Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

2. Das Einsetzverfahren

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

2. Das Einsetzverfahren

ist der naheliegendste Weg, ein Gleichungssystem zu lösen: Man löst **eine** Gleichung nach **einer** Unbekannten auf und ersetzt diese Unbekannte in **allen andern** Gleichungen durch den gefundenen Term. Das wiederholt man immer wieder. Wir führen das Einsetzverfahren zunächst an einigen 3,3-Systemen vor; wir haben sie so ausgewählt, daß die wichtigsten Fälle vorkommen.

Inhomogene Gleichungssysteme

Genau eine Lösung

$$
\begin{array}{rl}
\text{I} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\
\text{II} & x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -x_2 - 5x_3} \text{ in I und III} \\
\text{III} & -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\
\hline
\text{in I} & 2(-x_2 - 5x_3) - 3x_2 + x_3 = -1 \\
\text{in III} & -(-x_2 - 5x_3) + 2x_2 - x_3 = 2 \\
\text{I'} & -5x_2 - 9x_3 = -1 \\
\text{III'} & 3x_2 + 4x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -\frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}} \text{ in I'} \\
\hline
\text{in I'} & -5(-\frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}) - 9x_3 = -1 \\
 & 20x_3 - 10 - 27x_3 = -3 \\
\text{I''} & -7x_3 = 7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_3 = -1} \text{ in III' und II} \\
\hline
 & \mathbf{x_3 = -1} \\
\text{in III'} & \mathbf{x_2 = 2} \\
\text{in II} & \mathbf{x_1 = 3}
\end{array}
\qquad \textbf{Lösung:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

Beim Einsetzverfahren geht es nur darum, Gleichungen umzuformen und Terme einzusetzen. Es kommen keine gefährlichen Umformungen vor wie Quadrieren und Multiplizieren beziehungsweise Dividieren durch Terme, die null werden könnten. So ist sichergestellt, daß weder Lösungen verloren gehen noch sich Scheinlösungen einschleichen. Allerdings muß man darauf achten, daß die Anzahl der aktuellen Gleichungen nach jedem Rechenschritt dieselbe ist. In unserm Schema heben wir die zum Einsetzen reife Gleichung mit einem Rahmen hervor. Aktuell sind dann jeweils die Gleichungen unterm Strich und die eingerahmten.

Keine Lösung

$$
\begin{array}{rl}
\text{I} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\
\text{II} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3} \text{ in I und III} \\
\text{III} & 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 5 \\
\hline
\text{I'} & -7x_2 - 7x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -\frac{2}{7} - x_3} \text{ in III'} \\
\text{III'} & -14x_2 - 14x_3 = 2 \\
\hline
\text{III''} & 0 = -2 \quad ↯ \quad \textbf{keine Lösung!}
\end{array}
$$

III'' ist eine widersprüchliche Gleichung. Wenn ein Widerspruch auftaucht, dann muß irgendwo eine Annahme stecken. Tatsächlich beruht das Lösungsverfahren auf der

Annahme, daß das Gleichungssystem mindestens eine Lösung $(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ hat, die alle Gleichungen erfüllt. Stößt man beim Rechnen irgendwo auf einen Widerspruch, dann erweist sich die Annahme als falsch, das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{rrcl}
\text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 6 - 2x_2 + 3x_3} \\
\text{II} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 2 \\
\text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 14 \\
\hline
\text{II'} & -5x_2 + 10x_3 & = & -10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 2 + 2x_3} \\
\text{III'} & -5x_2 + 10x_3 & = & -10 \\
\hline
\text{III''} & -10 - 10x_3 + 10x_3 & = & -10 \\
 & 0 & = & 0
\end{array}$$

Die aktuellen Gleichungen reichen nicht aus, um die Unbekannten eindeutig zu bestimmen. Wenn x_3 bekannt wäre, dann ließen sich die dazu passenden Werte für x_2 und x_1 berechnen. So findet man zum Beispiel für $x_3 = -1$ die Lösung $(3 \mid 0 \mid -1)$ und für $x_3 = 0$ die Lösung $(2 \mid 2 \mid 0)$. Weil x_3 frei wählbar ist, gibt es unendlich viele Lösungen (abhängig von x_3). Eine frei wählbare Größe heißt auch freier **Parameter**. Man bezeichnet Parameter mit einem kleinen griechischen, manchmal auch lateinischen Buchstaben. Setzt man $x_3 = \lambda$, dann bekommt man durch Einsetzen in die eingerahmten Gleichungen

$$x_2 = 2 + 2\lambda \text{ und } x_1 = 2 - \lambda \text{ oder } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Weil die Lösungsmenge genau **einen** freien Parameter enthält, sagt man, daß das System **∞^1 Lösungen** hat (sprich: unendlich hoch eins). Zur besseren Übersicht trennt man in der Lösung den konstanten Teil vom parameterabhängigen Teil und schreibt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ 0 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{(zeilenweise Addition)}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Parameter abspalten)}$$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \boxed{1}$$

