalls heißt die Menge **linear unabhängig.**

Statt »eine Menge von Vektoren $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ ist linear abhängig« sagt man auch »die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ sind linear abhängig«

Satz: Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie kollinear sind.

Beweis: Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind, dann gilt $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{o}$ mit $(\lambda|\mu) \neq (0|0)$. Sei beispielsweise $\lambda \neq 0$, dann ist $\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}$, das heißt, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear.

Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind, dann gilt zum Beispiel $\vec{a} = \sigma\vec{b}$, das heißt, $1 \cdot \vec{a} + (-\sigma)\vec{b} = \vec{o}$, also sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.

Satz: Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie komplanar sind.

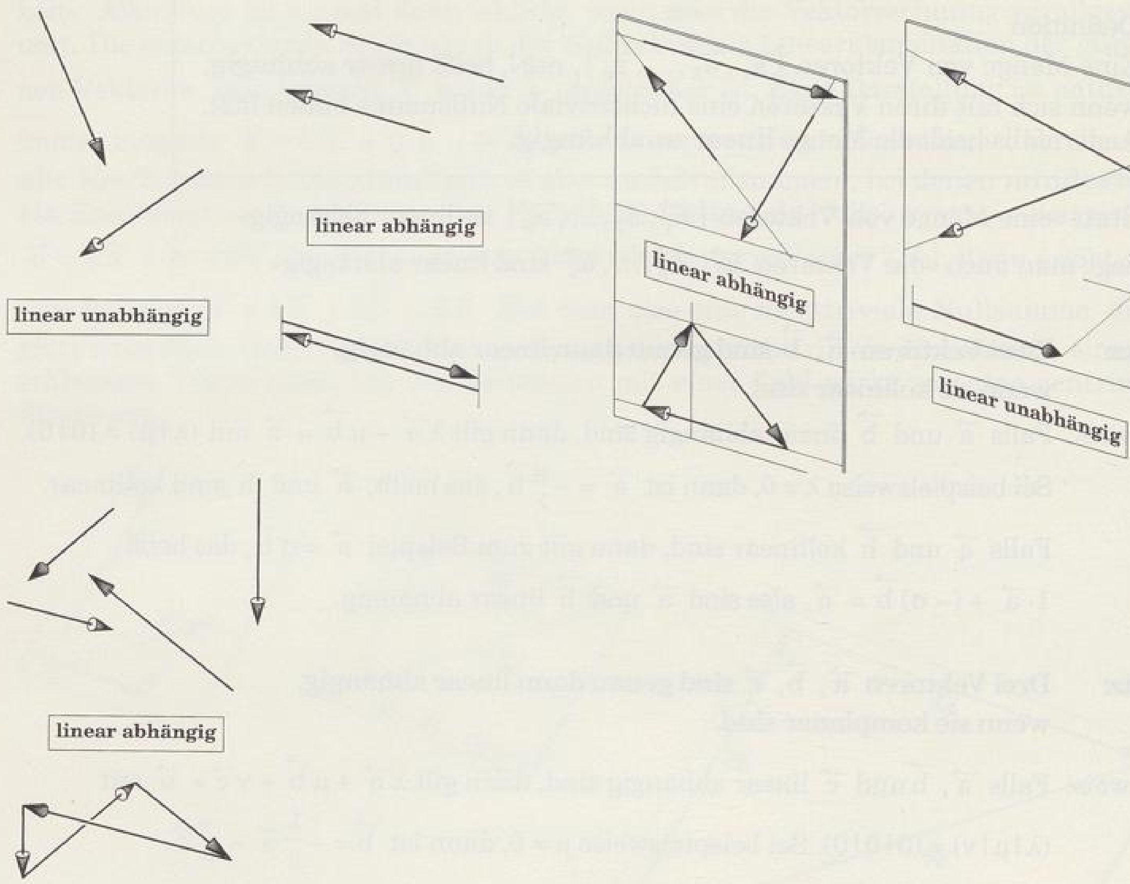
Beweis: Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind, dann gilt $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{o}$ mit $(\lambda|\mu|\nu) \neq (0|0|0)$. Sei beispielsweise $\mu \neq 0$, dann ist $\vec{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{a} - \frac{\nu}{\mu}\vec{c}$.

