Anschauliche Geometrie

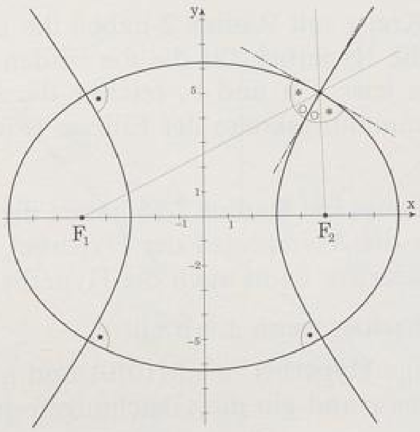
Barth, Friedrich

München, 1997

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

b) Zeichnet man zu zwei gegebenen Brennpunkten eine zugehörige Ellipse und Hyperbel, so schneiden sich diese in vier Punkten. In jedem Schnittpunkt sind die Tangenten von Hyperbel beziehungsweise Ellipse die Winkelhalbierenden des Innen-, beziehungsweise Außenwinkels der Brennstrahlen, das heißt, sie stehen aufeinander senkrecht. Man sagt auch: Konfokale Ellipsen und Hyperbeln schneiden sich rechtwinklig.



Hyperbel-Aufgaben

Bis auf Aufgabe **12.** liegen alle erwähnten Hyperbeln symmetrisch zum Ursprung und haben die Brennpunkte auf der x-Achse.

1. Zeichne die zwei Hyperbeln mit $a = 2$, $b = 1$ und $a = 4$, $b = 3$ in ein und dasselbe Koordinatensystem und berechne die Schnittpunkte.
2. Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel h mit $A_2(4|0)$ durch $P(5|3)$?
3. Bestimme die Gleichung der Hyperbel; zeichne die Scheitel, die Brennpunkte und die Asymptoten; skizziere die Hyperbel.

   a) $a = 3,\ b = 4$ **b)** $a = 2,\ e = \sqrt{13}$ **c)** $b = 1,\ e = \sqrt{2}$
4. Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 6 (waagrecht). Skizziere die Hyperbeln, für die das Rechteck Bestimmungsrechteck ist.
5. Eine Hyperbel hat den Scheitel $A_2(2|0)$ und den Brennpunkt $F_2\left(2\sqrt{2}\,|0\right)$. Bestimme a, b und e. Zeichne die Asymptoten und skizziere die Hyperbel.
6. Eine Hyperbel hat die Brennpunkte $F_{2,1}(\pm 3{,}75|0)$ und geht durch $P(5|3)$. Konstruiere die Scheitel, die Asymptoten und skizziere die Hyperbel.

7. Eine Hyperbel hat die Asymptoten $y = \pm 2{,}4x$ und einen Scheitel $A_1(-2{,}5|0)$. Bestimme a, b und e. Skizziere die Hyperbel.

8. Die Gerade durch $P(1|0)$ und $Q(-2|-3)$ berührt eine Hyperbel mit den Brennpunkten $F_{2,1}(\pm 3|0)$. Konstruiere den Berührpunkt B, die Scheitel und die Asymptoten; skizziere die Hyperbel.

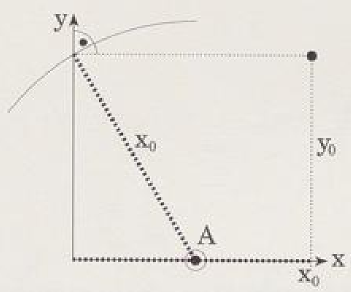
9. Die Mittelpunkte zweier Kreise mit Radius 2 haben die Entfernung 5.
Zeichne die Ellipse und die Hyperbel, für die die beiden Kreise Krümmungskreise sind. Anleitung: Berechne jeweils a und b, zeichne die Asymptoten der Hyperbel und die andern beiden Krümmungskreise der Ellipse. (Für die Ellipse: Mittelpunkt $M(0|0)$, Querformat)

10. Die Mittelpunkte zweier Kreise mit Radius 2,25 haben die Entfernung 12,5. Zeichne die Kreise und *konstruiere* die Asymptoten der Hyperbel, für die die beiden Kreise Krümmungskreise sind. Skizziere dann auch die Hyperbel.

11. Eine Hyperbel heißt **gleichseitig**, wenn $a = b$ gilt.

a) Zeichne eine gleichseitige Hyperbel mit $M(0|0)$ und $a = 2$. Berechne e und den Krümmungskreis-Radius r und gib die Gleichungen der Asymptoten an.

b) Begründe folgende Konstruktion für die Punkte $(x_0|y_0)$ einer gleichseitigen Hyperbel.



12. Zeichne die Halbachsen und die Lage der Brennpunkte einer Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ (siehe auch Aufgabe 19.).

