Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

1. Definitionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

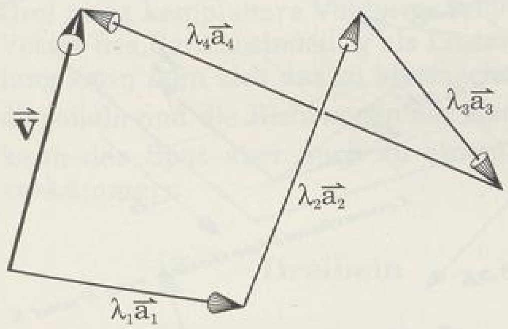
1. Definitionen

Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben, so lassen sich damit beliebig viele Vektoren $\vec{v}$ der Form

$$\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \text{erzeugen.}$$

Man nennt jeden solchen Vektor $\vec{v}$ Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das führt zur

> **Definition**
> $\vec{v}$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$,
> wenn gilt $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \dots + \lambda_n \vec{a_n}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$

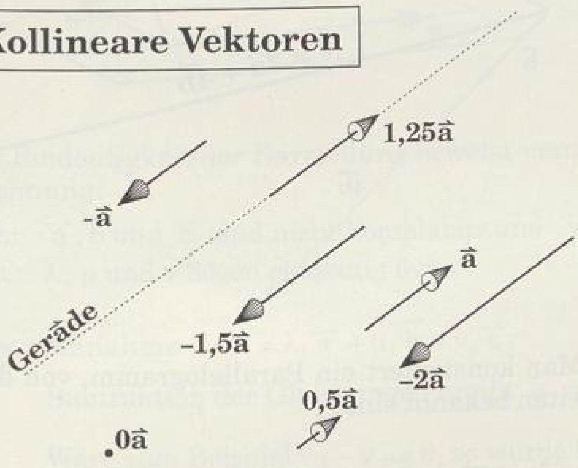


$\vec{v}$ ist Linearkombination von $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$

Eine Linearkombination von Vektoren ist also eine Summe von Vielfachen dieser Vektoren.

Ein Vektor
Hat man nur einen einzigen Vektor $\vec{a} \neq \vec{o}$, dann sind seine Linearkombinationen alle seine Vielfachen, das heißt, alle zu ihm kollinearen Vektoren.