$\vec{b}$ ist eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{c}$, das heißt $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar. Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind, dann gilt zum Beispiel $\vec{a} = \sigma\vec{b} + \tau\vec{c}$, das heißt, $1 \cdot \vec{a} + (-\sigma)\vec{b} + (-\tau)\vec{c} = \vec{o}$, also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.

Satz: Vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ im Raum sind immer linear abhängig.

Beweis: Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht komplanar sind, dann läßt sich $\vec{d}$ eindeutig schreiben als $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$, das heißt, es gibt die nichttriviale Nullsumme $\vec{o} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} - 1 \cdot \vec{d}$, also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear abhängig.
Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind, dann gibt es eine nichttriviale Nullsumme $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{o}$ und damit auch die nichttriviale Nullsumme $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} + 0 \cdot \vec{d} = \vec{o}$, also sind auch dann $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear abhängig.

Zusammenfassung (Bild)



Aufgaben

$\boxed{1.}$ Stelle $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ -39 \\ 26 \end{pmatrix}$

2. Stelle $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}$

3. Untersuche auf Komplanarität:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Untersuche, ob die Punkte A, B und C auf einer Gerade liegen:

a) $A(2 \mid 0 \mid 1)$ $B(3 \mid 2 \mid 0)$ $C(1 \mid -2 \mid 2)$

b) $A(4 \mid 4 \mid -1)$ $B(1 \mid 2 \mid -1)$ $C(1 \mid 0 \mid 0)$

c) $A(3 \mid 1 \mid 1)$ $B(7 \mid 3 \mid 3)$ $C(1 \mid 0 \mid 0)$

d) $A(1 \mid -2 \mid 2)$ $B(-1 \mid 2 \mid -2)$ $C(0 \mid 0 \mid 0)$

5. Untersuche, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen:
(Tip: Verbindungsvektoren!)

a)	A(0 | 0 | 2)	B(1 | −1 | 1)	C(2 | −2 | 0)	D(3 | 3 | 1)
b)	A(0 | 0 | 0)	B(1 | 1 | 1)	C(− 3 | 0 | −1)	D(3 | 0 | 1)
c)	A(1 | 0 | 1)	B(2 | 3 | 4)	C(−1 | 1 | 0)	D(2 | 1 | 2)

6. $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ $\qquad \vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$ $\qquad \vec{c} = 2\vec{u} - \vec{v}$

Zeige: $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar.

7. Bestimme t bis z so, daß die Vektoren kollinear sind:

$\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}6\\y\\z\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x\\-2\\t\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}4\\w\\2\end{pmatrix}$ (!)

8. Bestimme a bis f so, daß die Vektoren komplanar sind:

a) $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\8\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\1\\d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\e\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f\\0\\-1\end{pmatrix}$

9. Bestimme a so, daß die Vektoren komplanar sind:

a) $\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}a-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a+1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1-a\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}a-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a+1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\a-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}a+5\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\a-5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-7\\a+3\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}a-1\\1\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a+1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1-a\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}a\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a+2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **j)** $\begin{pmatrix}a-1\\a-2\\a-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a+1\\a+2\\a+3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

10. $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\6\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-3\\13\end{pmatrix}$

a) Zeige: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ sind komplanar.

b) Zeige: Mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ läßt sich nur die triviale Nullsumme bilden.
Gib je eine nichttriviale Nullsumme der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ beziehungsweise $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ an.

c) Schreibe $\vec{v}$ auf zwei Arten als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

11. Zeige:

a) Eine Vektormenge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

b) Eine Vektormenge, die zwei kollineare Vektoren enthält, ist linear abhängig.

12. Was kann man vom Vektor $\vec{x}$ sagen, wenn

a) $\{\vec{x}\}$ linear unabhängig ist? b) $\{\vec{x}\}$ linear abhängig ist?

