Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1997

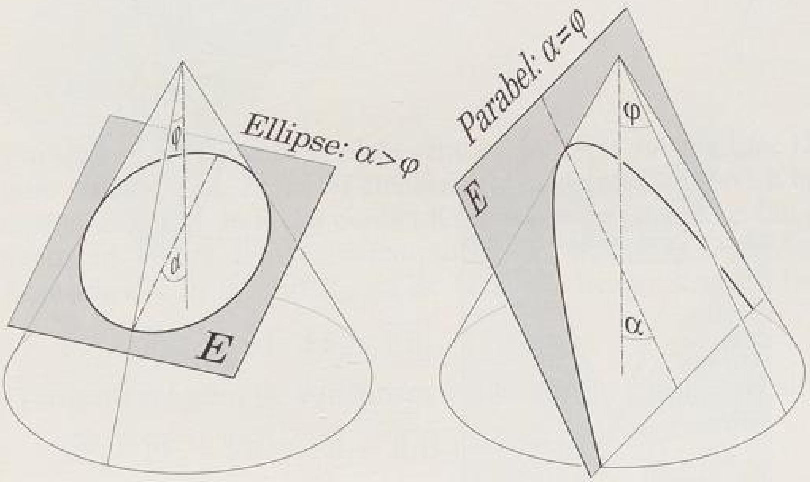
1. Überblick

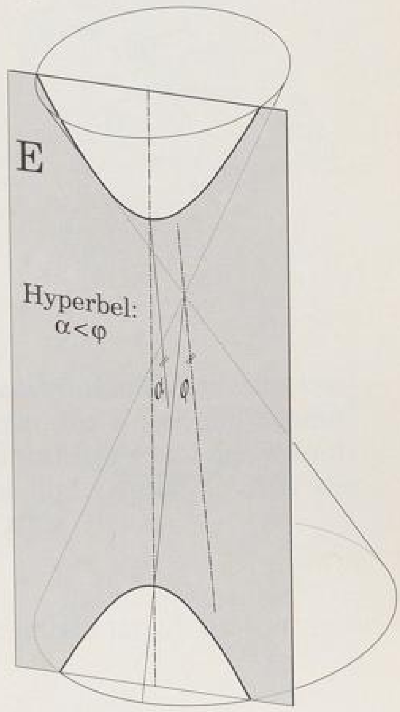
urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