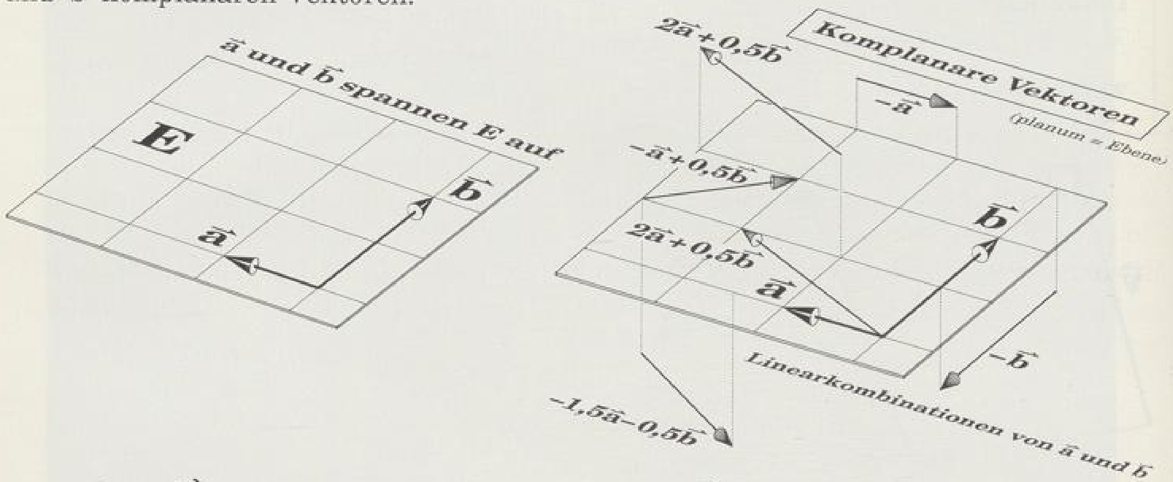
Kollineare Vektoren



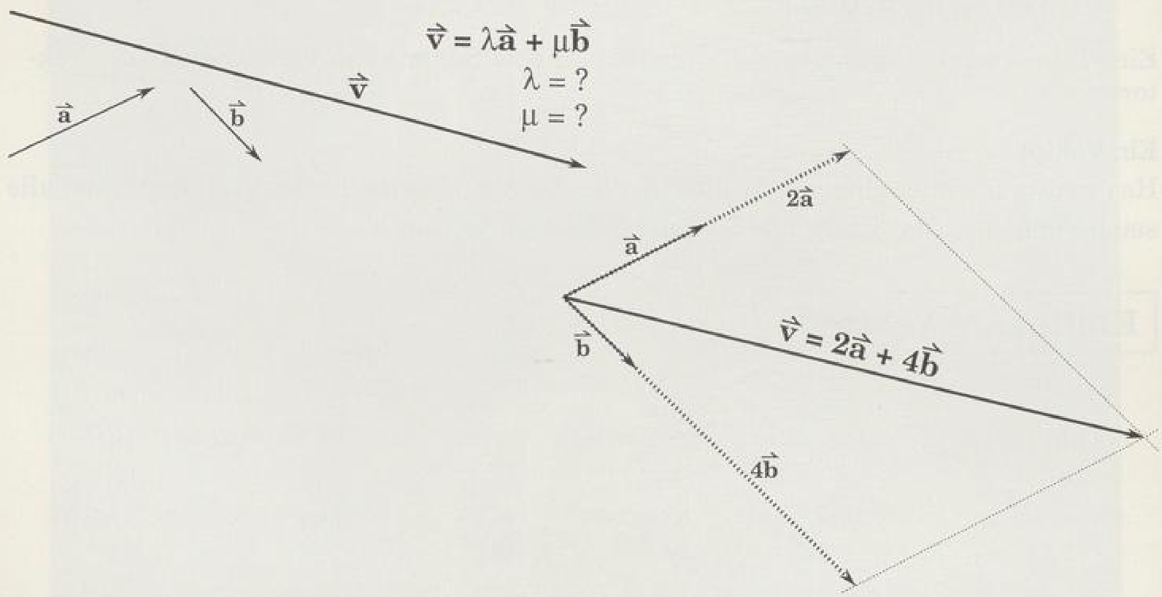
Linearkombinationen von $\vec{a}$

Zwei Vektoren

Zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ legen im Raum (bis auf Parallelverschiebung) eine Ebene fest. Jede Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist parallel zu dieser Ebene. Vektoren, die alle parallel zu einer Ebene sind, heißen **komplanar** (planum(lat.) = Ebene).
Also ist die Menge der Linearkombinationen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich der Menge der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ komplanaren Vektoren.



Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear, so ist jeder zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ komplanare Vektor $\vec{v}$ **eindeutig** als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellbar.



Geometrisch ist das leicht einzusehen: Man konstruiert ein Parallelogramm, von dem eine Diagonale und die Richtungen der Seiten bekannt sind.
Algebraisch ists nicht viel schwieriger:

Vor.: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht kollinear und $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$
Beh.: λ und μ liegen eindeutig fest

Bew.: Annahme $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b}$

$\vec{v} = \lambda_2 \vec{a} + \mu_2 \vec{b}$

Subtraktion der Gleichungen ergibt $\vec{o} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{a} + (\mu_1 - \mu_2)\vec{b}$

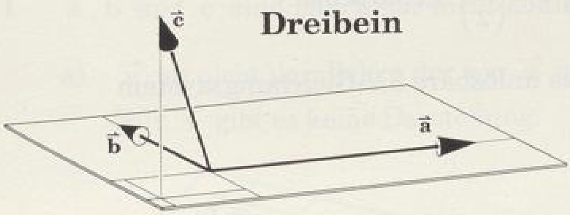
Wäre zum Beispiel $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, so würde folgen $\vec{a} = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\vec{b}$,

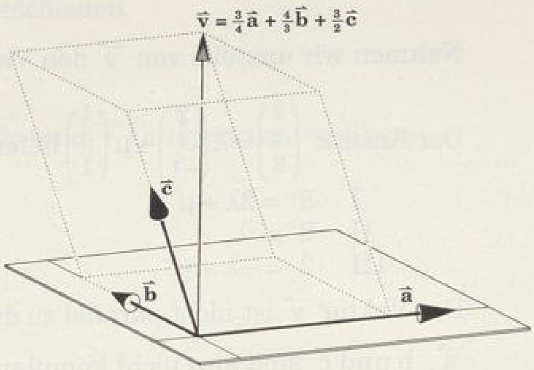
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ wären somit kollinear, im Widerspruch zur Voraussetzung.

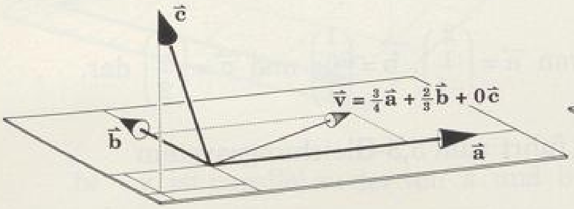
Deshalb gilt $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\mu_1 = \mu_2$, es gibt also nur eine Darstellung für $\vec{v}$.

