Anschauliche analytische Geometrie

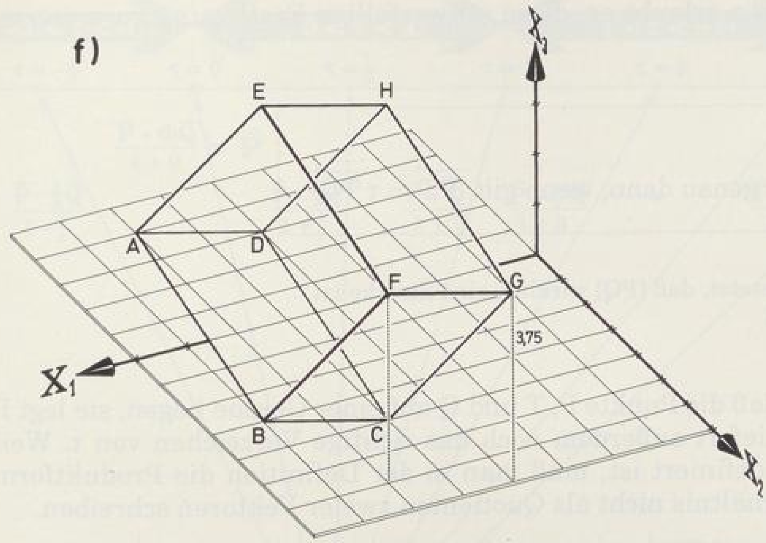
Barth, Elisabeth

München, 2000

2. Teilverhältnis

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

f)



• **18.** Wo liegen die Punkte X mit $\vec{X} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B}$ (O nicht auf AB!)

a) $\lambda + \mu = 1$ **b)** $\lambda + \mu = 1,\ \lambda,\mu \geq 0$

:•c) $\lambda + \mu \geq 1$ **d)** $\lambda + \mu \leq 1,\ \lambda,\mu \geq 0$ **:•e)** $\lambda + \mu \geq 1,\ \lambda,\mu \geq 0$

: 19. Wo liegen die Punkte X mit $\vec{X} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B} + \nu\vec{C}$ (C nicht auf AB!)

a) $\lambda + \mu + \nu = 1$ **b)** $\lambda + \mu + \nu = 1,\ \lambda,\mu,\nu \geq 0$

2. Teilverhältnis

Liegt der Punkt $T \neq Q$ auf der Strecke $[PQ]$ und wählt man P als Anfangspunkt, dann heißt $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$ Teilverhältnis von T bezüglich $[PQ]$. Man hat diese Definition erweitert auf Punkte T, die auf der Gerade PQ liegen, aber nicht auf der Strecke $[PQ]$. Hier wird zwar die Strecke nicht geteilt, doch der Begriff »Teilverhältnis« wird weiter verwendet.

Liegt T auf $[PQ]$, dann spricht man von **innerer Teilung** der Strecke und zählt τ positiv: $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$.

Liegt T auf PQ, aber nicht auf $[PQ]$, dann spricht man von **äußerer Teilung** der Strecke, zählt τ aber negativ: $\tau = -\overline{PT} : \overline{TQ}$.

$\vec{PT} = \tau\vec{TQ}$

Äußere Teilung $\Leftrightarrow \tau < 0$

$\vec{PT} = \tau\vec{TQ}$

Innere Teilung $\Leftrightarrow \tau > 0$

Die Verwendung von Vektoren erlaubt es, diese schwerfällige Festlegung zu ersetzen durch eine kurze, elegante

Definition

T teilt [PQ] im Verhältnis τ genau dann, wenn gilt $\overrightarrow{PT} = \tau\,\overrightarrow{TQ}$.

Selbstverständlich ist vorausgesetzt, daß [PQ] wirklich eine Strecke ist, P und Q also verschieden sind.