• 13. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien linear unabhängig.
Untersuche $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit:

a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b},\ \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ b) $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b},\ \vec{v} = \vec{b} - 2\vec{a}$

c) $\vec{u} = 2\vec{a} + 6\vec{b},\ \vec{v} = -\vec{a} - 3\vec{b}$ d) $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\ \vec{v} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$

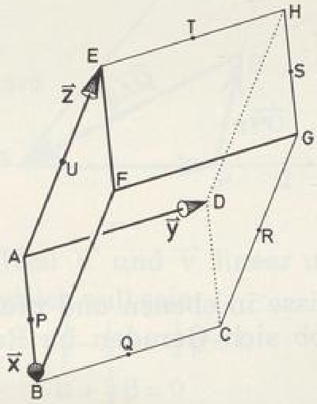
• 14. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien linear unabhängig.
Untersuche $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auf lineare Abhängigkeit:

a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b},\ \vec{v} = \vec{b} + \vec{c},\ \vec{w} = \vec{a} + \vec{c}$

b) $\vec{u} = \vec{c} - \vec{a},\ \vec{v} = \vec{b} - \vec{c},\ \vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$

c) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},\ \vec{v} = \vec{a} + \vec{b},\ \vec{w} = \vec{a} - \vec{c}$

15. $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{z} = \overrightarrow{AE}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf mit A(1 | 1 | 0), B(5 | 3 | 0), D(−1 | 3 | 0) und E(−3 | 1 | 2). P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten.



Berechne diese Kantenmitten und den Spatmittelpunkt M.
Zeige, daß die folgenden Punkte in einer Ebene liegen, und untersuche, ob der Spatmittelpunkt M in dieser Ebene liegt.

a) G, T, A, Q b) A, C, S, T

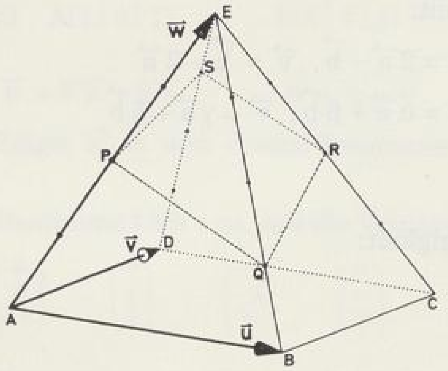
c) P, C, S, E d) P, Q, R, S, T, U

• 16. $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf. P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten. Zeige, daß die folgenden Punkte in einer Ebene liegen, und untersuche, ob der Spatmittelpunkt M in dieser Ebene liegt. (Bild wie Aufgabe **15.**)

a) G, T, A, Q b) A, C, S, T

c) P, C, S, E d) P, Q, R, S, T, U

17. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ spannen die Pyramide ABCDE auf mit $A(2\,|\,-3\,|\,0)$, $B(2\,|\,5\,|\,0)$, $D(-2\,|\,-1\,|\,0)$ und $E(0\,|\,2\,|\,7)$. ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.



18. $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen die Pyramide ABCDE auf. ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.

2. Anwendungen

Mit der linearen Unabhängigkeit kann man Teilverhältnisse in ebenen und räumlichen Figuren bestimmen und außerdem untersuchen, ob sich Geraden im Raum schneiden. Dazu zwei Beispiele.

$\boxed{1}$ Die Seitenhalbierenden im Dreieck teilen sich im Verhältnis 2 : 1 von der Ecke aus.

Vektorbeweis

Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ spannen das Dreieck ABC auf.

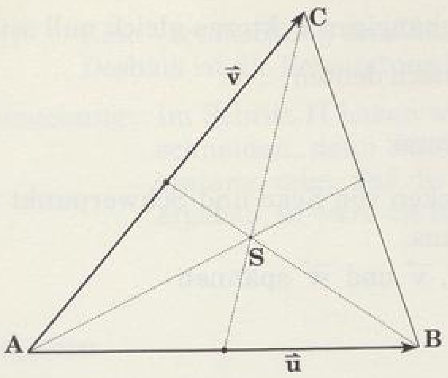
Geschlossene Vektorkette mit S als Ecke: $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \vec{o}$