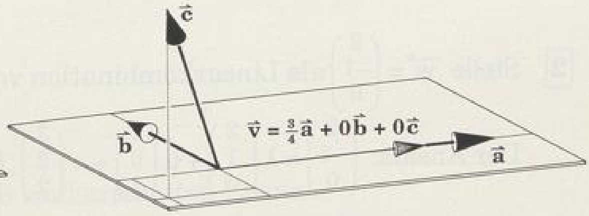
Drei Vektoren

Zwei Vektoren des Raums sind immer komplanar, drei Vektoren im allgemeinen nicht. Drei nicht komplanare Vektoren heißen **Dreibein.** Mit einem Dreibein läßt sich jeder Vektor des Raums eindeutig als Linearkombination darstellen. Mit etwas Raumvorstellung kann man sich das so klarmachen: Man zeichnet ein Spat, von dem eine Raumdiagonale und die Richtungen der Kanten bekannt sind. Je nach Lage des Vektors $\vec{v}$ kann das Spat aber auch zu einem Parallelogramm oder sogar zu einer Strecke verkümmern.









Die Eindeutigkeit der Darstellung beweist man wie bei **Zwei Vektoren** durch einfache Rechnung:

Vor.: $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind nicht komplanar und $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$, $\quad \lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$

Beh.: λ, μ und ν liegen eindeutig fest

Bew.: Annahme $\vec{v} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \nu_1\vec{c}$ $\qquad \vec{v} = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} + \nu_2\vec{c}$

Subtraktion der Gleichungen ergibt $\vec{o} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{a} + (\mu_1 - \mu_2)\vec{b} + (\nu_1 - \nu_2)\vec{c}$

Wäre zum Beispiel $\nu_1 - \nu_2 \neq 0$, so würde folgen $\vec{c} = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\nu_1 - \nu_2}\vec{a} + \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\nu_1 - \nu_2}\vec{b}$

Damit wäre $\vec{c}$ komplanar zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die eindeutige Darstellung eines Vektors durch ein Dreibein verwenden wir ständig bei der Koordinaten-Schreibweise von Vektoren:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist ja nur die Abkürzung für $\vec{v} = 3\,\vec{e_1} + 2\,\vec{e_2} - 3\,\vec{e_3}$

$\vec{v}$ ist eine eindeutige Linearkombination des Basis-Dreibeins $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$.

Beispiele zur Berechnung von Koeffizienten in Linearkombinationen:

$\boxed{1}$ Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

Der Ansatz: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert das 3,2-Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 3 & = 2\lambda + \mu \\ \text{II} & 2 & = \lambda \\ \text{III} & -3 & = -\lambda + \mu \end{array}$$

mit der Lösung $\lambda = 2$ und $\mu = -1$, also $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

Nehmen wir anstelle von $\vec{v}$ den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, gehts schief.

Der Ansatz: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert das unlösbare 3,2-Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 3 & = 2\lambda + \mu \\ \text{II} & 2 & = \lambda \\ \text{III} & 2 & = -\lambda + \mu \end{array}$$

Der Vektor $\vec{v}$ ist nicht parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene, $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind also nicht komplanar.

$\boxed{2}$ Stelle $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dar.

Der Ansatz: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ führt zum 3,3-Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2 & = 2\lambda + \mu + 3\nu \\ \text{II} & -1 & = \lambda \quad\;\; + 2\nu \\ \text{III} & 0 & = -\lambda + \mu + 2\nu \end{array}$$

mit der Lösung $\lambda = 1$, $\mu = 3$ und $\nu = -1$, also $\vec{w} = \vec{a} + 3\,\vec{b} - \vec{c}$.

Versucht man, $\vec{w}$ als Linearkombination der komplanaren Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{v}$ (aus $\boxed{1}$) darzustellen, so stößt man auf das unlösbare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2 & = 2\lambda + \mu + 3\nu \\ \text{II} & -1 & = \lambda \quad\;\; + 2\nu \\ \text{III} & 0 & = -\lambda + \mu - 3\nu \end{array}$$

Dagegen läßt sich $\vec{z} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der komplanaren Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{v}$ darstellen, allerdings nicht eindeutig.