Diese Definition garantiert, daß die Punkte P, T und Q auf einer Gerade liegen, sie legt P als Anfangspunkt fest und liefert außerdem noch das richtige Vorzeichen von τ. Weil für Vektoren kein Quotient definiert ist, muß man in der Definition die Produktform wählen und kann das Teilverhältnis nicht als Quotienten zweier Vektoren schreiben.

Aus $P(1\,|\,0\,|\,3)$, $Q(1\,|-4\,|-1)$ und $T(1\,|-1\,|\,2)$ errechnet sich τ so:

$\overrightarrow{PT} = \tau\,\overrightarrow{TQ}$ in Spaltendarstellung $\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix}$, das ist ein 3,1-Gleichungssystem für τ

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 0 &=& 0\tau \\ \text{II} & -1 &=& -3\tau \\ \text{III} & -1 &=& -3\tau \end{array}$$

$\tau = \frac{1}{3}$ löst alle drei Gleichungen, T teilt [PQ] im Verhältnis 1:3.

Was wäre gewesen, wenn Q die Koordinaten $(1\,|-4\,|\,1)$ gehabt hätte ? Das Gleichungssystem in $\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$ hätte dann so ausgesehen:

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 0 &=& 0\tau \\ \text{II} & -1 &=& -3\tau \\ \text{III} & -1 &=& -\tau \end{array}$$

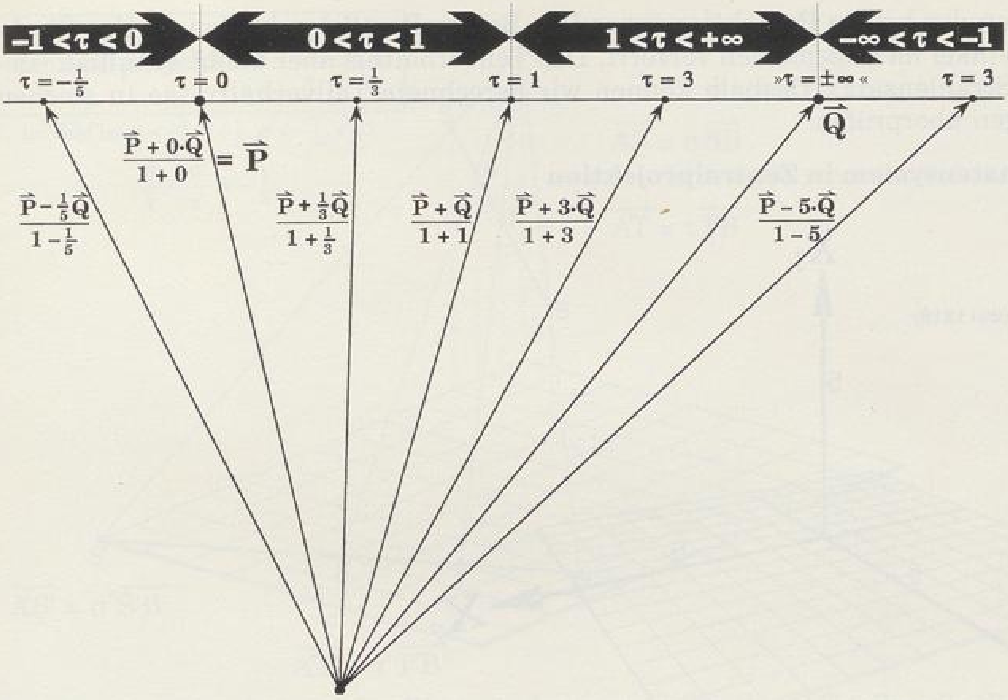
und zu einem Widerspruch geführt. Das heißt, $\overrightarrow{PT}$ und $\overrightarrow{TQ}$ wären nicht kollinear gewesen, P, T und Q also nicht auf einer Gerade gelegen. Es gibt zwar ein Streckenverhältnis ums Eck, aber kein Teilverhältnis ums Eck!