Die Darstellung der Lösungsmenge ist nicht eindeutig, sie hängt ab vom Lösungsweg. Das letzte Gleichungssystem jetzt anders gelöst:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 6 \\
\text{II} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 2x_1 + 4x_3 - 2} \\
\text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 14 \\
\hline
\text{I'} & 5x_1 \qquad + 5x_3 & = & 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_3 = 2 - x_1} \\
\text{III'} & 10x_1 \qquad + 10x_3 & = & 20 \\
\hline
\text{III''} & 0 & = & 0
\end{array}$$

Nun ist x_1 die einzige Unbekannte, die nicht links vorkommt; deshalb ernennen wir sie zum freien Parameter μ. Wir setzen $x_1 = \mu$ und bekommen durch Einsetzen in die eingerahmten Gleichungen

$$x_3 = 2-\mu \text{ und } x_2 = 6-2\mu \text{ oder } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 6-2\mu \\ 2-\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \qquad \boxed{2}$$

Bei Wahl von x_2 als freien Parameter hätte sich ergeben

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \ \sigma \in \mathbb{R} \qquad \boxed{3}$$

Ein Vergleich von $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ und $\boxed{3}$ zeigt, daß sich die Anteile beim Parameter nur in einem Faktor unterscheiden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1/2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die konstanten Anteile – das sind die Lösungen, die jeweils zum Parameterwert 0 gehören – zeigen keinerlei Ähnlichkeit. Trotzdem sind die drei Darstellungen gleichwertig, denn jedes Lösungstripel ist in jeder Darstellung enthalten: In $\boxed{3}$ liefert $\sigma = 4$ das Tripel $(1|4|1)$, dasselbe Tripel ergibt sich für $\mu = 1$ in $\boxed{2}$ beziehungsweise für $\lambda = 1$ in $\boxed{1}$.

Es gibt auch Gleichungssysteme, deren Lösungsmengen mehr als einen Parameter enthalten. Dazu ein Beispiel:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 0{,}5x_1 - 4x_2 + 0{,}5x_3 & = & 3 \\
\text{II} & -x_1 + 8x_2 - x_3 & = & -6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 8x_2 - x_3 + 6} \\
\text{III} & 0{,}25x_1 - 2x_2 + 0{,}25x_3 & = & 1{,}5 \\
\hline
\text{I'} & 0 & = & 0 \\
\text{III'} & 0 & = & 0
\end{array}$$

x_2 und x_3 sind frei wählbar und werden deshalb zu Parametern ernannt:

$$x_2 = \lambda \text{ und } x_3 = \mu$$

$$\text{in II} \quad x_1 = 6 + 8\lambda - \mu$$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Weil hier **zwei** freie Parameter vorkommen, spricht man von ∞^2 **Lösungen**. Auch hier sind andere Darstellungen der Lösungsmenge möglich. Hätte man zum Beispiel Gleichung II nach x_3 aufgelöst, dann wären x_1 und x_2 die freien Parameter:

$$\begin{array}{ll} \text{II} & \Rightarrow \boxed{x_3 = 6 - x_1 + 8x_2} \\ \hline \text{I}' & 0 = 0 \\ \text{III}' & 0 = 0 \end{array}$$

$x_1 = \sigma$ und $x_2 = \tau$

in II $\quad x_3 = 6 - \sigma + 8\tau$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \sigma, \tau \in \mathbb{R}$$

Homogene Gleichungssysteme

Wie verändern sich die Lösungen, wenn man die rechten Seiten der Gleichungen null setzt, das heißt, zu homogenen Systemen übergeht ? Wir rollen die Sache von hinten auf und untersuchen zuerst inhomogene Systeme mit unendlich vielen Lösungen. Das homogene System, das zum inhomogenen System mit ∞^1 Lösungen (Seite 17) gehört, lautet:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -2x_2 + 3x_3} \\ \text{II} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ \hline \text{II}' & -5x_2 + 10x_3 & = & 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2x_3} \\ \text{III}' & -5x_2 + 10x_3 & = & 0 \\ \hline \text{III}'' & 0 & = & 0 \end{array}$$

$x_3 = \lambda$ (freier Parameter, es gibt ∞^1 Lösungen) $\Rightarrow x_2 = 2\lambda$ und $x_1 = -\lambda$,

zusammengefaßt zur **Lösung:** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$ oder

(andrer Lösungsweg): **Lösung:** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$

Auch das homogene System hat ∞^1 Lösungen.