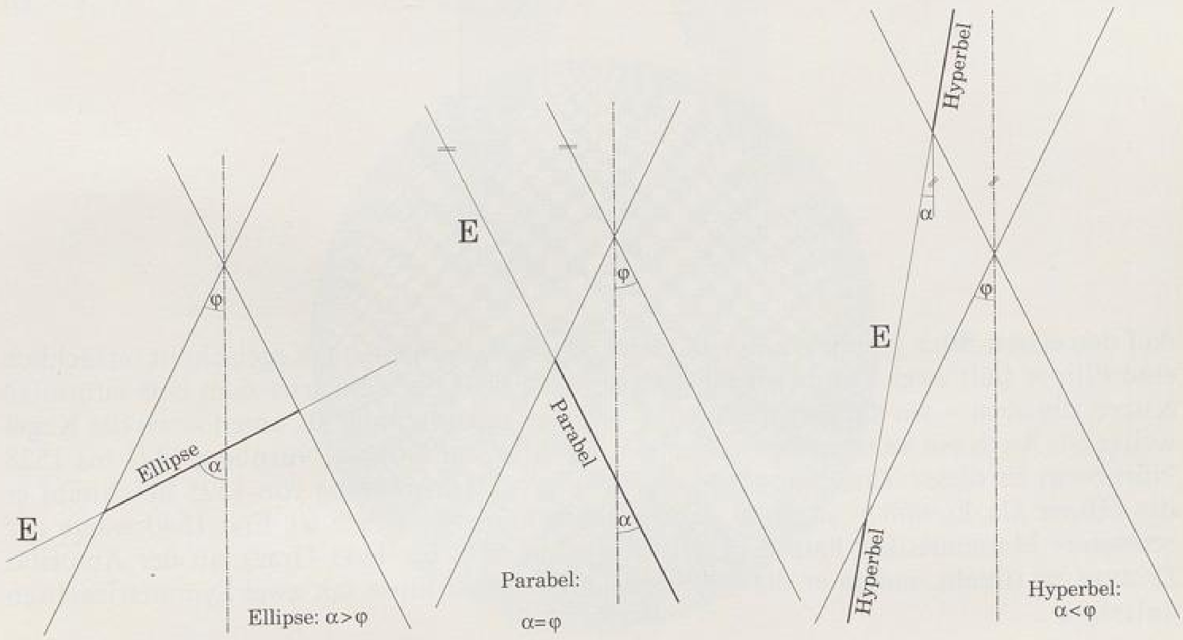
II. Kegelschnitte

1. Überblick

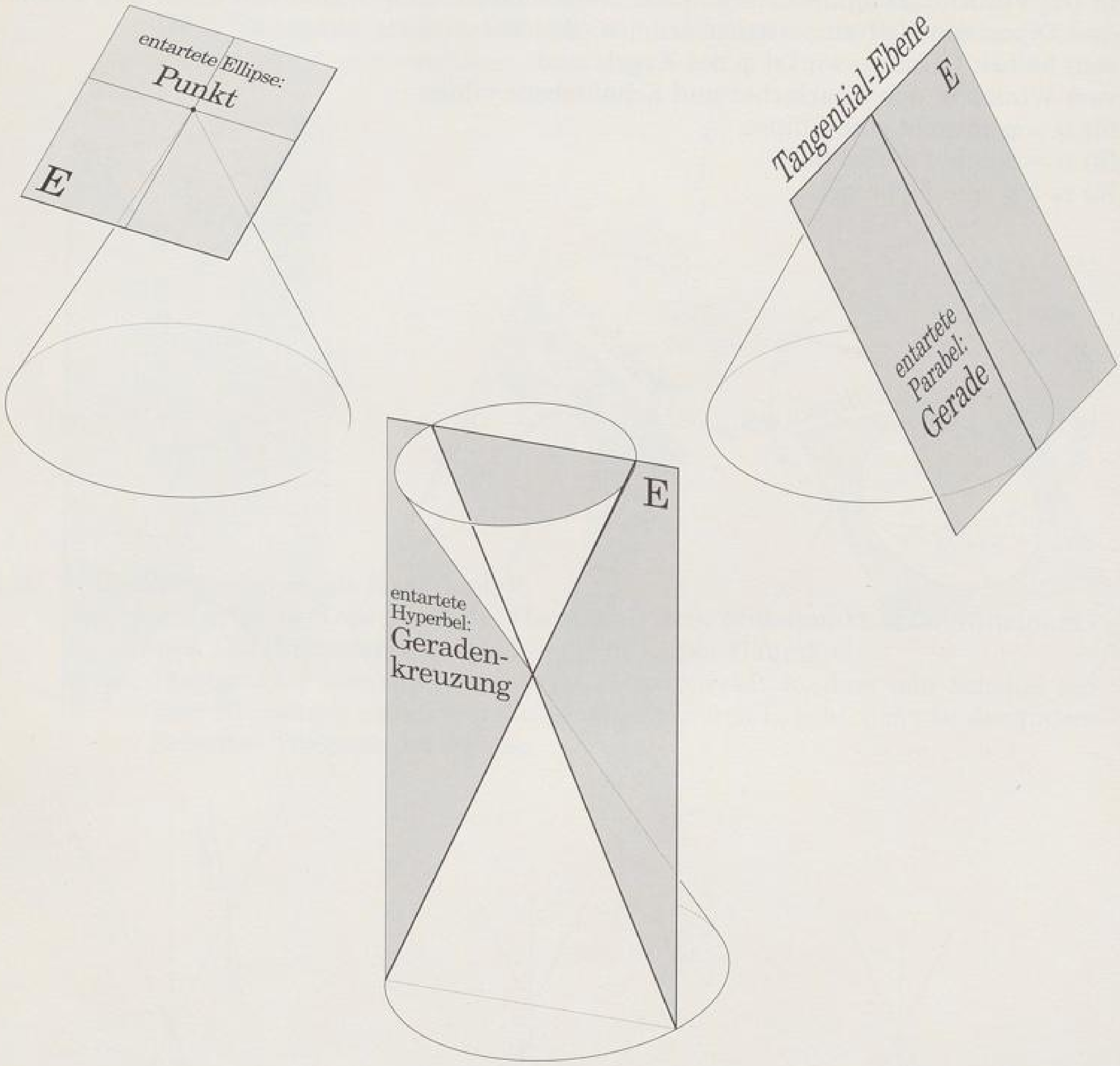
In der Vorbemerkung haben wir schon erwähnt, dass beim Schnitt von Kegel und Ebene drei Typen von Kurven entstehen können. Welcher entsteht, hängt ab
vom halben Öffnungswinkel φ des Kegels und
vom Winkel α, den Kegelachse und Schnittebene bilden:
für $\alpha > \varphi$ entsteht eine Ellipse,
für $\alpha = \varphi$ eine Parabel und
für $\alpha < \varphi$ eine Hyperbel.



