Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

6. Eigenschaften von Determinanten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

11. Nimm x_3 als freien Parameter λ und löse mit der Cramer-Regel

a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 21x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 21x_3 &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 11x_3 &= 0 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

12. Löse mit der Cramer-Regel $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$

und nimm **a)** x_3 als freien Parameter λ

b) x_2 als freien Parameter μ

c) x_1 als freien Parameter ν

13. Löse mit der Cramer-Regel

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 9x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 4 \end{aligned}$

**6. Eigenschaften von Determinanten

Von den Determinanten brauchen wir später hauptsächlich die 3-reihigen. Deshalb stellen wir einige Sätze für sie vor. Berechnet man die 3-reihige Determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ allgemein, so ergibt sich ein Aggregat von sechs Produkten: $D = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$. Der deutsche Philosoph und Mathematiker Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (Leipzig 1.7.1646 bis 14.11.1716 Hannover) hat n-reihige Determinanten als Aggregate von n-fachen Produkten definiert. Ihm zu Ehren nennen wir ein solches Aggregat die **Leibniz-Form** der Determinante. $aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$ ist also die Leibniz-Form der 3-reihigen Determinante.

Für 3-reihige Determinanten hat der französische Mathematiker Pierre F. SARRUS eine Merkregel formuliert, sie heißt **Sarrus-Regel** oder auch **Jägerzaunregel**. Mit ihr findet man schnell die sechs Produkte und ihre Vorzeichen: Man schreibt die ersten beiden Spalten als 4. und 5. Spalte nochmal und multipliziert längs der Pfeile. Die »Abwärtsprodukte« zählen positiv, die »Aufwärtsprodukte« negativ:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & \text{gec} \ \text{hfa} & \text{idb} \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ - & - & - & \text{aei} \ \text{bfg} & \text{cdh} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \\ \\ \\ \end{array}$$

Beispiel: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 1\cdot3\cdot2 + 2\cdot1\cdot3 + 3\cdot2\cdot1 - 3\cdot3\cdot3 - 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot2\cdot2 = -18$

(Die Sarrus-Regel gilt **nur** für dreireihige Determinanten!)

Aus der Leibniz-Form kann man einige Determinantensätze leicht ableiten:

$\boxed{1}$ **Vertauscht man in einer Determinante die Zeilen mit den Spalten, so ändert die Determinante ihren Wert nicht.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

Zum Beweis berechnen wir die Leibniz-Form der rechten Determinante:
aei + dhc + gbf – ceg – fha – ibd.
Sie stimmt mit der Leibniz-Form der linken Determinante überein.
Nach diesem Satz sind in allen Determinanten Spalten und Zeilen gleichberechtigt.
Deshalb verwenden wir von jetzt an den Oberbegriff **Reihe**.

$\boxed{2}$ **Ersetzt man eine Reihe durch ihr k-faches, so ist der Wert der neuen Determinante k-mal so groß wie der Wert der alten Determinante.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Zum Beweis überlegt man sich mit der Sarrus-Regel, daß der Faktor k in jedem Produkt genau einmal vorkommt (und deswegen ausgeklammert werden kann).

$\boxed{3}$ **Eine Nullreihe macht die Determinante zu null.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$ Zum Beweis setze man in Satz $\boxed{2}$ $k = 0$.

$\boxed{4}$ **Vertauscht man zwei parallele Reihen, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.**

Beispiel: $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Zum Beweis berechnet man die linke Seite:
dbi + ecg + fah – gbf – hcd – iae = – (aei + bfg + cdh – gec – hfa – idb)

$\boxed{5}$ **Sind zwei parallele Reihen zueinander proportional, so hat die Determinante den Wert null.**

Beispiel: $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$ Beweis: $D = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -k\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -D$

(Vertauschen von 1. und 2. Zeile)

Aus $D = -D$ folgt $D = 0$.

$\boxed{6}$ **Besteht eine Reihe aus Summen, so läßt sich die Determinante als Summe zweier Determinanten schreiben.**

Beispiel: $$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Zum Beweis überlegt man sich mit der Sarrus-Regel, daß in jedem Produkt genau eine Summe vorkommt. Das Distributivgesetz bestätigt die Behauptung.

$\boxed{7}$ **Addiert man zu einer Reihe ein Vielfaches einer andern parallelen Reihe, so ändert die Determinante ihren Wert nicht.**

Beispiel: $$\begin{vmatrix} a+kb & b & c \\ d+ke & e & f \\ g+kh & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Beweis: $$\begin{vmatrix} a+kb & b & c \\ d+ke & e & f \\ g+kh & h & i \end{vmatrix} = (\text{Satz } \boxed{6}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb & b & c \\ ke & e & f \\ kh & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix},$$

denn nach Satz $\boxed{5}$ ist $\begin{vmatrix} kb & b & c \\ ke & e & f \\ kh & h & i \end{vmatrix} = 0.$

Mit Satz $\boxed{7}$ lassen sich Determinanten wesentlich einfacher berechnen als mit dem Unterdeterminanten-Verfahren. Wie beim Gauß-Algorithmus bringt man durch Addition geeigneter Reihen-Vielfacher die Determinante auf Dreieckform.

Beispiel: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -18$$

Der Wert einer Determinante ergibt sich aus der Dreieckform, wenn man alle Zahlen der **Hauptdiagonale** (von links oben nach rechts unten) multipliziert. Das gilt auch für n-reihige Determinanten.

Beispiel: $$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-4) = -24$$

Auch die Sätze $\boxed{1}$ bis $\boxed{7}$ gelten für n-reihige Determinanten.
Wir verzichten auf die Beweise, weil wir die Sätze für $n > 3$ nicht brauchen.

Zum Abschluß verallgemeinern wir das Verfahren der Entwicklung einer Determinante. Wie man leicht nachrechnet, läßt sich eine Determinante nach jeder Reihe entwickeln, wenn man die Unterdeterminante nach dem Verfahren von Seite 36 durch Streichen der jeweiligen Zeilen und Spalten erzeugt und mit dem Vorzeichen versieht, das sich aus dem Schema (rechts) ergibt:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Beliebt sind Reihen mit möglichst vielen Nullen.
So wird man die folgende Determinante nach der 2. Zeile entwickeln:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +4 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4(5+21) = 104$$

Entwickeln nach der 3. Zeile dauert etwas länger:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot(-28) + 0 + 5\cdot 4 = 104$$

Aufgaben

1. Berechne ohne zu „rechnen"

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 12 & 5 & -8 \end{vmatrix}$

2. Berechne ohne zu „rechnen"

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. Begründe mit den Determinantensätzen

a) $\begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ u & v & u+v+w \\ x & y & x+y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+b & a-b & c \\ u+v & u-v & w \\ x+y & x-y & z \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+tb & ta+b & c \\ u+tv & tu+v & w \\ x+ty & tx+y & z \end{vmatrix} = (1-t^2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$

• **4.** Schreibe als Summe von Determinanten, die keine Summen enthalten

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1+a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & 1 \\ a+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

: **5.** Addiere ein Vielfaches einer Reihe zu einer andern parallelen Reihe und zeige (rechtzeitig ausklammern!):

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ [Vandermonde-Determinante, nach ALEXANDRE THÈOPHILE VANDERMONDE (1735 bis 1796)]