Wir drücken die drei Vektoren der Vektorkette mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus:

$$\overrightarrow{AP} = \tfrac{1}{2}\vec{u}$$

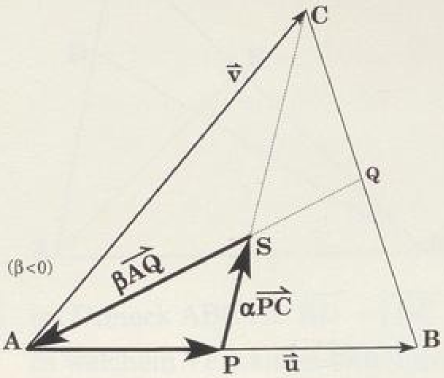
$$\overrightarrow{PS} = \alpha\,\overrightarrow{PC} = \alpha(-\tfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta\,\overrightarrow{AQ} = \beta(\tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v}) \qquad (\beta \text{ ist negativ!})$$



Einsetzen in die Vektorkette: $\frac{1}{2}\vec{u} + \alpha(-\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = \vec{o}$

Sortieren: $\vec{u} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) + \vec{v} \cdot (\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \vec{o}$



Weil $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten der Nullsumme gleich null sein:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0$$
$$\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $\alpha = \frac{1}{3}$ und $\beta = -\frac{2}{3}$.

Das heißt, $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$ oder $\mathbf{\overline{PS} : \overline{SC} = 1 : 2}$ und $\overrightarrow{SA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$ oder $\mathbf{\overline{AS} : \overline{SQ} = 2 : 1.}$

Diese Teilverhältnisse ergeben sich unabhängig davon, welche Seitenhalbierende man nimmt. Deshalb gehen alle drei Seitenhalbierenden durch denselben Punkt S; dieser teilt sie im Verhältnis 2 : 1.

Dieses Beispiel zeigt das Prinzip, nach dem man solche Aufgaben löst:

I Skizze machen und Vektoren festlegen:
2 linear unabhängige Vektoren bei Aufgaben in der Ebene
3 linear unabhängige Vektoren bei Aufgaben im Raum

II geschlossene Vektorkette mit Teilpunkt als Ecke hinschreiben

III jeden Vektor der Vektorkette durch die linear unabhängigen Vektoren ausdrücken, dabei Variable für unbekannte Koeffizienten einführen

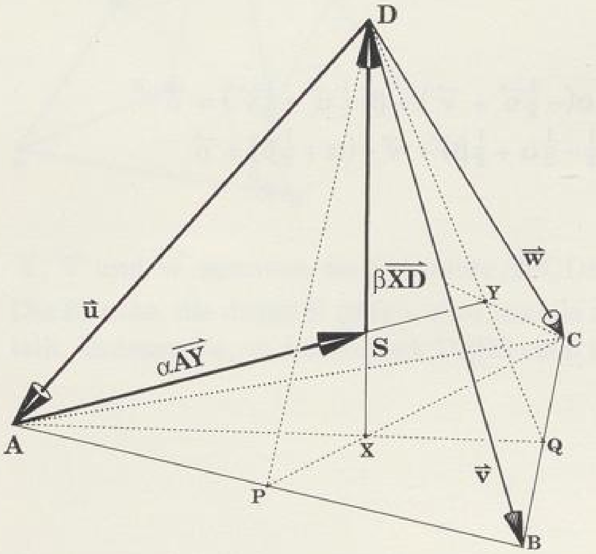
IV sortieren und die Koeffizienten der linear unabhängigen Vektoren gleich null setzen

V Gleichungssystem lösen und Ergebnis geometrisch deuten

Nach diesem Schema lösen wir eine Aufgabe im Raum:

$\boxed{2}$ Im Tetraeder teilen sich die Verbindungsstrecken von Ecke und Schwerpunkt der Gegenfläche im Verhältnis 3 : 1 von der Ecke aus.

Beweis: Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen das Tetraeder ABCD auf.



I $\vec{u} = \overrightarrow{DA},\ \vec{v} = \overrightarrow{DB},\ \vec{w} = \overrightarrow{DC}$

II $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DA} = \vec{o}$

III $\overrightarrow{AS} = \alpha\,\overrightarrow{AY} = \alpha(-\vec{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DQ}) = \alpha(-\vec{u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}))$

$= \alpha(-\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w})$

$\overrightarrow{SD} = \beta\,\overrightarrow{XD} = \beta(\frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \vec{w}) = \beta(\frac{2}{3}(\overrightarrow{PD} + \vec{w}) - \vec{w})$

$= \beta(\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}) - \vec{w}) = \beta(-\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w})$

$\overrightarrow{DA} = \vec{u}$

Einsetzen: $\alpha(-\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}) + \beta(-\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w}) + \vec{u} = \vec{o}$

IV $\vec{u}\cdot(1 - \alpha - \frac{1}{3}\beta) + \vec{v}\cdot(\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta) + \vec{w}\cdot(\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta) = \vec{o}$

$1 - \alpha - \frac{1}{3}\beta = 0$

$\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta = 0$

$\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta = 0$

V $\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{3}{4};\quad \overrightarrow{SD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{XD},\quad \mathbf{\overline{DS}:\overline{SX} = 3:1}$

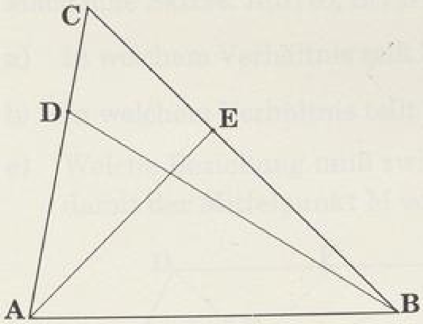
$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AY},\quad \mathbf{\overline{AS}:\overline{SY} = 3:1}$

Eine Vertauschung der Ecken hat keinen Einfluß aufs Ergebnis.
Deshalb ist die Behauptung bewiesen.

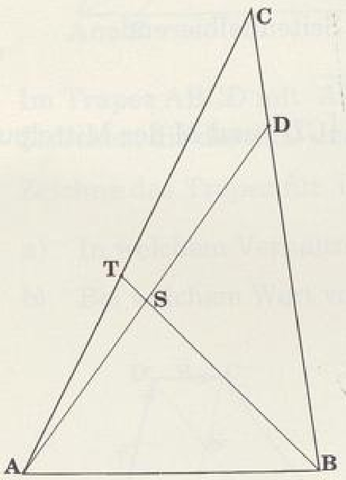
Bemerkung: Im Schritt **II** haben wir angenommen, daß sich die Geraden DX und AY schneiden, denn nur dann existiert S. Die Lösbarkeit des Gleichungssystems zeigt, daß die Annahme richtig war. Hätte sich ein Widerspruch ergeben, so wäre die Annahme falsch gewesen.

Aufgaben

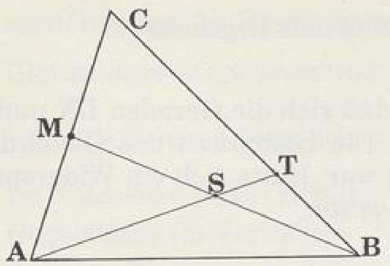
1. Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
In welchen Verhältnissen teilen sich [AE] und [BD] ?



2. Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. BS schneidet AC in T.
In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AC] beziehungsweise S die Strecke [BT]?

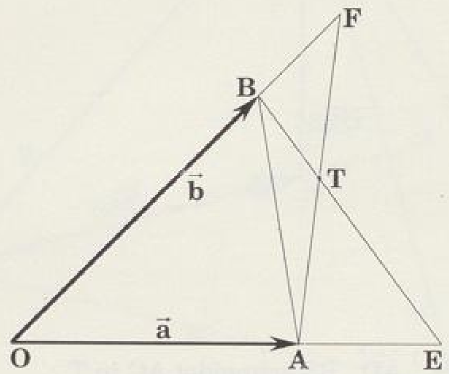


3. Im Dreieck ABC ist M die Mitte von [AC]. T teilt [BC] im Verhältnis 1:2 von B aus. AT schneidet BM in S.
a) In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [AT] von A aus ?
b) Nun sei A(0 | 0 | 0), B(2 | 2 | – 4) und C(8 | – 4 | –16). Berechne S.



4. Im Dreieck OAB ist $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE} = k\vec{a}$ und $\overrightarrow{OF} = m\vec{b}$.
EB und AF schneiden sich in T. Berechne

a) $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{BT}$ b) $\overline{ET} : \overline{TB}$, $\overline{AT} : \overline{TF}$

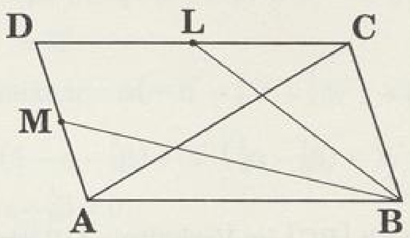


c) Berechne T für A(14 | 0), $k = \frac{3}{2}$ und B(12 | 12), $m = \frac{4}{3}$.

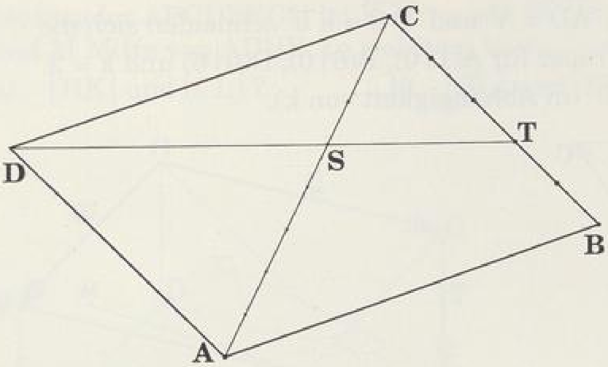
d) Zeige: Sind AB und EF parallel, so liegt T auf der Seitenhalbierenden von [AB] oder ihrer Verlängerung.

5. Im Parallelogramm ABCD ist L der Mittelpunkt von [CD] und M der Mittelpunkt von [DA]. In welchem Verhältnis teilen sich

a) [AC] und [BM] ? b) [AC] und [BL] ?



6. Im Parallelogramm ABCD teilt T die Seite [BC] im Verhältnis $x : y$ von B aus. DT schneidet AC in S. Mach eine Zeichnung für A(5 | 0), B(14 | 3), C(9 | 8), D(0 | 5) und $x : y = 2 : 3$. Zeige: S teilt die Diagonale [AC] im Verhältnis $r : s = x : y + 1$ von A aus.

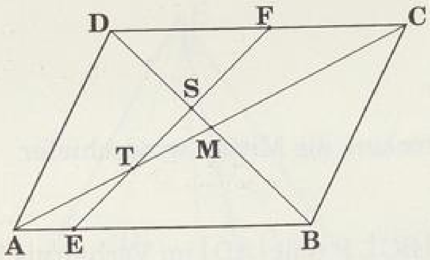


⁝ 7. Im Parallelogramm ABCD gilt: $\overline{AE} : \overline{EB} = k$, $\overline{CF} : \overline{FD} = m$.
Mach eine Skizze: $A(0 \mid 0)$, $B(7{,}5 \mid 0)$, $C(10 \mid 5)$, $D(2{,}5 \mid 5)$, $k = 1:4$, $m = 7:8$

a) In welchem Verhältnis teilt S die Diagonale $[BD]$?

b) In welchem Verhältnis teilt T die Diagonale $[AC]$?

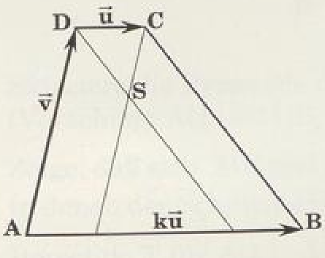
c) Welche Beziehung muß zwischen m und k bestehen, damit der Mittelpunkt M von ABCD auf $[EF]$ liegt ?



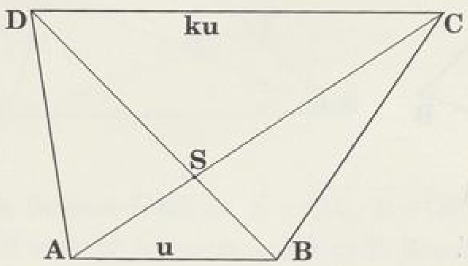
• 8. Im Trapez ABCD mit $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$ und $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$ schneiden sich in S die Strecken, die durch D und C gehen und zu den Schenkeln parallel sind.
Zeichne das Trapez für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $k = 4$.

a) In welchem Verhältnis (in Abhängigkeit von k) teilt S die Strecken ?

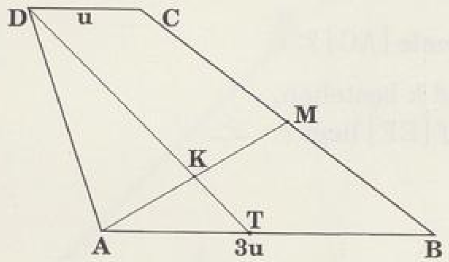
b) Bei welchem Wert von k liegt S auf AB ?



• **9.** Im Trapez ABCD mit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{DC} = k\vec{u}$ schneiden sich die Diagonalen in S. Zeichne das Trapez für A(1 | 0), B(6 | 0), D(0 | 6) und k = 2. Berechne $\overline{AS} : \overline{SC}$ und $\overline{BS} : \overline{SD}$ (in Abhängigkeit von k).

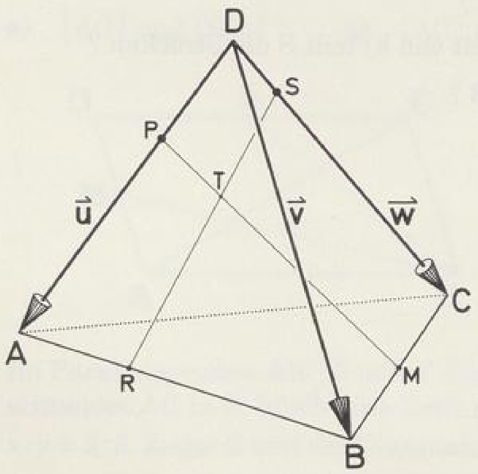


• **10.** Im Trapez ABCD mit $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$ ist M die Mitte von [BC] und K die Mitte von [AM]. DK und AB schneiden sich in T.
Zeichne das Trapez für A(2 | 0), B(11 | 0), D(0 | 6). Berechne $\overline{DK} : \overline{KT}$ und $\overline{AT} : \overline{TB}$.



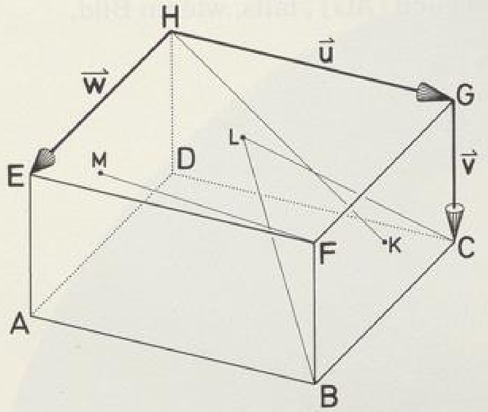
11. Zeige: Im Tetraeder halbieren sich die Strecken, die Mitten windschiefer Kanten verbinden.

12. Im Tetraeder ABCD halbiert M die Kante [BC], P teilt [AD] im Verhältnis 2 : 1.
R liegt auf [AB] mit $\overrightarrow{AR} = r\,\overrightarrow{AB}$, S liegt auf [DC] mit $\overrightarrow{DS} = s\,\overrightarrow{DC}$.
Gib eine Beziehung für r und s so an, daß sich MP und RS schneiden.
In welchen Verhältnissen teilen sich [MP] und [RS] ?