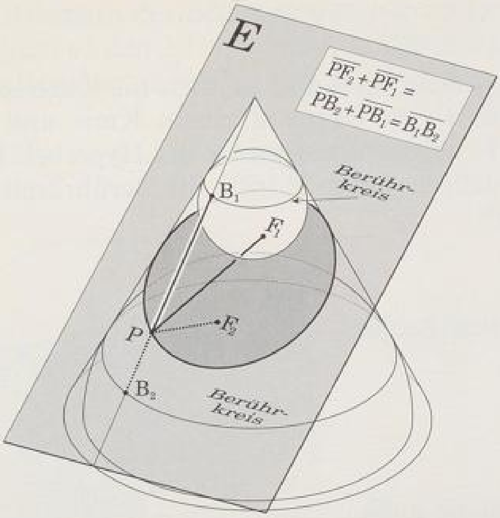


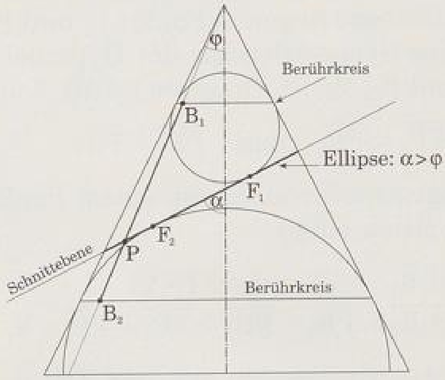


Wenn die Schnittebene die Kegelspitze enthält, dann entarten die Schnittkurven:
die Ellipse zu einem Punkt (Kegelspitze),
die Parabel zu einer Gerade (Mantellinie) und
die Hyperbel zu einer Geradenkreuzung (zwei Mantellinien).



Auf den ersten Blick glaubt man nicht recht, dass der geschlossene Kegelschnitt tatsächlich eine Ellipse (mit zwei Symmetrieachsen also) sein soll. Eher erwartet man eine eiförmige Kurve, die oben – wo der Kegel enger ist – stärker gekrümmt ist als unten – wo der Kegel weiter ist. Auch ein so scharfer Beobachter wie Albrecht Dürer (Nürnberg 1471 bis 1528 Nürnberg) ist dieser Täuschung erlegen. In seiner *Underweysung* von 1525 beschreibt er die Ellipse als *Eierlini = darumb daß sie schier einem Ei gleich ist.* Erst 1640 wagte der schweizer Mathematiker Paul Guldin (St. Gallen 1577 bis 1643 Graz), an der Autorität Dürers zu rütteln, indem er die wirkliche Gestalt der Ellipse mit zwei Symmetrieachsen aufzeigte.





Für uns ist der Nachweis nicht schwer, weil wir auf die Idee Dandelins zurückgreifen können. Analog zum Zylinder stecken wir in den Kegel zwei Kugeln, die Kegel und Schnittebene berühren. Jede der beiden Kugeln berührt den Kegel in einem Kreis und die Schnittebene in einem Punkt (Brennpunkte F_1 und F_2). Die Mantellinie durch P trifft die Berührkreise in B_1 und B_2, sie ist Tangente beider Kugeln. Es gilt

$$\overline{PF_1} = \overline{PB_1} \quad \text{und} \quad \overline{PF_2} = \overline{PB_2}$$

(Tangentenabschnitte von einem Punkt aus an eine Kugel sind gleich lang.)

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = \overline{B_1B_2}\,(= \text{const.})$$

Das ist genau die Eigenschaft der Ellipse, die zur Gärtnerkonstruktion führt. (Siehe Kapitel 9. I, 3)