Das Gleichungssystem
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & -4 & = & 2\lambda + \mu + 3\nu \\ \text{II} & -3 & = & \lambda \phantom{{}+\mu} + 2\nu \\ \text{III} & 5 & = & -\lambda + \mu - 3\nu \end{array}$$
hat die ∞^1 Lösungen $\lambda = -3 - 2t$, $\mu = 2 + t$, $\nu = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Mögliche Linearkombinationen:

$t = 0 \Rightarrow \vec{z} = -3\,\vec{a} + 2\,\vec{b} + 0\,\vec{v}$ oder $t = -1 \Rightarrow \vec{z} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{v}$

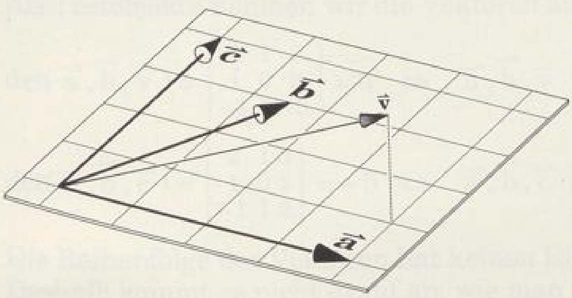
Komplanaritäts-Kriterium

Wir haben gesehen, daß man mit einem Dreibein $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ jeden Vektor $\vec{v}$ des Raums eindeutig als Linearkombination darstellen kann. Sind $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aber komplanar, so ist eine solche Darstellung entweder gar nicht oder nur mehrdeutig möglich. Um das zu sehen, müssen wir einige Fälle unterscheiden.

I $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind paarweise nicht kollinear.

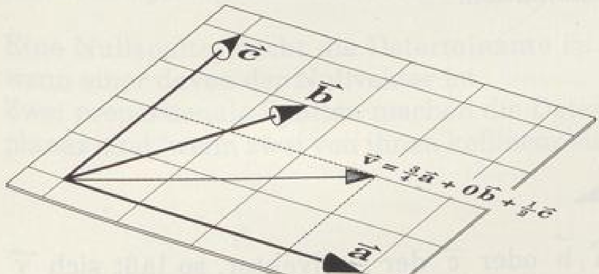
a) $\vec{v}$ ist nicht parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (und $\vec{c}$) aufgespannten Ebene.

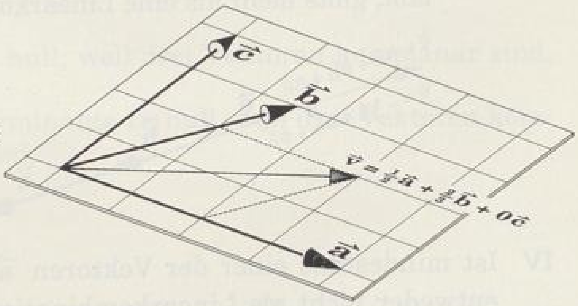
Für $\vec{v}$ gibt es keine Darstellung.



b) $\vec{v}$ ist parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

Da sich $\vec{v}$ zum Beispiel durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$, aber auch mit $\vec{a}$ und $\vec{c}$ darstellen läßt, gibts mehr als eine Linearkombination.

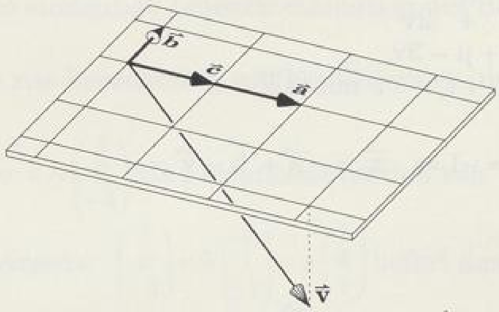




II $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind kollinear, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht.

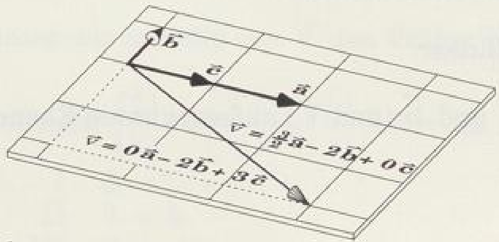
a) $\vec{v}$ ist nicht parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (und $\vec{c}$) aufgespannten Ebene.

Für $\vec{v}$ gibt es keine Darstellung.



b) $\vec{v}$ ist parallel zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

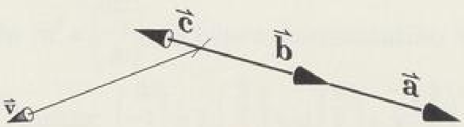
Da sich $\vec{v}$ zum Beispiel durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$, aber auch mit $\vec{a}$ und $\vec{c}$ darstellen läßt, gibts mehr als eine Linearkombination.



III $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind kollinear.

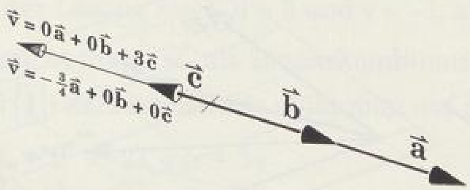
a) $\vec{v}$ ist nicht kollinear zu $\vec{a}$.

Für $\vec{v}$ gibt es keine Darstellung.



b) $\vec{v}$ ist kollinear zu $\vec{a}$.

Da sich $\vec{v}$ als Linearkombination (Vielfaches) von $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ oder $\vec{c}$ darstellen läßt, gibts mehr als eine Linearkombination.



IV Ist mindestens einer der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ oder $\vec{c}$ der Nullvektor, so läßt sich $\vec{v}$ entweder nicht als Linearkombination schreiben oder auf unendlich viele Arten, weil der Koeffizient des Nullvektors beliebig wählbar ist.

Zusammenfassung

$$\left.\begin{array}{r}\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ nicht komplanar,} \\ \vec{v} \text{ beliebig}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{für } \vec{v} \text{ gibt es eine eindeutige} \\ \text{Linearkombination von } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\end{array}\right.$$

Die Bestimmung der Koeffizienten λ, μ und ν der Linearkombination
$\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ führt auf ein 3,3- Gleichungssystem für λ, μ und ν:

$$\begin{array}{cl} \text{I} & v_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 \\ \text{II} & v_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 \\ \text{III} & v_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 \end{array}$$

Es hat nach der Cramer-Regel genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ungleich 0 ist. Die Spalten von D sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Wir schreiben deshalb $D = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

> **Komplanaritäts-Kriterium**
>
> $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht komplanar
>
> $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar

Als Testobjekte nehmen wir die Vektoren aus unserem Beispiel:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{v} \text{ komplanar}$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ nicht komplanar}$$

Die Reihenfolge der Vektoren hat keinen Einfluß auf die Komplanarität.
Deshalb kommt es nicht drauf an, wie man die Spalten in der Determinante anordnet:

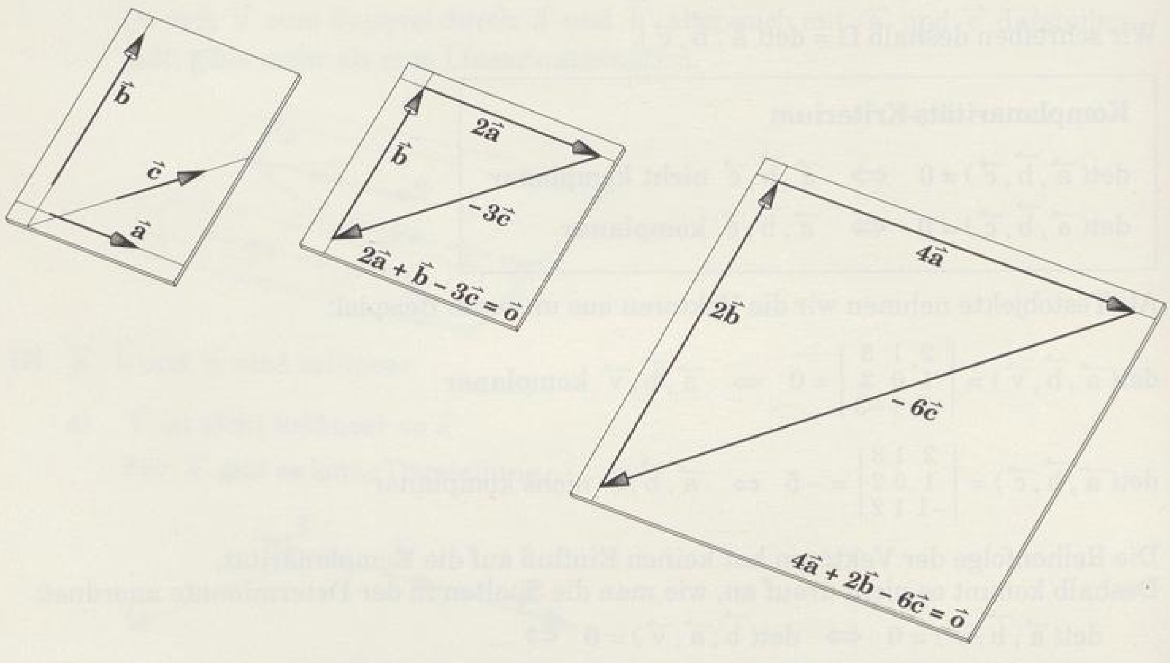
$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \ldots$$

Ist die Determinante ungleich null, dann ändert das Vertauschen zweier Spalten nur das Vorzeichen, wie Satz $\boxed{4}$ in Kapitel II.6 lehrt. Auch die Nachbarsätze $\boxed{3}$ und $\boxed{5}$ lassen sich jetzt geometrisch deuten:

Eine Nullspalte macht die Determinante zu null, weil drei Vektoren komplanar sind, wenn einer davon der Nullvektor ist.
Zwei proportionale Spalten machen die Determinante zu null, weil drei Vektoren komplanar sind, wenn zwei von ihnen kollinear sind.

Lineare Abhängigkeit

Die Begriffe »kollinear« und »komplanar« sind Sonderfälle der »linearen Abhängigkeit«. Allerdings ist sie erst dann wichtig, wenn man die Vektorrechnung verallgemeinert. Die entscheidende Frage ist, ob der Nullvektor als Linearkombination der gegebenen Vektoren, zum Beispiel $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, darstellbar ist. **Eine** Darstellung ist natürlich immer möglich: $\vec{o} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$; man nennt sie triviale Nullsumme, bei ihr sind **alle** Koeffizienten 0. Manchmal gibt es aber auch Nullsummen, bei denen **mindestens ein** Koeffizient von 0 verschieden ist, sie heißen nichttriviale Nullsummen – Beispiel: $\vec{o} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$. Multipliziert man diese Gleichung mit einer Zahl, dann ergibt sich zum Beispiel: $\vec{o} = 4\vec{a} + 2\vec{b} - 6\vec{c}$. Hat man also eine nichttriviale Nullsumme, dann gibts unendlich viele. Geometrisch gesehen ist eine nichttriviale Nullsumme eine geschlossene Vektorkette. Die Multiplikation mit einer Zahl wirkt wie eine zentrische Streckung.



Definition

Eine **Nullsumme** von n Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ ist eine Linearkombination dieser Vektoren, die gleich dem Nullvektor ist:

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \ldots + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{o} \qquad n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Sind alle Koeffizienten gleich 0,
dann heißt die Linearkombination **triviale Nullsumme.**
Ist mindestens ein Koeffizient ungleich 0,
dann heißt die Linearkombination **nichttriviale Nullsumme.**

Der Sonderfall n = 1 ist auch zugelassen,
obwohl man dann nicht mehr von Summe spricht.

Mit dem Begriff Nullsumme können wir jetzt endlich sagen, was man unter »linear abhängig« versteht:

Definition
Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt **linear abhängig,** wenn sich mit ihren Vektoren eine nichttriviale Nullsumme bilden läßt. Andernfalls heißt die Menge **linear unabhängig.**

Statt »eine Menge von Vektoren $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}\}$ ist linear abhängig« sagt man auch »die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ sind linear abhängig«

Satz: Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie kollinear sind.

Beweis: Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind, dann gilt $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{o}$ mit $(\lambda|\mu) \neq (0|0)$. Sei beispielsweise $\lambda \neq 0$, dann ist $\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}$, das heißt, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear.

Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind, dann gilt zum Beispiel $\vec{a} = \sigma\vec{b}$, das heißt, $1 \cdot \vec{a} + (-\sigma)\vec{b} = \vec{o}$, also sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.

Satz: Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie komplanar sind.

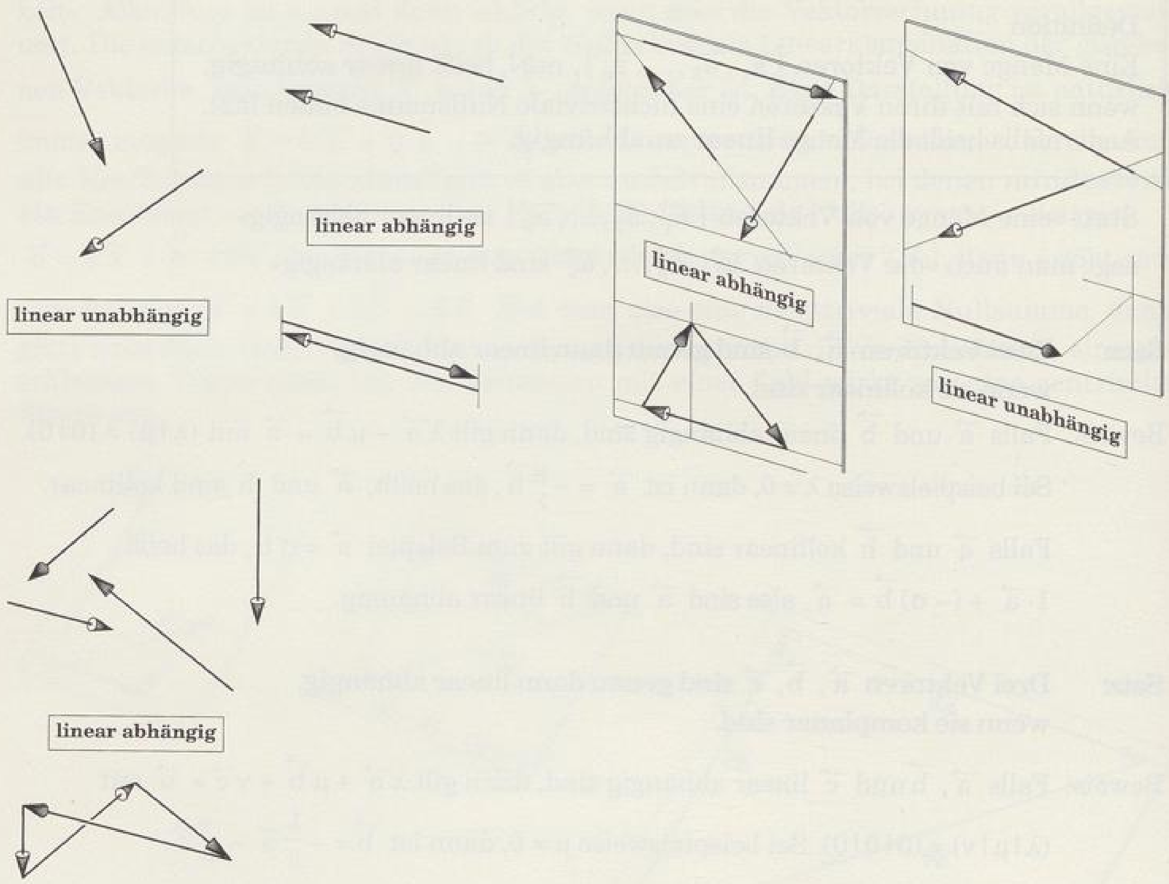
Beweis: Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind, dann gilt $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{o}$ mit $(\lambda|\mu|\nu) \neq (0|0|0)$. Sei beispielsweise $\mu \neq 0$, dann ist $\vec{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{a} - \frac{\nu}{\mu}\vec{c}$.

$\vec{b}$ ist eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{c}$, das heißt $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar. Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind, dann gilt zum Beispiel $\vec{a} = \sigma\vec{b} + \tau\vec{c}$, das heißt, $1 \cdot \vec{a} + (-\sigma)\vec{b} + (-\tau)\vec{c} = \vec{o}$, also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.

Satz: Vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ im Raum sind immer linear abhängig.

Beweis: Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht komplanar sind, dann läßt sich $\vec{d}$ eindeutig schreiben als $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$, das heißt, es gibt die nichttriviale Nullsumme $\vec{o} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} - 1 \cdot \vec{d}$, also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear abhängig.
Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind, dann gibt es eine nichttriviale Nullsumme $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{o}$ und damit auch die nichttriviale Nullsumme $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} + 0 \cdot \vec{d} = \vec{o}$, also sind auch dann $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear abhängig.

Zusammenfassung (Bild)



Aufgaben

$\boxed{1.}$ Stelle $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ -39 \\ 26 \end{pmatrix}$

2. Stelle $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}$

3. Untersuche auf Komplanarität:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Untersuche, ob die Punkte A, B und C auf einer Gerade liegen:

a) A(2 | 0 | 1) B(3 | 2 | 0) C(1 | –2 | 2)
b) A(4 | 4 | –1) B(1 | 2 | –1) C(1 | 0 | 0)
c) A(3 | 1 | 1) B(7 | 3 | 3) C(1 | 0 | 0)
d) A(1 | –2 | 2) B(–1 | 2 | –2) C(0 | 0 | 0)

$\boxed{5.}$ Untersuche, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen:
(Tip: Verbindungsvektoren!)

a)	A(0 | 0 | 2)	B(1 | −1 | 1)	C(2 | −2 | 0)	D(3 | 3 | 1)
b)	A(0 | 0 | 0)	B(1 | 1 | 1)	C(− 3 | 0 | −1)	D(3 | 0 | 1)
c)	A(1 | 0 | 1)	B(2 | 3 | 4)	C(−1 | 1 | 0)	D(2 | 1 | 2)

6. $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v} \qquad \vec{b} = \vec{u} + \vec{v} \qquad \vec{c} = 2\vec{u} - \vec{v}$

Zeige: $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar.

$\boxed{7.}$ Bestimme t bis z so, daß die Vektoren kollinear sind:

$$\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}6\\y\\z\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x\\-2\\t\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}4\\w\\2\end{pmatrix}(!)$$

$\boxed{8.}$ Bestimme a bis f so, daß die Vektoren komplanar sind:

a) $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\8\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\1\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\e\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f\\0\\-1\end{pmatrix}$

9. Bestimme a so, daß die Vektoren komplanar sind:

a) $\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}a-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a+1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1-a\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}a-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a+1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\a-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}a+5\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\a-5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\-7\\a+3\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}a-1\\1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a+1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1-a\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}a\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a+2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **j)** $\begin{pmatrix}a-1\\a-2\\a-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a+1\\a+2\\a+3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

10. $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\6\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-3\\13\end{pmatrix}$

a) Zeige: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ sind komplanar.

b) Zeige: Mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ läßt sich nur die triviale Nullsumme bilden.
Gib je eine nichttriviale Nullsumme der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ beziehungsweise $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ an.

c) Schreibe $\vec{v}$ auf zwei Arten als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

11. Zeige:

a) Eine Vektormenge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

b) Eine Vektormenge, die zwei kollineare Vektoren enthält, ist linear abhängig.