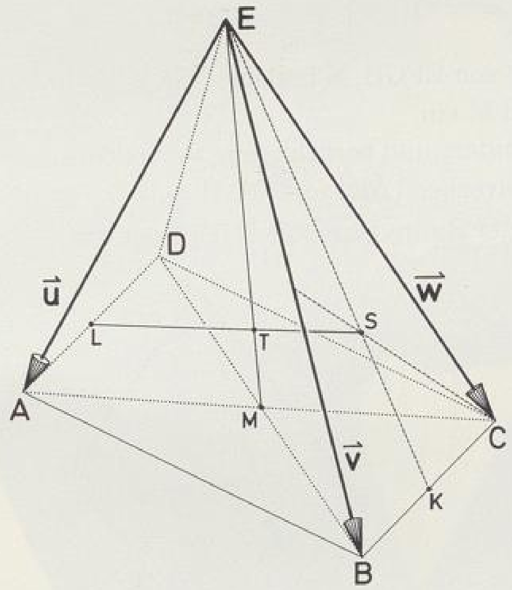


13. Im Quader ABCDEFGH ist K Mitte von BCGF, L Mitte von EFGH und M Mitte von ADHE. In welchem Verhältnis teilen sich

a) [HK] und [CL] ? b) [BL] und [FM] ?



• **14.** $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen die Pyramide ABCDE auf (Bild). ABCD ist ein Parallelogramm mit Mitte M, S ist der Schwerpunkt im Dreieck BCE, K und L sind Kantenmitten.



a) Skizziere die Pyramide und trage alle oben genannten Stücke ein. (Vorschlag: A(1 | −3 | 0), B(3 | 3 | 0), C(−1 | 3 | 0) und E(−1,5 | −2 | 5))

b) Zeige, daß sich ME und LS schneiden, und berechne die Verhältnisse, in denen der Schnittpunkt T die Strecken [ME] und [LS] teilt.

c) Berechne T für A(1 | −3 | 0), B(3 | 3 | 0), C(−1 | 3 | 0) und E(−1,5 | −2 | 5).

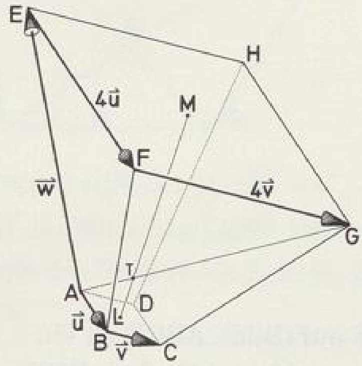
d) Die Gerade CT schneidet die Kante [AE] in X. In welchen Verhältnissen teilt X die Strecken [AE] und [TS] ?

• **15.** $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen den Pyramidenstumpf ABCDEFGH auf.
L und M sind Mitten der Parallelogramme ABCD und EFGH.

a) Zeige, daß sich [LM] und [AG] schneiden, und berechne die Teilverhältnisse.

b) Berechne den Schnittpunkt T von [LM] und [AG], falls, wie im Bild,

$A = O,\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ ist.



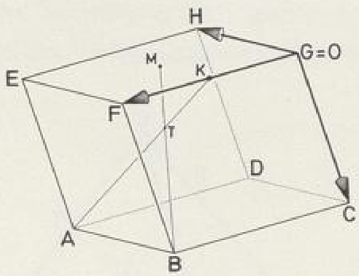
• **16.** $\vec{u} = \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ spannen

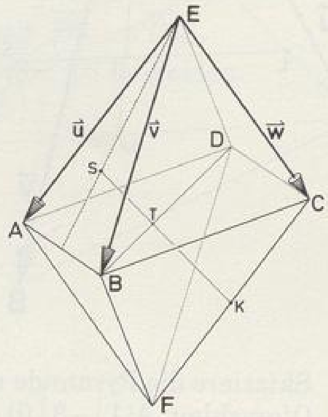
das Spat ABCDEFGH auf: M ist Mitte von EFGH, K halbiert [GF].

a) Zeichne das Spat und trage K und M ein.

b) Zeige, daß sich AK und BM schneiden, und berechne die Verhältnisse, in denen der Schnittpunkt T die Strecken [AK] und [BM] teilt.

c) Berechne T und zeige, daß T auf der Raumdiagonale [DF] liegt.





• **17.** $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen das Oktaeder ABCDEF auf. ABCD ist ein Parallelogramm, sein Mittelpunkt halbiert [EF]. S ist Schwerpunkt von ABE.

a) Zeichne die Figur für A(1,5 | −2 | 0), B(2,5 | 0 | 0), C(−1,5 | 2 | 0) und E(−0,5 | 0 | 3,5).

b) In welchem Verhältnis muß K die Kante [CF] teilen, damit SK die Diagonale [BD] schneidet?