Sind der Anfangspunkt P, der Endpunkt Q und das Teilverhältnis τ gegeben, dann führt eine kurze Rechnung mit Ortsvektoren zum Teilpunkt T:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} &= \tau\,\overrightarrow{TQ} \\ \vec{T} - \vec{P} &= \tau\vec{Q} - \tau\vec{T} \\ (1+\tau)\vec{T} &= \vec{P} + \tau\vec{Q} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{T}} = \frac{\vec{\mathbf{P}} + \tau\vec{\mathbf{Q}}}{\mathbf{1} + \tau} \quad \text{mit } \tau \neq -1}$$

Für jedes $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ gibt es einen Teilpunkt. $\tau = -1$ würde bedeuten, daß T auf PQ außerhalb [PQ], aber gleich weit weg von P und Q liegen müßte. Das ist zuviel verlangt!



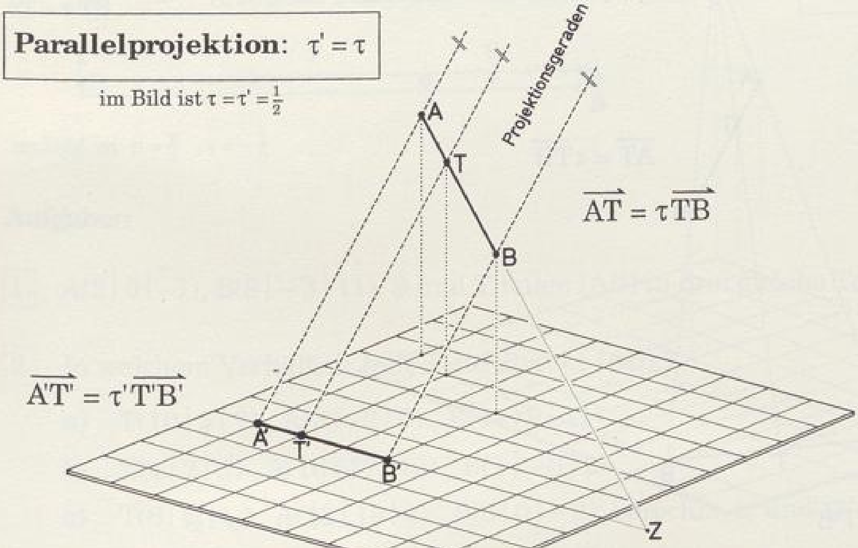
Beispiel: $P(-2\,|\,1\,|\,0)$, $Q(2\,|\,-1\,|\,4)$, $\tau = -\frac{1}{3}$

$$\vec{T} = \frac{\vec{P} + \tau\vec{Q}}{1+\tau} = \frac{\vec{P} - \frac{1}{3}\vec{Q}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3\vec{P} - \vec{Q}}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$T(-4\,|\,2\,|\,-2)$ teilt $[PQ]$ im Verhältnis $-1:3$ (äußere Teilung).

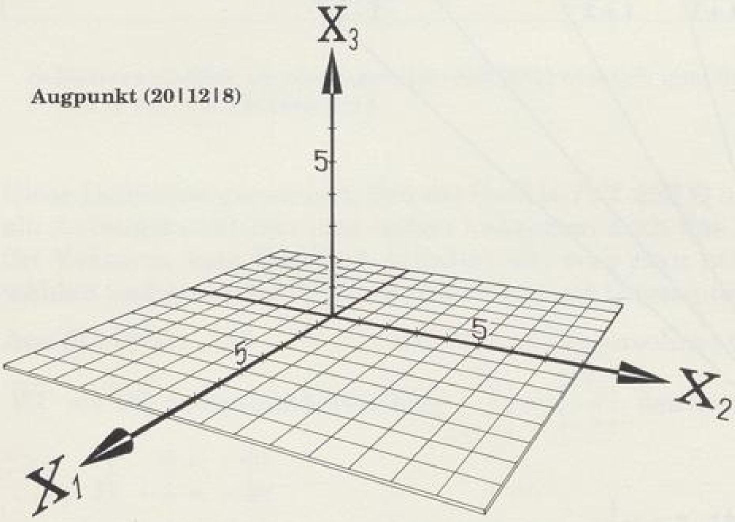
Parallelprojektion: $\tau' = \tau$

im Bild ist $\tau = \tau' = \frac{1}{2}$



Fast alle Zeichnungen in diesem Buch, die räumliche Ansichten zeigen, sind Normalbilder in Parallelprojektion. Eine Abbildung eines Körpers in eine Ebene heißt **Parallelprojektion**, wenn die Geraden, die Urbild- und Bildpunkt verbinden, parallel sind. Die Verbindungsgeraden heißen **Projektionsgeraden**. Bei der Parallelprojektion werden Strecken und Winkel im allgemeinen verzerrt. Das Teilverhältnis aber bleibt erhalten. (Beweis mit Strahlensatz). Deshalb können wir berechnete Teilverhältnisse in solchen Zeichnungen überprüfen.

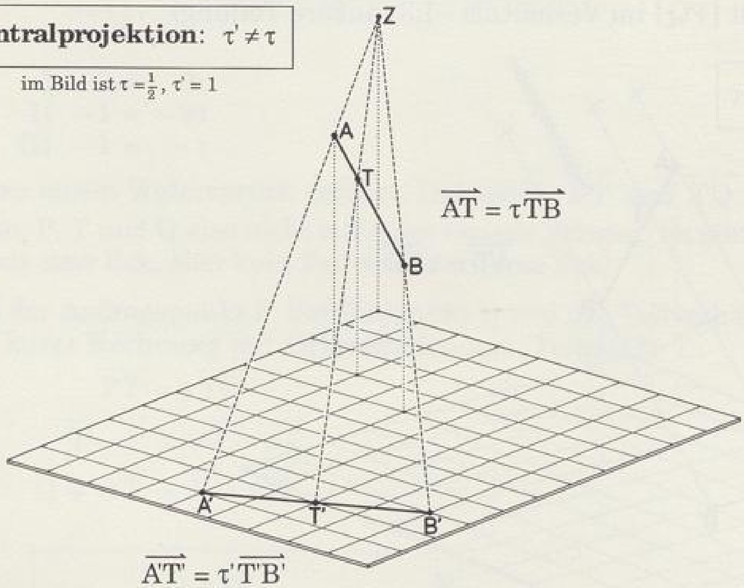
Koordinatensystem in Zentralprojektion



Bilder, die der Wirklichkeit noch näher kommen, liefert die **Zentralprojektion**. Fotografien sind Bilder in Zentralprojektion. Zeichnungen in Zentralprojektion setzen eine anspruchsvollere Konstruktionstechnik voraus. Bei der Zentralprojektion werden nicht nur Strecken und Winkel verzerrt, auch das Teilverhältnis ändert sich im allgemeinen.

Zentralprojektion: $\tau' \neq \tau$

im Bild ist $\tau = \frac{1}{2}$, $\tau' = 1$

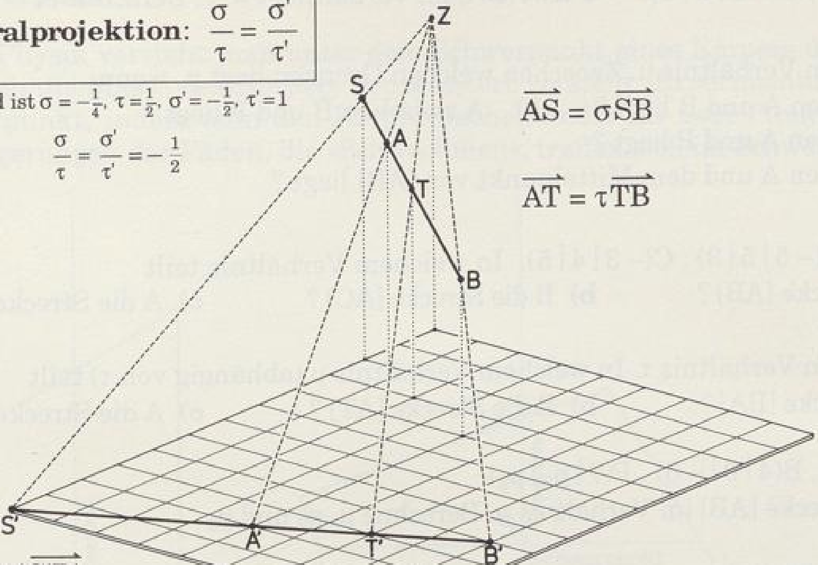


Man kann aber beweisen, daß wenigstens das Verhältnis zweier Teilverhältnisse erhalten bleibt, wenn eine Strecke [AB] von zwei Punkten S und T im Verhältnis σ und τ geteilt wird. Das Verhältnisverhältnis $\frac{\sigma}{\tau}$ heißt auch das **Doppelverhältnis**, in dem die Punkte S und T die Strecke [AB] teilen.

Zentralprojektion: $\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma'}{\tau'}$

im Bild ist $\sigma = -\frac{1}{4}$, $\tau = \frac{1}{2}$, $\sigma' = -\frac{1}{2}$, $\tau' = 1$

$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma'}{\tau'} = -\frac{1}{2}$



$\overrightarrow{AS} = \sigma\overrightarrow{SB}$

$\overrightarrow{AT} = \tau\overrightarrow{TB}$

$\overrightarrow{A'S'} = \sigma'\overrightarrow{S'B'}$

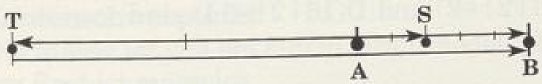
$\overrightarrow{A'T'} = \tau'\overrightarrow{T'B'}$

Hat das Doppelverhältnis den Wert −1, dann sagt man: S und T teilen die Strecke [AB] **harmonisch**. Dann gilt $\frac{\sigma}{\tau} = -1$, also $\tau = -\sigma$, das heißt, der eine Teilpunkt teilt [AB] außen im selben Verhältnis wie der andere innen. In der Mittelstufe haben wir bewiesen, daß auch umgekehrt A und B die Strecke [ST] harmonisch teilen. Deshalb nennt man die vier Punkte A, B, S und T **harmonische Punkte**.

$\overrightarrow{AS} = \sigma\overrightarrow{SB}$
$\overrightarrow{AT} = \tau\overrightarrow{TB}$

Harmonische Teilung $\tau = -\sigma$

A, B, S und T sind harmonische Punkte



im Bild ist $\sigma = \frac{2}{3}$, $\tau = -\frac{2}{3}$

Aufgaben

1. A(2 | 0 | −1), B(8 | − 3 | 11). S und T teilen [AB] in drei gleiche Teile. Berechne S und T.

2. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AB] ?

a) T(10 | 5 | 7) , A(3 | −2 | 0) , B(14 | 9 | 11)

b) T(4 | 2 | 3) , A(16 | 17 | 12) , B(1 | − 3 | 2)

c) T(6 | t_2 | t_3) , A(13 | 10 | 4) , B(3 | 0 | − 6); berechne t_2 und t_3

d) T(8 | −12 | −8) , A(−1 | 3 | 4) , B(2 | −2 | 0)

3. A(0 | 5 | 3) , B(2 | − 5 | 8). Berechne die Teilpunkte T_i , die [AB] im Verhältnis τ_i teilen:
$\tau_1 = \frac{1}{2}$; $\tau_2 = 1$; $\tau_3 = -2$; $\tau_4 = -\frac{1}{3}$.

4. $T(3\,|-1\,|-6)$, $B(-6\,|\,2\,|\,0)$. T teilt [BA] im Verhältnis $\tau = \frac{3}{4}$. Berechne A.

$\boxed{5.}$ P teilt [AB] im Verhältnis μ. Zwischen welchen Grenzen liegt μ, wenn
a) P zwischen A und B liegt ? **b)** A zwischen B und P liegt ?
c) B zwischen A und P liegt ?
d) P zwischen A und dem Mittelpunkt von [AB] liegt ?

6. $A(1\,|\,2\,|\,9)$, $B(-5\,|\,5\,|\,3)$, $C(-3\,|\,4\,|\,5)$. In welchem Verhältnis teilt
a) C die Strecke [AB] ? **b)** B die Strecke [AC] ? **c)** A die Strecke [BC] ?

• **7.** T teilt [AB] im Verhältnis τ. In welchem Verhältnis μ (abhängig von τ) teilt
a) T die Strecke [BA] ? **b)** B die Strecke [AT] ? **c)** A die Strecke [BT] ?

8. $A(13\,|\,9\,|-3)$, $B(4\,|\,0\,|-6)$, $P(7\,|\,p_2\,|\,p_3)$
P teilt die Strecke [AB] im Verhältnis μ. Berechne μ, p_2 und p_3.

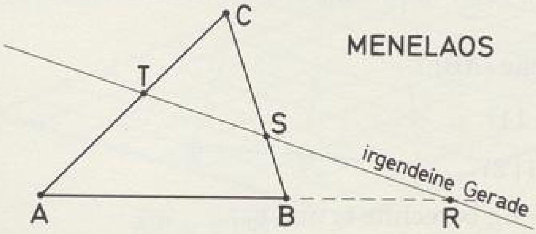
9. $P(0\,|\,1{,}5\,|\,4)$, $Q(3\,|\,0\,|\,4)$
Berechne die Punkte S und T, die [PQ] harmonisch im Verhältnis $|\sigma| = 2$ teilen.

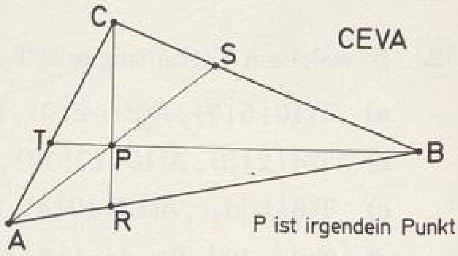
10. $A(2\,|\,10\,|\,5)$, $B(23\,|-4\,|\,33)$, $S(11\,|\,4\,|\,17)$
a) S und T teilen [AB] harmonisch. Berechne T.
b) A und B teilen [ST] im Verhältnis α und β. Berechne α und β.

11. $A(-4\,|\,12\,|-9)$, $B(14\,|\,3\,|\,6)$. $C(c_1\,|\,6\,|\,c_3)$ liegt auf der Gerade AB.
Bestimme das Teilverhältnis γ, in dem C die Strecke [AB] teilt.
Berechne den vierten harmonischen Punkt D von A, B und C.

12. Zeige: $A(1\,|\,2\,|\,1)$, $B(6\,|\,2\,|-4)$, $C(4\,|\,2\,|-2)$ und $D(16\,|\,2\,|-14)$ sind harmonische Punkte.

• **13. Satz von MENELAOS**
Teilt R die Strecke [AB] im Verhältnis ρ und S die Strecke [BC] im Verhältnis σ und T die Strecke [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\boxed{\rho\cdot\sigma\cdot\tau = -1}$.Überprüfe den Satz am Beispiel $A(0\,|\,0)$, $B(12\,|\,0)$, $C(9\,|\,9)$, $R(20\,|\,0)$, $S(11\,|\,3)$, $T(5\,|\,5)$.





• **14. Satz von CEVA**
Teilt R die Strecke [AB] im Verhältnis ρ und S die Strecke [BC] im Verhältnis σ und T die Strecke [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\boxed{\rho\cdot\sigma\cdot\tau = 1}$.Überprüfe den Satz am Beispiel $A(0\,|\,0)$, $B(20\,|\,4)$, $C(5\,|\,10)$, $R(5\,|\,1)$, $S(10\,|\,8)$, $T(2\,|\,4)$.