Anschauliche analytische Geometrie

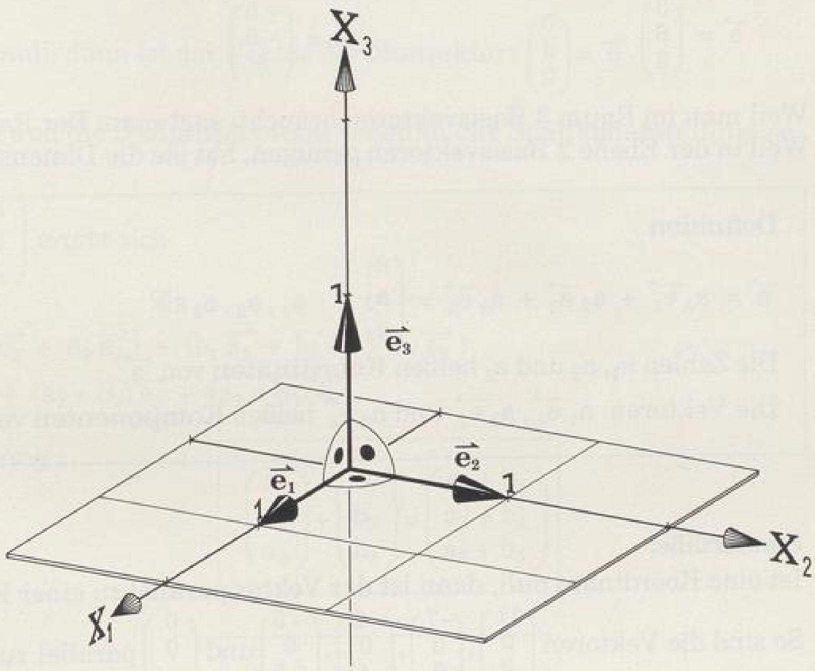
Barth, Elisabeth

München, 2000

1. Vektorrechnung mit Koordinaten

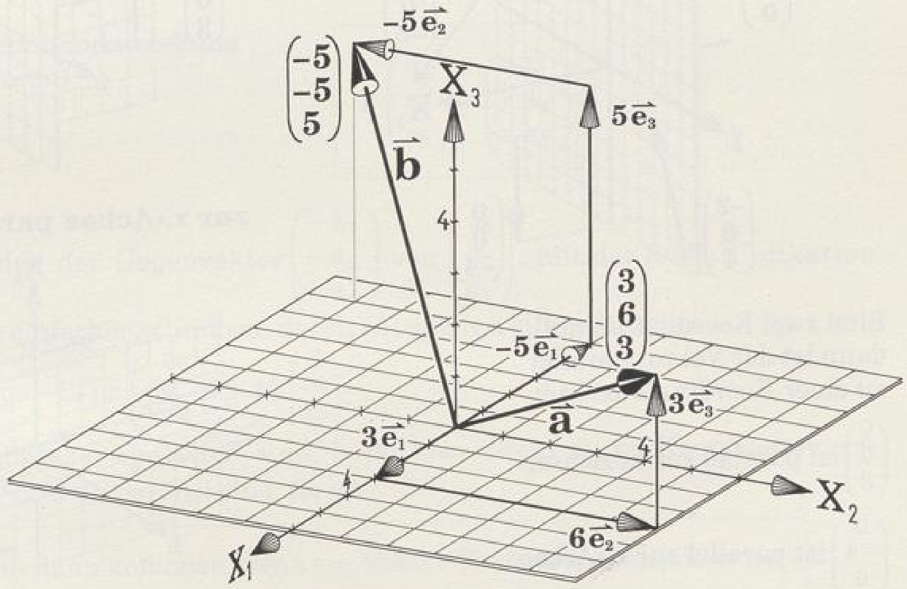
1. Vektorrechnung mit Koordinaten

Man zeichnet im Koordinatensystem drei Vektoren als **Basis** aus:



$\overrightarrow{e_1}$ ist der Vektor der Länge 1 in Richtung der x_1-Achse, entsprechend definiert man $\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{e_3}$. Die Vektoren $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{e_3}$ heißen **Basisvektoren**. Jeder Vektor des Raums läßt sich eindeutig darstellen als Summe von Vielfachen dieser Basisvektoren, zum Beispiel

$\vec{a} = 3\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$ $\qquad$ $\vec{b} = -5\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$