Nun zum System mit den ∞^2 Lösungen. Das zugehörige homogene System ist:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 0{,}5x_1 - 4x_2 + 0{,}5x_3 & = & 0 \\ \text{II} & -x_1 + 8x_2 - x_3 & = & 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 8x_2 - x_3} \\ \text{III} & 0{,}25x_1 - 2x_2 + 0{,}25x_3 & = & 0 \\ \hline \text{I}' & 0 & = & 0 \\ \text{III}' & 0 & = & 0 \end{array}$$

$x_2 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ (zwei freie Parameter, also ∞^2 Lösungen)

in II $\quad x_1 = 8\lambda - \mu$

$$\textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Es fällt auf:

– der konstante Anteil ist $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (wird deshalb meistens weggelassen)

– die Lösung des homogenen Systems ist gerade der parameterabhängige Anteil der Lösung des inhomogenen Systems.

Diese Übereinstimmung verwundert nicht: An der Variablenrechnung hat sich nichts geändert, und die Konstanten der rechten Seite sind alle gleich null. Der Parameteranteil wird allein von der Variablenrechnung festgelegt.

Jetzt behandeln wir das Beispiel, das im inhomogenen Fall keine Lösung hat.

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\
\text{II} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -2x_2 - 3x_3} \\
\text{III} & 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 0 \\
\hline
\text{I'} & -7x_2 - 7x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -x_3} \\
\text{III'} & -14x_2 - 14x_3 = 0 \\
\hline
\text{III''} & 0 = 0
\end{array}$$

$$x_3 = \lambda\,,\ x_2 = -\lambda\,,\ x_1 = -\lambda \qquad \textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Obwohl das inhomogene System keine Lösung hat, gibt es beim homogenen System Lösungen (sogar unendlich viele!). Das sollte uns eigentlich nicht überraschen, denn jedes homogene System hat zumindest die Lösung, bei der alle Unbekannten gleich null sind. Diese Lösung heißt auch **triviale Lösung***. Ein homogenes System kann also nie unlösbar sein, die triviale Lösung gibts garantiert.

Zum Schluß rechnen wir das Beispiel, das im inhomogenen Fall genau eine Lösung hat.

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 3x_2 - 2x_1} \\
\text{II} & x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\
\text{III} & -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\
\hline
\text{II'} & -9x_1 + 16x_2 = 0 \\
\text{III'} & x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = x_1} \\
\hline
\text{II'} & 7x_1 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & x_1 = 0 \\
\text{in III'} & x_2 = 0 \\
\text{in I} & x_3 = 0
\end{array} \qquad \textbf{Lösung:} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ (triviale Lösung)}$$

Auch das homogene System hat genau eine Lösung, und die muß dann die triviale sein.

* trivial = selbstverständlich
Als Trivium (=Dreiweg) bezeichnete man die ersten drei Fächer der sieben *Artes Liberales*, die in den Klosterschulen des Mittelalters als elementare Vorstufe des Studiums gelehrt wurden: Grammatik, Dialektik und Rhetorik. Danach folgte das anspruchsvollere Quadrivium (=Vierweg) mit: Arithmetik, Geometrie Astronomie und Musik. Deswegen nennt man besonders einfache Dinge auch trivial.

Das Einsetzverfahren funktioniert freilich auch bei 4,4-Systemen, 5,5-Systemen usw. Auch hier sind genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen möglich. Die Anzahl der freien Parameter kann entsprechend der Anzahl der Unbekannten steigen. Das Einsetzverfahren führt auch dann zum Ziel, wenn die Anzahl der Gleichungen nicht übereinstimmt mit der Anzahl der Unbekannten. Dazu zwei Beispiele:

4,2-System

$$
\begin{array}{llcrcrl}
\text{I} & 2x_1 & - & x_2 & = & 5 & \qquad \boxed{x_2 = 2x_1 - 5} \\
\text{II} & -3x_1 & + & 2x_2 & = & -8 & \\
\text{III} & x_1 & + & 3x_2 & = & -1 & \\
\text{IV} & 4x_1 & + & 3x_2 & = & 4 & \\
\hline
\text{II}' & x_1 & & & = & 2 & \qquad \boxed{x_1 = 2} \\
\text{III}' & 7x_1 & & & = & 14 & \\
\text{IV}' & 10x_1 & & & = & 19 & \\
\hline
\text{III}'' & & & 14 & = & 14 & \\
\text{IV}'' & & & 20 & = & 19 & \quad ⚡ \quad \text{Das System hat keine Lösung.}
\end{array}
$$

Wie das Beispiel zeigt, genügt es nicht, aus dem System einige Gleichungen herauszupicken und daraus »Lösungen« zu produzieren (die ersten beiden Gleichungen würden zur »Lösung« $(2\,|\,-1)$ führen). Weil **alle** Gleichungen erfüllt sein müssen, muß man die »Lösung« an den restlichen Gleichungen überprüfen ($(2\,|\,-1)$ löst zwar noch die dritte, aber nicht mehr die vierte Gleichung).