12. Was kann man vom Vektor $\vec{x}$ sagen, wenn

a) $\{\vec{x}\}$ linear unabhängig ist? b) $\{\vec{x}\}$ linear abhängig ist?

• **13.** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien linear unabhängig.
Untersuche $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit:

a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b},\ \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ b) $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b},\ \vec{v} = \vec{b} - 2\vec{a}$

c) $\vec{u} = 2\vec{a} + 6\vec{b},\ \vec{v} = -\vec{a} - 3\vec{b}$ d) $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\ \vec{v} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$

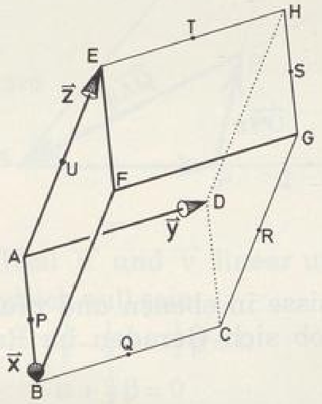
• **14.** $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien linear unabhängig.
Untersuche $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auf lineare Abhängigkeit:

a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b},\ \vec{v} = \vec{b} + \vec{c},\ \vec{w} = \vec{a} + \vec{c}$

b) $\vec{u} = \vec{c} - \vec{a},\ \vec{v} = \vec{b} - \vec{c},\ \vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$

c) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},\ \vec{v} = \vec{a} + \vec{b},\ \vec{w} = \vec{a} - \vec{c}$

15. $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{z} = \overrightarrow{AE}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf mit A(1 | 1 | 0), B(5 | 3 | 0), D(−1 | 3 | 0) und E(− 3 | 1 | 2). P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten.



Berechne diese Kantenmitten und den Spatmittelpunkt M.
Zeige, daß die folgenden Punkte in einer Ebene liegen, und untersuche, ob der Spatmittelpunkt M in dieser Ebene liegt.

a) G, T, A, Q b) A, C, S, T

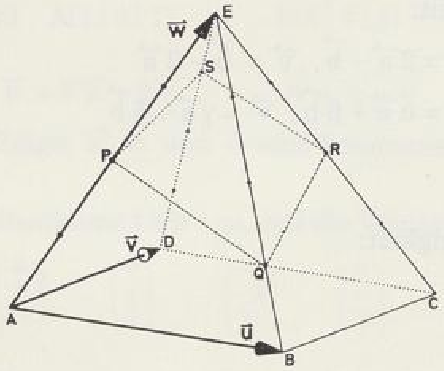
c) P, C, S, E d) P, Q, R, S, T, U

• **16.** $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf. P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten. Zeige, daß die folgenden Punkte in einer Ebene liegen, und untersuche, ob der Spatmittelpunkt M in dieser Ebene liegt. (Bild wie Aufgabe **15.**)

a) G, T, A, Q b) A, C, S, T

c) P, C, S, E d) P, Q, R, S, T, U

17. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ spannen die Pyramide ABCDE auf mit $A(2 \mid -3 \mid 0)$, $B(2 \mid 5 \mid 0)$, $D(-2 \mid -1 \mid 0)$ und $E(0 \mid 2 \mid 7)$. ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.



18. $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen die Pyramide ABCDE auf. ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.

2. Anwendungen

Mit der linearen Unabhängigkeit kann man Teilverhältnisse in ebenen und räumlichen Figuren bestimmen und außerdem untersuchen, ob sich Geraden im Raum schneiden. Dazu zwei Beispiele.

$\boxed{1}$ Die Seitenhalbierenden im Dreieck teilen sich im Verhältnis 2 : 1 von der Ecke aus.

Vektorbeweis

Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ spannen das Dreieck ABC auf.

Geschlossene Vektorkette mit S als Ecke: $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \vec{o}$

Wir drücken die drei Vektoren der Vektorkette mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus:

$$\overrightarrow{AP} = \tfrac{1}{2}\vec{u}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha\,\overrightarrow{PC} = \alpha(-\tfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta\,\overrightarrow{AQ} = \beta(\tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v}) \qquad (\beta \text{ ist negativ!})$$