$\vec{a}$ ist also durch die Zahlen 3, 6 und 3 festgelegt, $\vec{b}$ durch -5, -5 und 5. Statt der Summendarstellung verwenden wir von jetzt an die praktischere Spaltendarstellung und schreiben kurz

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

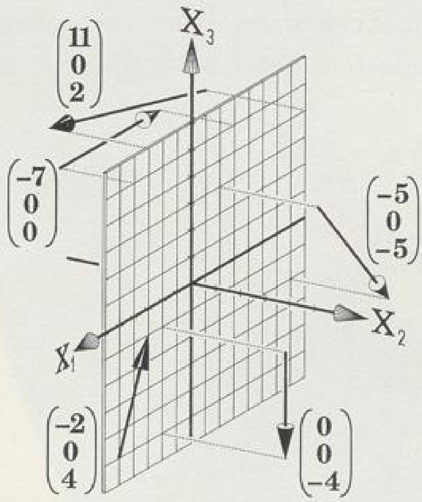
Weil man im Raum 3 Basisvektoren braucht, sagt man: Der Raum hat die **Dimension 3**. Weil in der Ebene 2 Basisvektoren genügen, hat sie die Dimension 2 .

> **Definition**
>
> $$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} =: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$
>
> Die Zahlen a_1, a_2 und a_3 heißen **Koordinaten** von $\vec{a}$.
>
> Die Vektoren $a_1\vec{e_1}$, $a_2\vec{e_2}$ und $a_3\vec{e_3}$ heißen **Komponenten** von $\vec{a}$.

Sonderfälle:

Ist eine Koordinate null, dann ist der Vektor parallel zu einer Koordinatenebene.

So sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ parallel zur x_1x_3-Ebene.

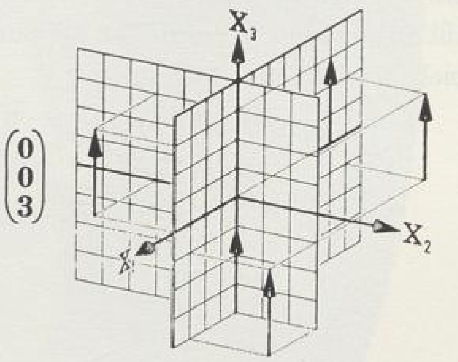


Sind zwei Koordinaten null, dann ist der Vektor parallel zu einer Koordinatenachse:

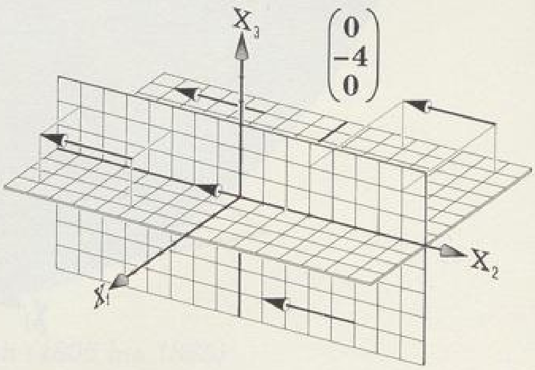
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_3-Achse,

$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_2-Achse.

zur x_3-Achse paralleler Vektor



zur x_2-Achse paralleler Vektor



Diese Vektoren sind auch parallel zu zwei Koordinatenebenen:

$\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ ist parallel zur x_1x_3- und x_2x_3-Ebene, $\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ ist parallel zur x_1x_2- und x_2x_3-Ebene.

Sind alle drei Koordinaten null, dann ist der Vektor der Nullvektor: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{o}$

Die Addition von Vektoren und die S-Multiplikation sehen in der Spaltendarstellung so aus:

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) + (b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}) \\ &= (a_1+b_1)\vec{e_1} + (a_2+b_2)\vec{e_2} + (a_3+b_3)\vec{e_3}\end{aligned}$$

Addition in Spaltendarstellung
(zeilenweise addieren)

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}}$$

Auch die Subtraktion geht zeilenweise:

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}}$$

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $r \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$r \cdot \vec{a} = r(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) = (ra_1)\vec{e_1} + (ra_2)\vec{e_2} + (ra_3)\vec{e_3}$$

S-Multiplikation in Spaltendarstellung
(jede Zeile multiplizieren)

$$\boxed{r \cdot \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cdot a_1\\r\cdot a_2\\r\cdot a_3\end{pmatrix}}$$

Für $r = -1$ ergibt sich der Gegenvektor $\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$. Mit der S-Multiplikation lassen sich Vektoren einfacher schreiben, durch »Abspalten eines Faktors«.

Beispiel: Abspalten von -12 in $\begin{pmatrix}-36\\24\\-144\end{pmatrix} = -12\begin{pmatrix}3\\-2\\12\end{pmatrix}$

Weil $\vec{a}$ und $r\vec{a}$ kollinear (=parallel) sind, kann man allein durch Koordinatenvergleich erkennen, ob Vektoren parallel sind. Es gilt:

> $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann kollinear, wenn ein Vektor Vielfaches des andern ist.

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{a} = \mu \vec{b}, & \mu \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \\ \vec{b} = \lambda \vec{a}, & \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind kollinear.}$$

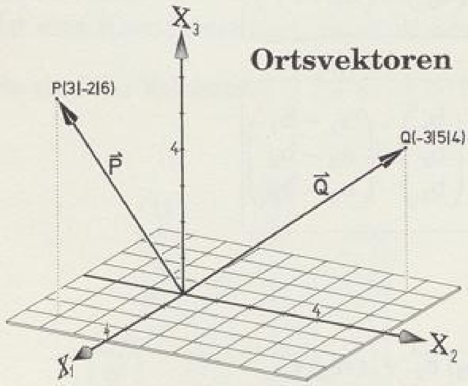
Nach dieser Festlegung ist übrigens der Nullvektor kollinear zu jedem Vektor!

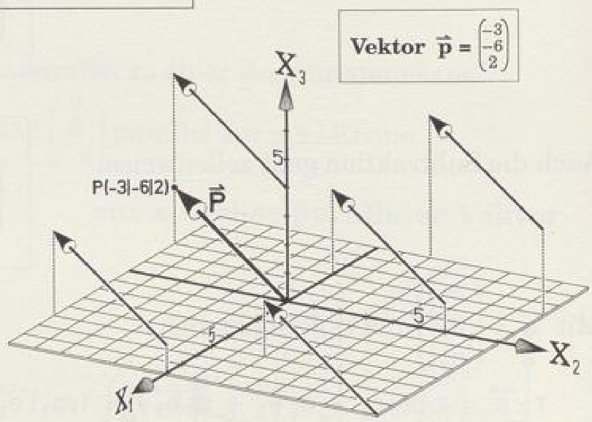
Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix}$ sind kollinear, denn $\vec{b} = -4\,\vec{a}$.

Ortsvektoren

Zu jedem Punkt gibt es einen Pfeil, der im Ursprung beginnt und in P endet. Dieser Pfeil legt eindeutig einen Vektor $\overrightarrow{OP}$ fest. Wir nennen ihn **Ortsvektor** des Punkts P und bezeichnen ihn kurz mit $\vec{P}$. Die Vektorkoordinaten von $\vec{P}$ stimmen mit den Punktkoordinaten von P überein.

$$\boxed{\text{Zu } P(p_1 \mid p_2 \mid p_3) \text{ gehört } \vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ und umgekehrt.}}$$



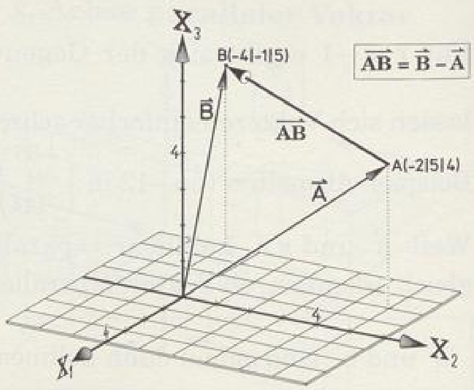


Jeder Vektor kann auch die Rolle eines Ortsvektors spielen und einen Punkt festlegen: Dieser Punkt ist der Endpunkt desjenigen Repräsentanten, der im Ursprung ansetzt.

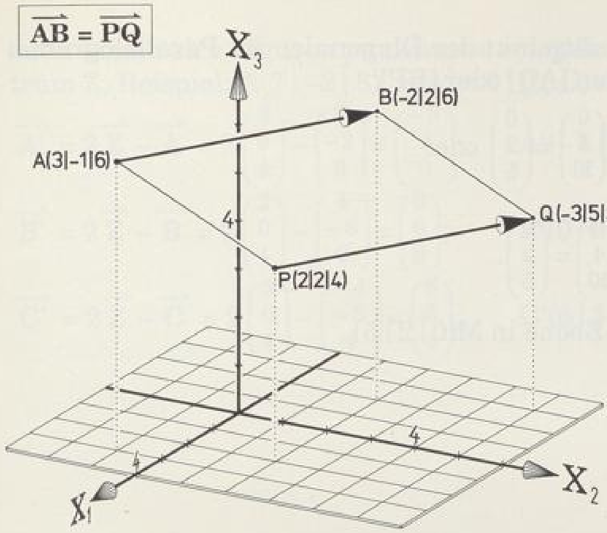
Jeder Vektor ist durch zwei Punkte festgelegt. Deshalb müssen sich seine Koordinaten aus den Koordinaten der Punkte berechnen lassen.

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = -\vec{A} + \vec{B}$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}}$$



$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}}$



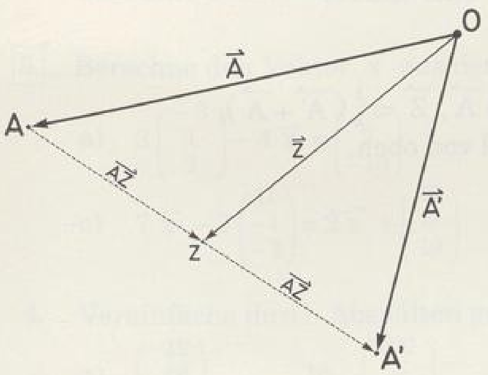
In einem Beispiel berechnen wir Verbindungsvektoren der Punkte A(3 | –1 | 6), B(–2 | 2 | 6) , P(2 | 2 | 4) und Q(–3 | 5 | 4) und beschreiben damit die Lage dieser Punkte.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{AB} \neq \mu\,\overrightarrow{BP}$ ($\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BP}$ sind nicht parallel) ist PQBA ein Parallelogramm. Weil die dritten Koordinaten von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ}$ null sind, liegen die Seiten [PQ] und [AB] parallel zur x_1x_2-Ebene. Weil die zweite Koordinate von $\overrightarrow{BP}$ null ist, liegt die Diagonale [BP] parallel zur x_1x_3-Ebene.

Sehr oft braucht man den Mittelpunkt einer Strecke:



$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{A} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{A} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{B}$$

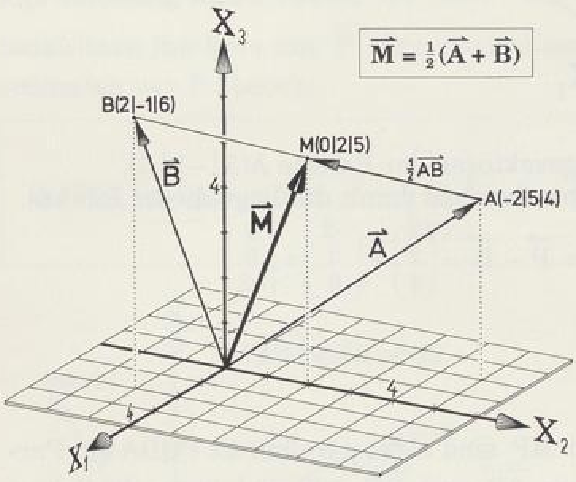
Mittelpunkt M der Strecke [AB]: $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$

Mit dieser Formel berechnen wir den Schnittpunkt der Diagonalen im Parallelogramm PQBA (oben) als Mittelpunkt der Diagonalen [AQ] oder [BP]:

$$\overrightarrow{M} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{Q}) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\overrightarrow{M} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{P}) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

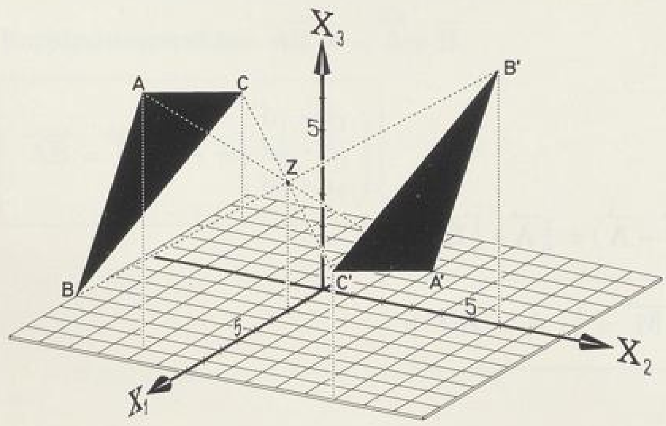
Die Diagonalen schneiden sich in der x_2x_3-Ebene in M(0 | 2 | 5) .



Die Spiegelung eines Punkts an einem Punkt ist mit Ortsvektoren rechnerisch schnell erledigt. Der Punkt A soll am Zentrum Z gespiegelt werden. Gesucht ist der Spiegelpunkt A'. Weil man mit Punkten nicht rechnen kann, verwenden wir ihre Ortsvektoren: $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + 2\,\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{A} + 2(\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{A}) = \mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{Z}} - \overrightarrow{\mathbf{A}}$ oder kürzer

$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{Z} + \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{Z} + \overrightarrow{Z} - \overrightarrow{A} = \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{Z}} - \overrightarrow{\mathbf{A}}$.

Übrigens: Nach $\overrightarrow{Z}$ aufgelöst ergibt sich $2\,\overrightarrow{Z} = \overrightarrow{A'} + \overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{Z} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A'} + \overrightarrow{A})$,
das ist die Strecken-Mittelpunkt-Formel von oben.



Jetzt lassen sich Figuren punktweise spiegeln, zum Beispiel das Dreieck ABC am Zentrum Z. Beispiel: A(7 | −2 | 8), B(4 | − 6 | 0), C(− 4 | − 5 | 4) und Z(2 | 0 | 4).

$\overrightarrow{A'} = 2\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{A} = 2\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$; **A'(−3 | 2 | 0)**

$\overrightarrow{B'} = 2\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{B} = 2\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix}$; **B'(0 | 6 | 8)**

$\overrightarrow{C'} = 2\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{C} = 2\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\-5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\5\\4\end{pmatrix}$; **C'(8 | 5 | 4)**

Aufgaben

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix}10\\0\\-2\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix}4\\-6\\4\end{pmatrix}$. Berechne

a) $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b) $2\vec{u} - 3\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{u} + (\vec{v} - 2\vec{w})$, $\frac{1}{3}[(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}) - 3\vec{v}]$

2. $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix}6\\-1\\-3\end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Berechne den Vektor $\vec{r}$, der $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ zur geschlossenen Vektorkette ergänzt.

3. Berechne den Vektor $\vec{x}$ aus den Vektorgleichungen:

a) $3\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} - 4\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\7\\-10\end{pmatrix}$ **b)** $2\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} + 5\vec{x}$

c) $7\vec{x} - 3\begin{pmatrix}11\\-1\\-3\end{pmatrix} = 2\vec{x} + \begin{pmatrix}17\\18\\19\end{pmatrix}$

4. Vereinfache durch Abspalten geeigneter Faktoren:

a) $\begin{pmatrix}-12\\-18\\-42\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}300\\75\\-225\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-9/4\\3/4\\-3\end{pmatrix}$

5. Gegeben: **a)** A(2 | 2 | 1) , B(3 | 2 | −1) , C(1 | 2 | 3)
b) A(0 | 2 | 4) , B(1 | 8 | 0) , C(2 | 1 | 4)
c) A(0 | 24) , B(18 | 0) , C(21 | 4)

Berechne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$

6. A(3 | 0 | 0) , B(–1 | 4 | 0) , C(0 | –2 | 0) und D(0 | 0 | 3,5) sind die Ecken eines Tetraeders.

a) Berechne die Mittelpunkte U von [AC], V von [BC], W von [BD] und X von [AD].

b) Zeige, daß UVWX ein Parallelogramm ist und berechne den Mittelpunkt M des Parallelogramms.

c) Fertige eine saubere Zeichnung an.

10
5 0 10
4

7. Ein Repräsentant $\overrightarrow{AB}$ eines Vektors wird senkrecht in zwei Koordinatenebenen projiziert. Rekonstruiere $\overrightarrow{AB}$ aus den Projektionen $\overrightarrow{A_iB_i}$ und gib die Projektion in die dritte Koordinatenebene an.

a) $\overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_3B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

8. Die Strecke [AB] mit A(1 | 2 | 3), B(3 | 2 | 1) wird über B hinaus um sich selber verlängert. Berechne den Endpunkt C.

9. R(4 | 5 | 6) und S(7 | 8 | 9) teilen die Strecke [AB] in drei gleiche Teile. Berechne A und B.

10. Ä(0 | 4 | 5) , Ö(3 | 0 | 5) und Ü(3 | 4 | 0) sind die Ecken eines Parallelogramms. Bestimme die vierte Ecke E (drei Lösungen!).

11. Vom Parallelogramm ABCD kennt man B(2 | 4 | 3) und C(3 | 0 | – 5) und den Schnittpunkt der Diagonalen M(–2 | 4 | 15). Berechne A und D.

12. Berechne vom Spat ABCDEFGH mit A(9 | 7 | 5) , B(–1 | –1 | –1) , F(0 | 2 | 3) und G(1 | 3 | 5) die restlichen Ecken.

13. A(1 | – 3 | 5) , B(–7 | 9 | –11) , C(13 | –15 | 17)
M_1, M_2 und M_3 sind die Mitten der Seiten a, b und c des Dreiecks ABC.
Berechne $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$ und $\overrightarrow{CM_3}$.

14. Berechne $\vec{X}$ in Abhängigkeit von $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ so, daß gilt:
$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{CX} = \vec{o}$.

15. A(2 | 0 | 0) , Z_1(1 | 2 | 1) , Z_2(1 | 3 | 3) . A' ist das Bild von A bei Spiegelung an Z_1, A'' ist das Bild von A' bei Spiegelung an Z_2.

a) Bestimme A'' und ein Zentrum Z, so daß A an Z gespiegelt A'' ergibt.

b) Zeige: $\overrightarrow{Z_1Z_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA''}$

16. A(2 | 0 | 0) , B(4 | 2 | 0) , C(2 | 3 | 0) , D(3 | 2 | 2) , A'(0 | 6 | 2)
Das Tetraeder A'B'C'D' entsteht beim Spiegeln von ABCD am Zentrum Z.

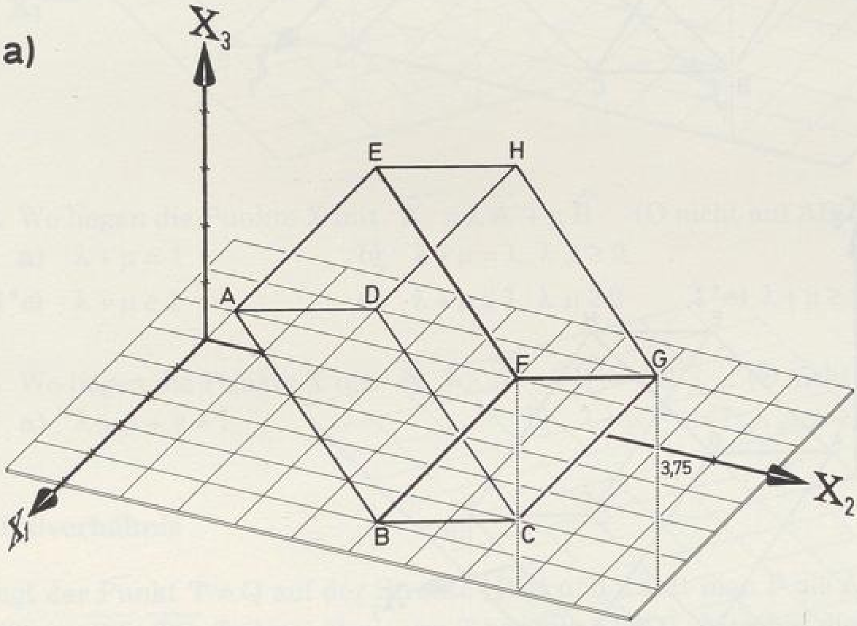
a) Bestimme Z und die restlichen Ecken des Spiegelbilds.

b) Fertige eine saubere Zeichnung an.

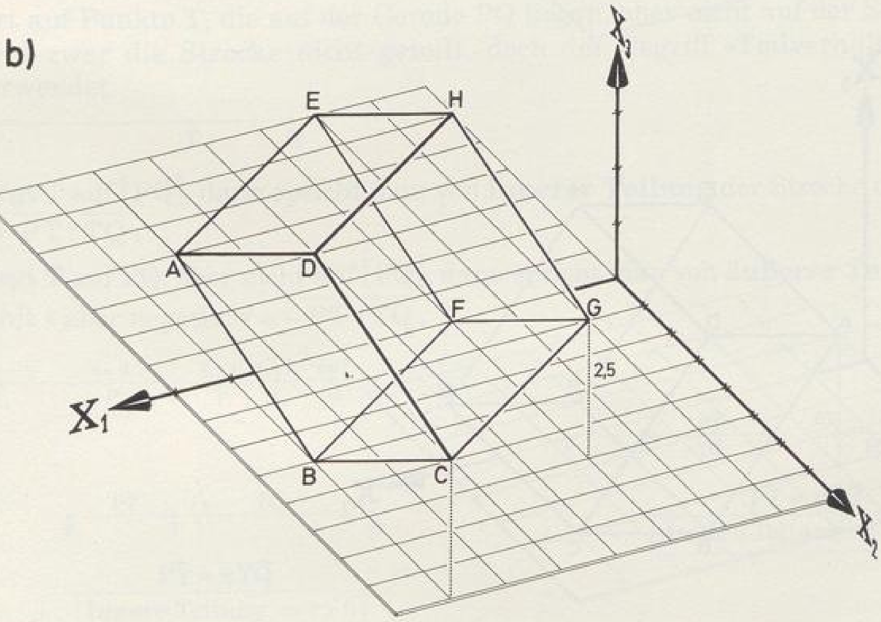
5
3 0 13
6

17. Alle sechs Bilder zeigen verschiedene Spate mit jeweils demselben Umriß. Jedes Spat steht mit einer Seitenfläche auf der x_1x_2-Ebene. Benachbarte Gitterlinien der x_1x_2-Ebene haben den Abstand 1. Die punktierte Strecke kennzeichnet die dritte Koordinate. Bestimme die Spatecken und die von A ausgehenden Kantenvektoren.

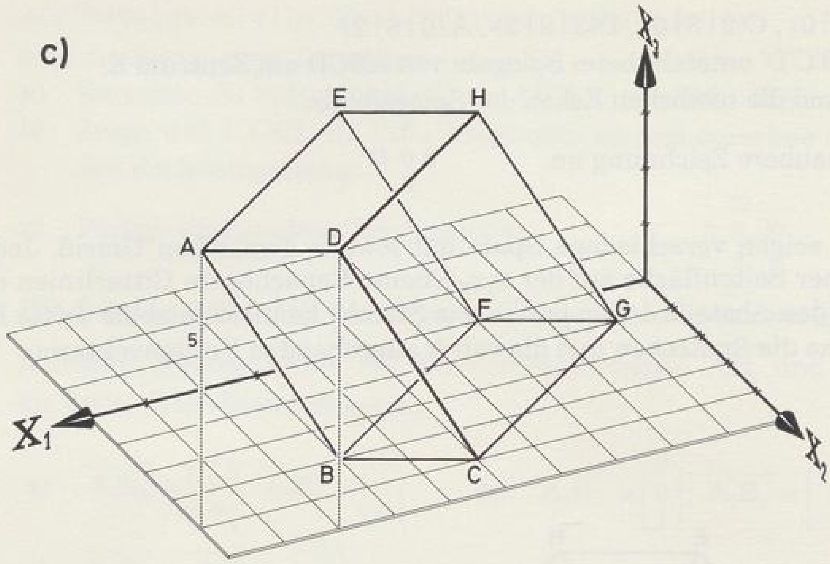
a)



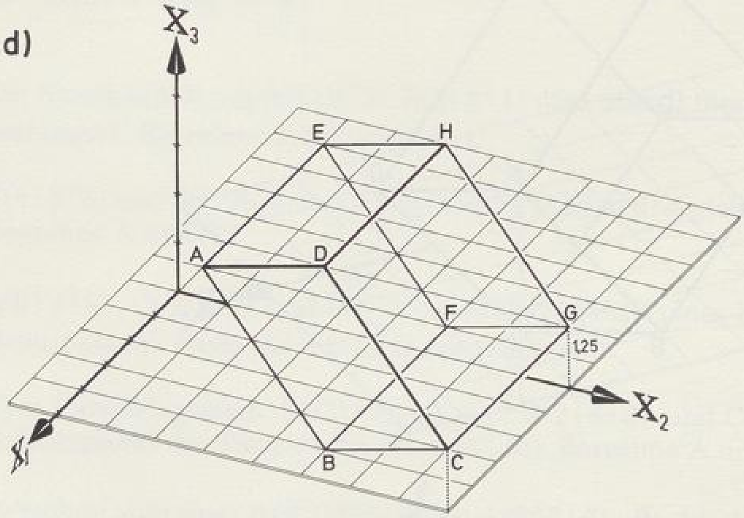
b)