2,4-System

$$
\begin{array}{lcrcrcrcrl}
\text{I} & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\
\text{II} & x_1 & & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -5 \qquad \boxed{x_1 = 2x_4 - x_3 - 5} \\
\hline
\text{I}' & & & 3x_2 & & & + & 3x_4 & = & 9 \qquad \boxed{x_4 = -x_2 + 3}
\end{array}
$$

Weil x_2 und x_3 nicht links vorkommen, wählen wir sie als freie Parameter $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$. Einsetzen in die eingerahmten Gleichungen liefert $x_4 = 3 - \lambda$ und $x_1 = 1 - 2\lambda - \mu$.

Lösung: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Systeme mit mehr Gleichungen als Unbekannten heißen auch **überbestimmte Systeme**. Normalerweise haben sie keine Lösung.
Systeme mit weniger Gleichungen als Unbekannten heißen **unterbestimmte Systeme**. Normalerweise haben sie unendlich viele Lösungen.

Man kann zeigen: Enthält das System keinen Widerspruch, dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der}\\ \text{Unbekannten}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der}\\ \text{Gleichungen}\end{array}} \leq \boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der}\\ \text{freien Parameter}\end{array}}$$

Aufgaben

1. Löse die Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -19x_1 - x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{2}{5}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. Löse die Gleichungssysteme und die zugehörigen homogenen Systeme:

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 &= 16 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 17x_3 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 8 \\ -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= -12 \end{aligned}$$

• **3.** Einfach – aber nicht leicht (jedes System ist ein 3,3-System!)

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= -2 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ 8x_3 &= 4 \\ 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 6x_3 &= 8 \\ -6x_1 - 9x_3 &= -12 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + 8x_3 &= 7 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= x_1 \end{aligned}$$

4. Kleine Ursache – große Wirkung

a) $\begin{aligned} 2{,}01x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 1{,}99x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2{,}01x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 1{,}99x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$

• **5.** Bestimme die Parameter so, daß das System die angegebene Lösung hat:

a) $\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + x_3 &= -4 \\ bx_1 - 3x_2 + x_3 &= -5 \\ 6x_1 - x_2 + cx_3 &= 3a \end{aligned}$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 6x_1 + ax_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

Das System hat ∞^1 Lösungen.

6. Parabeln durch gegebene Punkte
Bestimme die Koeffizienten von $y = ax^2 + bx + c$ so, daß die zugehörige Parabel durch die angegebenen Punkte geht.

a) $P(1 \mid 1)$ $Q(-2 \mid -2)$ $R(3 \mid -7)$ b) $S(0 \mid -3)$ $T(1 \mid -1)$ $U(2 \mid 3)$

c) $I(1 \mid 1)$ $J(-1 \mid -1)$ $K(2 \mid 14)$ d) $E(1 \mid 1)$ $F(2 \mid 3)$ $G(-1 \mid -3)$

e) $U(1 \mid 0)$ $V(0 \mid 1)$ f) $W(1 \mid 2)$

7. Bestimme die Lösungen der 4,4-Systeme

a) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -4 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 9 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_2 + 5x_3 &= 21 \\ 3x_1 - 4x_4 &= -13 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= 4 \end{aligned}$

8. Überbestimmte Systeme

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -5 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 11 \\ 4x_1 - x_2 &= -13 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

• e) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 &= -2 \end{aligned}$

9. Unterbestimmte Systeme

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -2x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

d) $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

e) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$

** 3 . Mathematischer Hintergrund

Zwischen den Lösungen eines inhomogenen und des zugehörigen homogenen Systems besteht ein einfacher Zusammenhang. Sind $(u_1 | u_2 | \ldots | u_n)$ und $(v_1 | v_2 | \ldots | v_n)$ zwei Lösungen eines inhomogenen m,n-Systems, dann ist $(u_1 - v_1 | u_2 - v_2 | \ldots | u_n - v_n)$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Das sieht man sofort ein, wenn man die i-ten Gleichungen des inhomogenen Systems nach dem Einsetzen voneinander subtrahiert

$$\begin{aligned} & a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + \ldots + a_{in} u_n = b_i \\ & \underline{a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \ldots + a_{in} v_n = b_i} \\ \Rightarrow \quad & a_{i1}(u_1 - v_1) + a_{i2}(u_2 - v_2) + \ldots + a_{in}(u_n - v_n) = 0 \end{aligned}$$

Das ist die i-te Gleichung des zugehörigen homogenen Systems. Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems ist also eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Folglich ist **jede** Lösung des inhomogenen Systems darstellbar als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und einer Lösung des homogenen Systems. Es kommen sogar **alle** Lösungen des homogenen Systems vor, es gilt nämlich:

Alle Lösungen des homogenen Systems ergeben sich als Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems.