Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

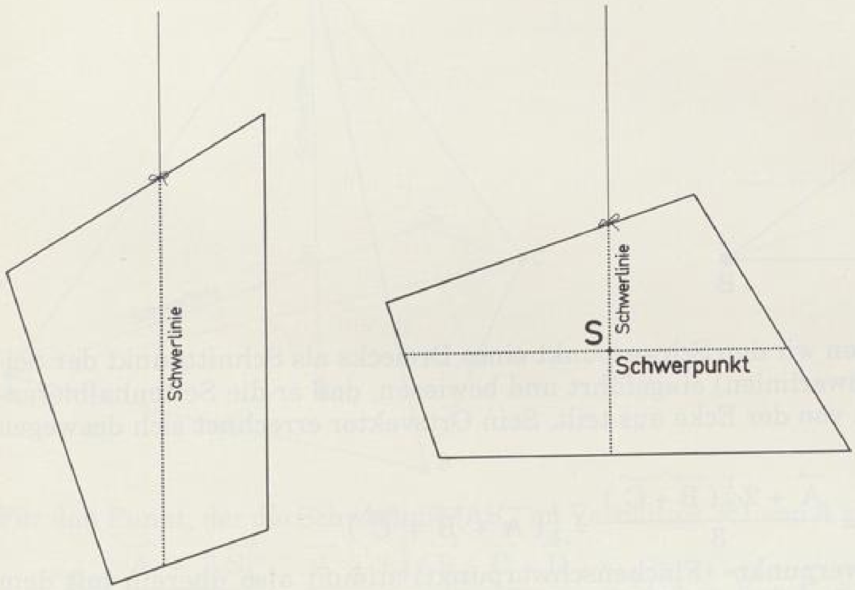
München, 2000

3. Schwerpunkt

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

3. Schwerpunkt

In der Physik versteht man unter dem Schwerpunkt eines Körpers den Punkt, in dem man sich die Masse des Körpers konzentriert vorstellt. Experimentell findet man den Schwerpunkt, indem man den Körper nacheinander an zwei Punkten aufhängt; die Verlängerungen der Fäden, die »Schwerlinien«, treffen sich im Schwerpunkt S.



Bei mathematischen Körpern (Polyedern) unterscheiden wir

- **Eckenschwerpunkt**
  In jeder Ecke ist gleichviel Masse konzentriert, der Rest ist masselos.
- **Kantenschwerpunkt**
  Die Masse ist wie bei einem Drahtmodell gleichmäßig auf die Kanten verteilt, der Rest ist masselos.
- **Flächenschwerpunkt**
  Die Masse ist wie bei einem Modell aus Pappe gleichmäßig auf die Flächen verteilt, der Rest ist masselos.
- **Raumschwerpunkt**
  Die Masse ist gleichmäßig aufs Volumen verteilt.

Wir kümmern uns nur um den Eckenschwerpunkt, wir bezeichnen ihn kurz mit Schwerpunkt. Er ist am leichtesten zu berechnen. Sein Ortsvektor ist das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der n Ecken $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

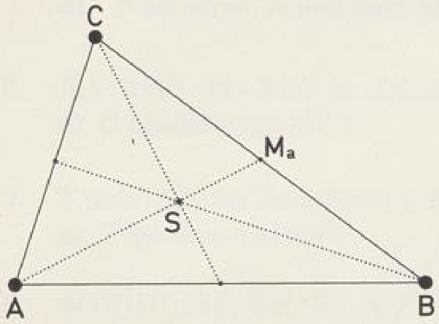
$$\boxed{\vec{S} = \tfrac{1}{n}(\vec{E_1} + \vec{E_2} + \ldots + \vec{E_n})}$$

Man kann zeigen: Der so definierte Eckenschwerpunkt fällt
- bei einer Strecke mit dem Kantenschwerpunkt zusammen
- bei einem Dreieck mit dem Flächenschwerpunkt zusammen
- bei einem Tetraeder mit dem Raumschwerpunkt zusammen.

Bei der Strecke [AB] gilt $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})}$

S ist der Mittelpunkt, er teilt [AB] im Verhältnis $\tau = 1$.

Beim Dreieck ABC gilt $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})}$



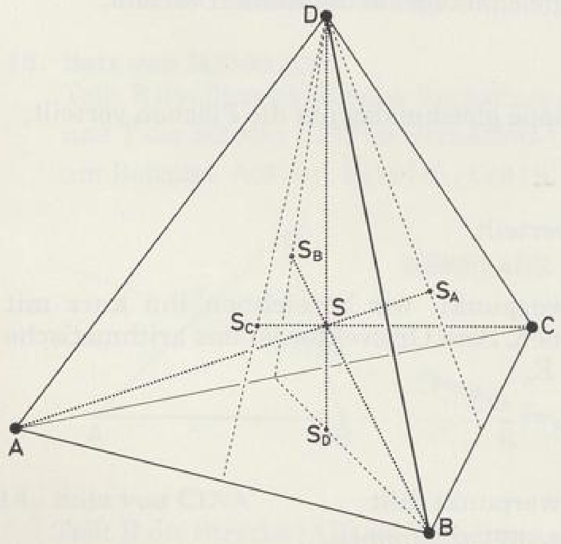
In der Mittelstufe haben wir den Schwerpunkt eines Dreiecks als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (=Schwerlinien) eingeführt und bewiesen, daß er die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 :1 von der Ecke aus teilt. Sein Ortsvektor errechnet sich deswegen so:

$$\vec{S} = \frac{\vec{A} + 2\,\vec{M_a}}{1+2} = \frac{\vec{A} + 2\cdot\frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{C})}{3} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

Der »Mittelstufenschwerpunkt« (Flächenschwerpunkt) stimmt also überein mit dem »Oberstufenschwerpunkt« (Eckenschwerpunkt).

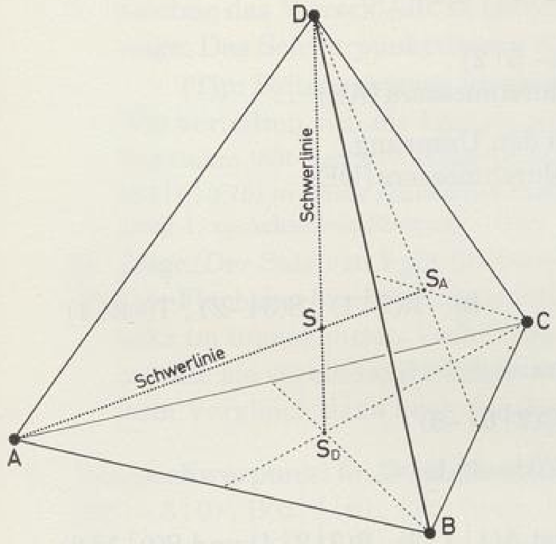
Beim Tetraeder ABCD gilt $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})}$

Verallgemeinert man den Begriff Schwerlinie aufs Tetraeder, so bekommt man die Verbindungsstrecke von Ecke und Schwerpunkt der Gegenfläche.



Eine Strecke wird vom Schwerpunkt im Verhältnis 1:1 geteilt (man kann sie als ihre eigene Schwerlinie auffassen).

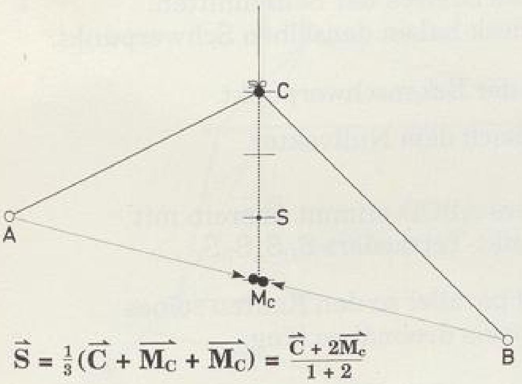
Eine Schwerlinie im Dreieck wird vom Schwerpunkt im Verhältnis 2 :1 von der Ecke aus geteilt.
Der Schwerpunkt im Tetraeder folgt dieser Tendenz konsequent: er teilt eine Schwerlinie im Verhältnis 3 :1 von der Ecke aus, wie die Rechnung zeigt:



Für den Punkt, der die Schwerlinie [AS_a] im Verhältnis 3 :1 von A aus teilt, gilt

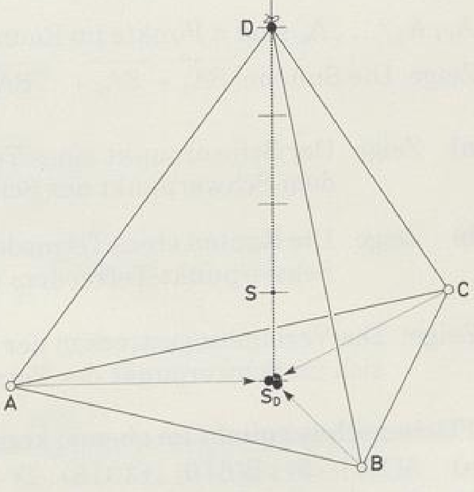
$$\vec{S} = \frac{\vec{A} + 3\,\vec{S_A}}{1+3} = \frac{\vec{A} + 3\cdot\frac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D})}{4} = \tfrac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}).$$

Das ist genau die Bedingung für den Eckenschwerpunkt. Weil in der Formel die vier Ecken gleichberechtigt auftreten, ist damit auch gezeigt, daß S auf jeder Schwerlinie liegt, daß diese sich also in S schneiden.
Man kann sich die Teilverhältnisse 2 :1 und 3 :1 auch in den beiden Bildern klarmachen:



$$\vec{S} = \tfrac{1}{3}(\vec{C} + \vec{M_C} + \vec{M_C}) = \frac{\vec{C} + 2\vec{M_c}}{1+2}$$

$$\tau = 2$$



$$\vec{S} = \tfrac{1}{4}(\vec{D} + \vec{S_D} + \vec{S_D} + \vec{S_D}) = \frac{\vec{D} + 3\vec{S_D}}{1+3}$$

$$\tau = 3$$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Berechne den Mittelpunkt der Strecken

a) $A(1|7|2)$, $B(3|5|0)$ **b)** $R(2|1)$, $S(1|-5)$

2. **a)** Ein Kreis um $M(-2|5)$ geht durch $A(-5|2)$.
Berechne den Endpunkt E des Kreisdurchmessers [AE].

b) Eine Kugel um $M(1|2|3)$ geht durch den Ursprung.
Berechne den Endpunkt E des Kugeldurchmessers [OE].

$\boxed{3.}$ Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks

a) $A(2|1|3)$, $B(3|5|0)$, $C(4|-4|9)$ **b)** $R(2|1)$, $S(3|-2)$, $T(-2|4)$

4. Berechne den Schwerpunkt des Tetraeders

a) $O(0|0|0)$, $A(2|1|1)$, $B(-12|1|3)$, $C(2|6|-8)$

b) $R(2|1|1)$, $S(-9|3|2)$, $T(1|0|8)$, $U(0|-4|1)$

$\boxed{5.}$ **a)** Im Dreieck ABC mit Schwerpunkt S ist $A(1|1|2)$, $B(3|2|4)$ und $S(0|1|3)$.
Berechne C.

b) Im Tetrader ABCD mit Schwerpunkt S ist $A(2|1|1)$, $B(3|0|1)$, $C(2|-1|0)$ und $S(2|2|1)$. Berechne D.

• **6.** Die Schwerpunkte der Dreiecke, die ein Tetraeder begrenzen, sind:
$S_D(3|3|0)$, $S_A(3|3|6)$, $S_B(-1|3|6)$ und $S_C(4|0|6)$.
Berechne die Ecken A, B, C und D.

7. Das Mittendreieck eines Dreiecks ABC ist das Dreieck der Seitenmitten.
Zeige: Ein Dreieck ABC und sein Mittendreieck haben denselben Schwerpunkt.

8. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind n Punkte im Raum, S ist der Eckenschwerpunkt.
Zeige: Die Summe $\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \ldots \overrightarrow{SA_n}$ ist gleich dem Nullvektor.

• **9.** **a)** Zeige: Der Schwerpunkt eines Tetraeders ABCD stimmt überein mit dem Schwerpunkt des Schwerpunkt-Tetraeders $S_DS_AS_BS_C$.

b) Zeige: Die Kanten eines Tetraeders sind parallel zu den Kanten seines Schwerpunkt-Tetraeders und jeweils dreimal so lang.

• **10.** Zeige: Die Verbindungsstrecken der Mitten von je zwei Gegenkanten treffen sich im Schwerpunkt des Tetraeders.

• **11. Flächenschwerpunkt im ebenen konvexen Viereck**

a) $A(1{,}5|-3)$, $B(6|0)$, $C(3|6)$, $D(-4{,}5|0)$

b) $A(-1|-2{,}5)$, $B(6{,}5|-1)$, $C(-1|3{,}5)$, $D(-5{,}5|-1)$

c) $A(3|-4{,}5)$, $B(9|-6)$, $C(12|4{,}5)$, $D(0|7{,}5)$

Die Diagonale AC zerlegt das Viereck in die Teildreiecke ABC mit Schwerpunkt S_1 und ACD mit Schwerpunkt S_2 .
Die Diagonale BD zerlegt das Viereck in die Teildreiecke BCD mit Schwerpunkt T_1 und ABD mit Schwerpunkt T_2 .

I Zeichne das Viereck ABCD, berechne die Schwerpunkte S_1 , T_1 , S_2 und T_2 und zeige: Das Schwerpunktviereck $S_1T_1S_2T_2$ ist dem Viereck ABCD ähnlich.
(Tip: Seitenvektoren vergleichen!)
Wie verhalten sich die Längen entsprechender Seiten ?
Das Ganze läßt sich auch räumlich deuten: Zeichne A(3 | 3 | 0) , B(3 | 6 | 0) , C(– 6 | 3 | 0) und D(0 | 0 | 3,75) in unser räumliches Standard-KOSY in Normalprojektion: x_1-Achse mit Steigung 1, x_2-Achse mit Steigung – 0,25. Welcher Zusammenhang besteht mit Aufgabe **9.b** ?

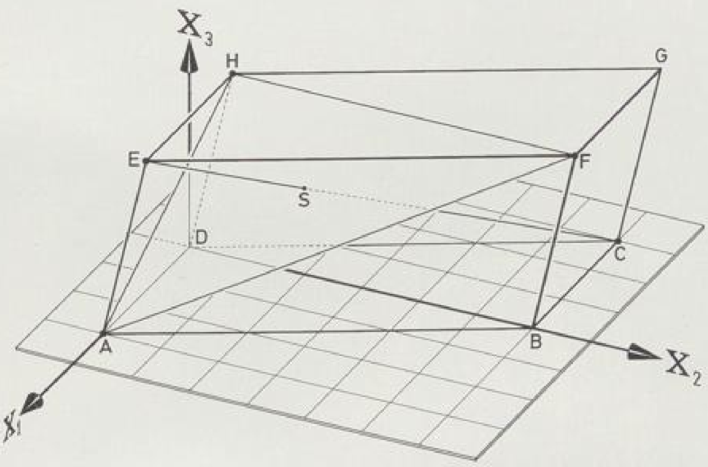
II Zeige: Der Satz von **I** gilt für jedes konvexe Viereck.

III Der Flächenschwerpunkt von ABCD teilt eine Diagonale des Schwerpunktvierecks im umgekehrten Verhältnis der Inhalte der Teildreiecke, deren Schwerpunkte sie verbindet (Hebelgesetz!). Berechne den Flächenschwerpunkt S und zum Vergleich dazu auch den Eckenschwerpunkt U.

12. Raumschwerpunkt im Doppeltetraeder
A(0 | – 3 | 0) , B(0 | 4 | 0) , C(0 | 0 | 4) , D(4 | –1 | 0) , E(– 8 | – 1 | 0)

Zeichne das Doppeltetraeder, die Teiltetraeder sind ABCD und ABCE.
Berechne den Schwerpunkt S von ABCD und T von ABCE.
Der Raumschwerpunkt R von ABCDE teilt die Strecke [ST] im umgekehrten Verhältnis der Inhalte der entsprechenden Teiltetraeder.
Berechne R und zum Vergleich dazu auch den Eckenschwerpunkt U.

13. A(3 | 0 | 0) , B(0 | 6 | 0) , C(– 3 | 6 | 0) und G(– 4,5 | 6 | 2,25) sind Ecken eines Spats, ABCD ist eine Seitenfläche.



a) Bestimme die restlichen Ecken D, E, F und H.
Zeichne das Spat, das Dreieck AFH mit Schwerpunkt S und die Raumdiagonale [CE]. (Ursprung 3,5 cm vom linken Rand entfernt)

b) Zeige: CE schneidet das Dreieck AFH im Schwerpunkt S des Dreiecks.
(Tip: entweder mit Ansatz $\overrightarrow{CS} = \sigma\,\overrightarrow{SE}$ oder $\overrightarrow{ES} = \lambda\,\overrightarrow{EC}$)