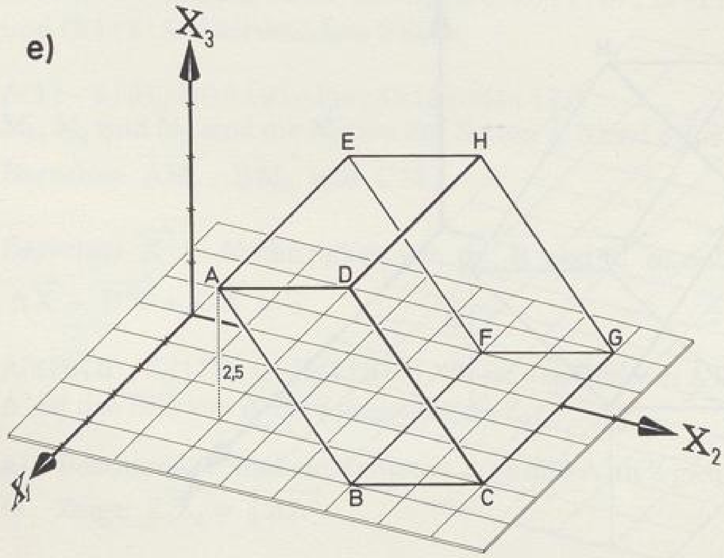
c)



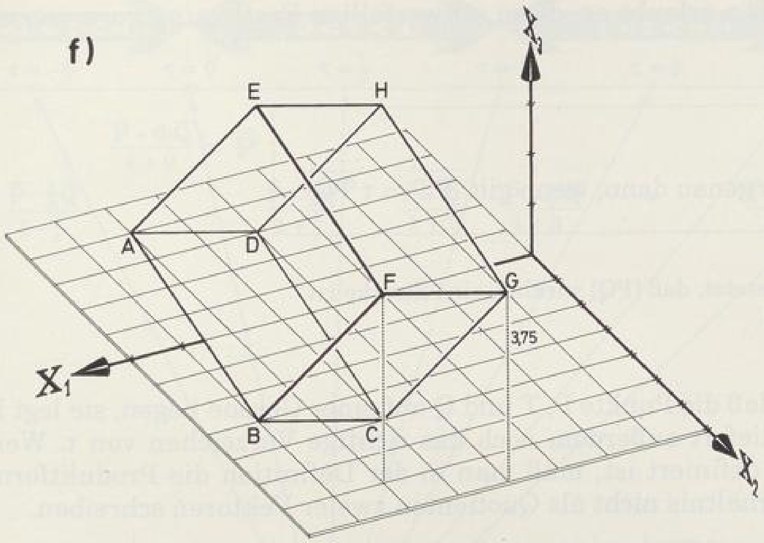
d)



e)



f)



• **18.** Wo liegen die Punkte X mit $\vec{X} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B}$ (O nicht auf AB!)

a) $\lambda + \mu = 1$ **b)** $\lambda + \mu = 1,\ \lambda, \mu \geq 0$

⁞•**c)** $\lambda + \mu \geq 1$ **d)** $\lambda + \mu \leq 1,\ \lambda, \mu \geq 0$ ⁞•**e)** $\lambda + \mu \geq 1,\ \lambda, \mu \geq 0$

⁞ **19.** Wo liegen die Punkte X mit $\vec{X} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B} + \nu\vec{C}$ (C nicht auf AB!)

a) $\lambda + \mu + \nu = 1$ **b)** $\lambda + \mu + \nu = 1,\ \lambda, \mu, \nu \geq 0$

2. Teilverhältnis

Liegt der Punkt $T \neq Q$ auf der Strecke $[PQ]$ und wählt man P als Anfangspunkt, dann heißt $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$ Teilverhältnis von T bezüglich $[PQ]$. Man hat diese Definition erweitert auf Punkte T, die auf der Gerade PQ liegen, aber nicht auf der Strecke $[PQ]$. Hier wird zwar die Strecke nicht geteilt, doch der Begriff »Teilverhältnis« wird weiter verwendet.

Liegt T auf $[PQ]$, dann spricht man von **innerer Teilung** der Strecke und zählt τ positiv: $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$.

Liegt T auf PQ, aber nicht auf $[PQ]$, dann spricht man von **äußerer Teilung** der Strecke, zählt τ aber negativ: $\tau = -\overline{PT} : \overline{TQ}$.

$$\vec{PT} = \tau\vec{TQ}$$

$\boxed{\textbf{Äußere Teilung} \Leftrightarrow \tau < 0}$

$$\vec{PT} = \tau\vec{TQ}$$

$\boxed{\textbf{Innere Teilung} \Leftrightarrow \tau > 0}$