13. Zeige:
Für den Punkt $P(e|p)$ über dem Brennpunkt von Ellipse (Mittelpunkt $M(0|0)$, Querformat) oder Hyperbel gilt

$$p = \frac{b^2}{a}$$

p heißt **Formparameter**. p ist auch der Radius der Krümmungskreise.

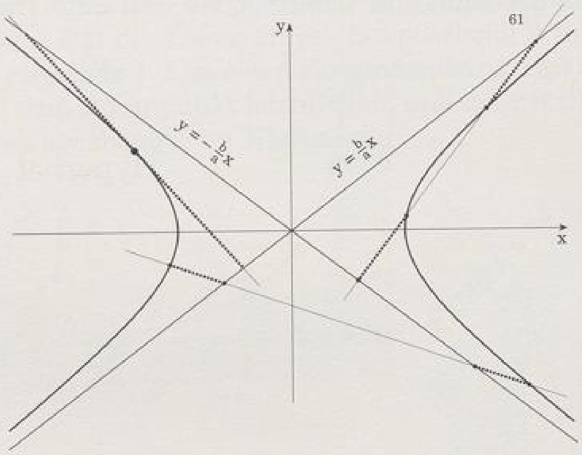
14. Gegeben sind die Hyperbel h: $4x^2 - 9y^2 = 16^2$ und die Gerade g: $y = 2x - 24$.

a) Berechne die Schnittpunkte A und B der Gerade und der Hyperbel.

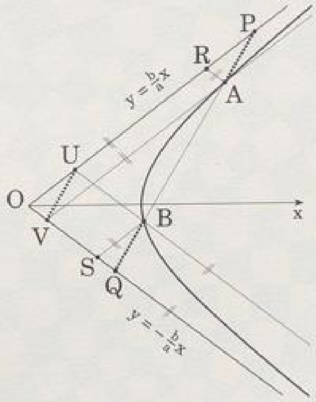
b) Berechne die Schnittpunkte P und Q der Gerade und der Hyperbel-Asymptoten.

•c) Berechne den Mittelpunkt M_{AB} von [AB] und M_{PQ} von [PQ]. Folgerung?

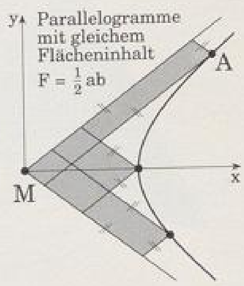
15. Gegeben sind die Hyperbel h: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ und die Gerade g: $y = mx + t$. A und B seien die Schnittpunkte von g und h, P und Q seien die Schnittpunkte von g und den Hyperbel-Asymptoten. Berechne die x-Werte der Mittelpunkte von [AB] und [PQ] – VIETA erspart viel Rechnerei! – und begründe damit den Satz: Bei jeder Hyperbel-Sekante sind die beiden Abschnitte zwischen Hyperbel und Asymptote gleich lang.



16. A und B seien Punkte der Hyperbel h: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
Zeige mit Hilfe des Satzes der vorigen Aufgabe: Die Parallelogramme OVAR und OSBU sind flächengleich.
Folgere dazu zunächst aus dem Satz der vorigen Aufgabe, dass die Strecken [AB], [BQ] und [UV] gleich lang und parallel sind.

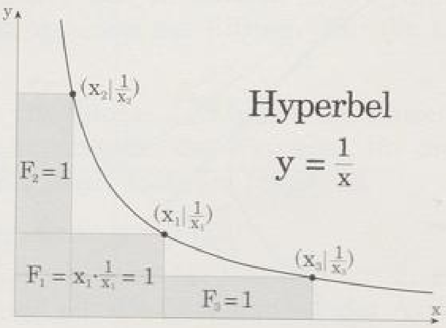


17. 1. Flächensatz
Zeige:
Zeichnet man durch einen Hyperbelpunkt A die Parallelen zu den Asymptoten, so entsteht ein Parallelogramm mit den Gegenecken A und M (Mittelpunkt der Hyperbel). Dieses Parallelogramm hat für jeden Hyperbelpunkt den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ ab.



18. Umkehrung des 1. Flächensatzes
Zeige:
Vom 1. Flächensatz gilt auch die Umkehrung:
Zeichnet man in einen Winkel flächengleiche Parallelogramme, bei denen eine Ecke im Scheitel liegt und die Seiten parallel zu den Schenkeln sind, dann liegen die freien Ecken auf einem Hyperbelast.

19. Zeige: Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel. Was sind ihre Asymptoten?
(Tip: **17.** und **18.**)



20. 2. Flächensatz
Zeige:
Jede Hyperbel-Tangente und die Asymptoten schließen ein Dreieck vom Flächeninhalt $a \cdot b$ ein.